

А.Асанов, Б.Калимбетов, А.Тойгонбаева

-

Мақалада бірінші ретті Фредгольм-Стилтьес сызықтық интегралдық теңдеу қарастырылды. А.Асанов ұсынған әдісті қолдана отырып, бірінші ретті сингулярлы-ауытқулы интегралдық теңдеулерді шешу үшін, М.М.Лаврентьев бойынша, тұрақтылық бағасы алынып, регуляризациялау операторы құрылды. Интегралдық теңдеудің шешімінің жалғыз екені зерттелді және L_2 класында шешімдердің тұрақтылық бағасы туралы теорема дәлелденді.

А.Asanov, B.Kalimbetov, A.Toiygonbaeva

A class linear integral equations of Fredholm-Stilties of the first kind

In this article the linear integral equation of Fredholm- Stilties of the first kind is given. Using the method proposed in A.Asanov, estimates and stability built on M.M.Lavrentev regularizing operator for solving singularly perturbed integral equations of the first kind. The questions of uniqueness of solution of the integral equation and prove a theorem about the sustainability assessment solutions in the classroom L_2 .

УДК 517.956.3

Д.М.Ахманова, М.Т.Космакова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: ahk_danna@mail.ru)

В статье рассмотрено интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода с переменным нижним пределом интегрирования. Особенность уравнения заключается, во-первых, в том, что промежуток интегрирования бесконечный и, во-вторых, при стремлении нижнего предела к верхнему значение интеграла стремится к единице. Такого рода интегральные уравнения возникают при решении краевых задач теории теплопроводности в нецилиндрических областях. Также к ним сводятся краевые задачи для спектрально-нагруженных параболических уравнений.

Ключевые слова: интегральные уравнения типа Вольтерра второго рода, краевые задачи с подвижной границей, преобразование Лапласа, модифицированная тета-функция.

При изучении некоторых нелокальных внутренне-граничных задач для параболического уравнения, спектрально-нагруженных параболических уравнений, задач с подвижной границей и обратных задач для параболических уравнений и т.д. [1–5] возникает необходимость исследования особых интегральных уравнений вида:

$$\psi(t) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} K(t, \tau) \psi(\tau) d\tau = f(t), \quad (t > 0), \quad (1)$$

где

$$K(\tau, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left(\frac{\tau+t}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(\tau+t)^2}{4a^2(\tau-t)}\right\} + \frac{1}{\sqrt{\tau-t}} \exp\left\{-\frac{\tau-t}{4a^2}\right\} \right). \quad (2)$$

К таким уравнениям также сводятся краевые задачи с подвижной границей в случае температурного нагрева (первая краевая задача в нецилиндрической области):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

с граничными условиями:

$$v(x, t)|_{x=0} = v(t), \quad v(x, t)|_{x=t} = \omega(t), \quad v(x, t)|_{t=\infty} = 0.$$

Отметим, что уравнение (1) принципиальным образом отличается от уравнений Вольтерра второго рода, для которых решение существенно и единственно. Мы покажем, что соответствующее однородное уравнение

$$\psi(t) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_t^\infty K(t, \tau) \psi(\tau) d\tau = 0, \quad (t > 0) \tag{3}$$

имеет нетривиальное решение.

Исследуем ядро $K(\tau, t)$ уравнения (1). Особенность ядра (2) заключается в том, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty K(\tau, t) = 1.$$

Действительно, пусть $\int_t^\infty K(t, \tau) d\tau = J_1(t) + J_2(t)$, где

$$J_1(t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \frac{\tau+t}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(\tau+t)^2}{4a^2(\tau-t)}\right\} d\tau;$$

$$J_2(t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau-t}} \exp\left\{-\frac{\tau-t}{4a^2}\right\} d\tau.$$

В интеграле $J_1(t)$ произведем замену $x = \sqrt{\tau-t}$ и следующие преобразования:

$$\frac{\tau+t}{4a(\tau-t)^{3/2}} d\tau = \left(\frac{t}{ax^2} + \frac{1}{2a}\right) dx = -d\left(\frac{t}{ax} - \frac{x}{2a}\right);$$

$$\frac{(\tau+t)^2}{4a^2(\tau-t)} = \left(\frac{t}{ax} - \frac{x}{2a}\right)^2 + \frac{2t}{a^2}.$$

Тогда $J_1(t)$ примет вид:

$$\begin{aligned} J_1(t) &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp\left\{-\left(\frac{t}{ax} - \frac{x}{2a}\right)^2 - \frac{2t}{a^2}\right\} d\left(\frac{t}{ax} - \frac{x}{2a}\right) = \\ &= -e^{-\frac{2t}{a^2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp\left\{-\left(\frac{t}{ax} - \frac{x}{2a}\right)^2\right\} d\left(\frac{t}{ax} - \frac{x}{2a}\right) = 2e^{-\frac{2t}{a^2}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим второе слагаемое ядра (2):

$$J_2(t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau-t}} \exp\left\{-\frac{\tau-t}{4a^2}\right\} d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty \exp\left\{-\left(\frac{\sqrt{\tau-t}}{2a}\right)^2\right\} d\left(\frac{\sqrt{\tau-t}}{2a}\right) = 1.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty K(\tau, t) d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(2e^{-\frac{2t}{a^2}} + 1\right) = 1.$$

Теперь, используя соотношения

$$\tau+t = 2\tau - (\tau-t); \quad \frac{(\tau+t)^2}{4a^2(\tau-t)} = \frac{\tau t}{a^2(\tau-t)} + \frac{\tau-t}{4a^2},$$

уравнение (3) запишем в виде:

$$\begin{aligned} \psi(t) - \int_t^\infty \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{2\tau}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\tau t}{a^2(\tau-t)}\right\} - \frac{1}{\sqrt{\tau-t}} \exp\left\{-\frac{\tau t}{a^2(\tau-t)}\right\} + \frac{1}{\sqrt{\tau-t}} \right\} \\ \exp\left\{-\frac{\tau-t}{4a^2}\right\} \psi(\tau) d\tau = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

В силу [6] достаточно найти решение «упрощенного» уравнения:

$$\psi(t) - \int_t^{\infty} k^*(t, \tau) \psi(\tau) d\tau = 0, \quad (5)$$

где

$$k^*(t, \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{2\tau}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\tau t}{a^2(\tau-t)}\right\} + \frac{1}{\sqrt{\tau-t}} \left(1 - \exp\left\{-\frac{\tau t}{a^2(\tau-t)}\right\}\right) \right\}.$$

В интегральном уравнении (5), произведя замены переменных $t = 1/t_1$, $\tau = 1/\tau_1$, получим

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{1}{t_1}\right) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^{t_1} \frac{\sqrt{t_1}}{\tau_1^{3/2} \sqrt{t_1 - \tau_1}} \left(1 - \exp\left\{-\frac{1}{a^2(t_1 - \tau_1)}\right\}\right) \psi\left(\frac{1}{\tau_1}\right) d\tau_1 - \\ - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^{t_1} \frac{2t_1^{3/2}}{\tau_1^{3/2} (t_1 - \tau_1)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{a^2(t_1 - \tau_1)}\right\} \psi\left(\frac{1}{\tau_1}\right) d\tau_1 = 0. \end{aligned}$$

Разделив обе части последнего равенства на $t_1^{3/2}$, введем следующую замену:

$$y(t_1) = \frac{1}{t_1^{3/2}} \psi\left(\frac{1}{t_1}\right).$$

$$\begin{aligned} y(t_1) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi} t_1} \int_0^{t_1} \frac{1}{\sqrt{t_1 - \tau_1}} \left(1 - \exp\left\{-\frac{1}{a^2(t_1 - \tau_1)}\right\}\right) y(\tau_1) d\tau_1 - \\ - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^{t_1} \frac{2}{(t_1 - \tau_1)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{a^2(t_1 - \tau_1)}\right\} y(\tau_1) d\tau_1 = 0. \end{aligned}$$

Для дальнейшего удобства последнее уравнение представим в виде:

$$\begin{aligned} t_1 \cdot y(t_1) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^{t_1} \frac{1}{(t_1 - \tau_1)^{1/2}} \left(1 - \exp\left\{-\frac{1}{a^2(t_1 - \tau_1)}\right\}\right) y(\tau_1) d\tau_1 - \\ - t_1 \cdot \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^{t_1} \frac{2}{(t_1 - \tau_1)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{a^2(t_1 - \tau_1)}\right\} y(\tau_1) d\tau_1 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

К уравнению (6), применив преобразование Лапласа, получим дифференциальное операторное уравнение относительно образа искомой функции

$$-y'(p) - \frac{1}{2a\sqrt{p}} \left(1 - \exp\left(-\frac{2\sqrt{p}}{a}\right)\right) \bar{y}(p) + \left\{ \exp\left(-\frac{2\sqrt{p}}{a}\right) \bar{y}(p) \right\}'_p = 0.$$

После несложных упрощений получим:

$$\bar{y}'(p) + \frac{1}{2a\sqrt{p}} \frac{ch \frac{\sqrt{p}}{a}}{sh \frac{\sqrt{p}}{a}} \bar{y}(p) = 0. \quad (7)$$

Решением дифференциального уравнения (7) является функция

$$\bar{y}(p) = C \cdot \frac{1}{sh \frac{\sqrt{p}}{a}}, \quad (8)$$

где $C = const$.

К (8) применим обратное преобразование Лапласа

$$y(t_1) = -C \left[\frac{\partial}{\partial v} \hat{\theta}_0 \left(\frac{v}{2}; a^2 t_1 \right) \right]_{v=0},$$

где

$$\widehat{\theta}_0(v; x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{x}\left(v+n+\frac{1}{2}\right)^2\right) - \sum_{n=-1}^{-\infty} n \cdot \exp\left(-\frac{1}{x}\left(v+n+\frac{1}{2}\right)^2\right) \right\}$$

– модифицированная тета-функция.

Так как

$$\begin{aligned} -\left[\frac{\partial}{\partial v} \widehat{\theta}_0\left(\frac{v}{2}; x\right)\right]_{v=0} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi x}^{3/2}} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4x}\right) - \sum_{n=-1}^{-\infty} (2n+1) \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4x}\right) \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi x}^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4x}\right), \end{aligned}$$

то получим, что решение исходного однородного интегрального уравнения (3) (или (4)) будет иметь вид:

$$\psi(t) = \frac{C}{a^3 \sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \exp\left(-\frac{n(n+1)}{4a^2} t\right).$$

При этом нужно отметить, что

$$|\psi(t)| \leq C \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{at} e^{-\frac{9t}{4a^2}} \right).$$

References

- 1 Kim E.I. Solution of a certain class of singular integral equations with line integrals // Dokl. AN SSSR (N.S). — 1957. — Vol. 113. — P. 24–27.
- 2 Soldatov A.P., Ramazanov M.I., Shaldykova B.A. About the boundary value problems for the spectrally-loaded parabolic operator. I // Vestnik of KarSU. Mathematics series. — 2011. — № 2 (62). — P. 85–92.
- 3 Soldatov A.P., Ramazanov M.I., Shaldykova B.A. About the boundary value problems for the spectrally-loaded parabolic operator. II // Vestnik of KarSU. Mathematics series. — 2011. — № 23 (62). — P. 88–95.
- 4 Akhmanova D.M., Dzhentaliev M.T., Ramazanov M.I. On a particular Volterra integral equation of second kind with a spectral parameter // Siberian Mathematical Journal. — 2011. — Vol. 52. — № 1. — P. 3–14.
- 5 Dzhentaliev M.T., Ramazanov M.I. Loaded equations are as a perturbation of differensial equations. — Almaty: Gylym, 2010. — P. 334.
- 6 Polyanin A.D., Manzhirov A.V. Handbook of Integral Equations. — Moskow: Fizmatlit, 2003. — P. 608.

Д.М.Ахманова, М.Т.Космакова

i

i

i

i

i

Мақалада интегралдаудың айнымалы төменгі шегі бар екінші текті Вольтерра интегралдық теңдеуі қарастырылды. Теңдеу, біріншіден, интегралдау аралығының шексіздігімен және, екіншіден, жоғарғы шекке төменгі шек ұмтылғанда интегралдың мәні бірге ұмтылуымен ерекшеленеді. Мұндай интегралды теңдеулер цилиндрлі емес аймақтардағы жылу өткізгіштік теориясының шектік есептерінің шешімі негізінде пайда болады. Сонымен қатар оларға спектралды-жүктелген параболалық теңдеулер үшін арналған шектік есептер де келтірілді.

D.M.Ahmanova, M.T.Kosmakova

For solution of one integral equation with one variable integration limit and the other infinite one

We consider the integral equation of the second kind of Volterra type with a variable lower limit of integration. Exception of the equation is, firstly, that the interval of integration is infinite, and secondly, in a convergence of lower limit to the upper one the integral tends to unity. Integral equations of this kind arise in the solution of boundary value problems of the theory of heat conduction in non-cylindrical domains. Also the value problems for spectrally loaded parabolic equations are reduced to them.

УДК 624.04

А.К.Бейсебаев, Е.К.Богатова, Т.В.Заикина

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: i_sunny@bk.ru)

В статье изложен алгоритм расчета рамных конструкций по предельному состоянию, основанный на постепенном увеличении интенсивности внешней нагрузки. Определены порядок появления пластических шарниров и соответствующая нагрузка. Для автоматизации расчета статически неопределимых систем методом сил использован алгоритм в матричной форме.

Ключевые слова: метод комбинированных механизмов, метод предельного состояния, эпюра, изгибающий момент, пластический шарнир.

Статически неопределимые сооружения менее материалоемки, чем статически определимые. Поэтому в строительной практике использование их более предпочтительно. В статически неопределимых системах достижение усилиями в некоторых из элементов их предельных значений не влечет за собой разрушения всей системы, если последняя за счет остальных элементов остается структурно неизменяемой, а потому, может воспринимать дополнительную нагрузку. Благодаря пластическим деформациям происходит перераспределение усилий в элементах, вследствие чего несущая способность всей системы повышается. Полное разрушение системы наступает тогда, когда будет исчерпана несущая способность числа связей, равная числу степеней свободы плюс единица.

Трудоемкость расчета рам состоит в том, что число возможных форм разрушения может быть достаточно велико и заранее невозможно установить, которая из них является действительной. Для нахождения действительной формы разрушения применяется *метод комбинированных механизмов*. Основанный на том, что для заданной рамы при заданном нагружении рассматриваются все возможные механизмы, которые могут быть получены путем составления различных комбинаций простых независимых механизмов разрушения, устанавливаемые в зависимости от расчетной схемы и действующей нагрузки. Далее для каждого механизма разрушения составляются уравнения равновесия. При этом число возможных простых независимых механизмов нагружения равно числу независимых уравнений равновесия [1].

Недостаток этого метода заключается в возможности не назначения всех возможных форм разрушения, что может привести к ошибочным неудовлетворительным результатам вычислений.

В [2] указан другой порядок расчета по методу предельного состояния: здесь предварительно проводится обычный упругий расчет, что позволяет определить наиболее напряженные и следующие за ними стержни конструкции. Однако в исследованиях, проведенных авторами, порядок появления упругих шарниров не подтвердился.