МАТЕМАТИКА

УДК 531.36

А.Т.Абдрахманов

Институт проблем информатики и управления, Алматы (E-mail: ata61@mail.ru)

Стабилизация заданной программной траектории манипуляционного робота

В статье рассмотрена заданная программная траектория манипуляционного робота на некотором отрезке времени, построенная с «запасом», обеспечивающим обход возможных препятствий в рабочей зоне. Получены уравнения движения манипуляционного робота с учетом динамики электрического привода. Доказана теорема об асимптотической устойчивости программной траектории при некотором управлении. Определено соответствующее управляющее воздействие в аналитическом виде.

Ключевые слова: манипуляционный робот, стабилизация движения, программная траектория, уравнения Лагранжа-Максвелла, обобщенные силы, асимптотическая устойчивость, критерий Гурвица.

Уравнения Лагранжа-Максвелла. Механизмы с электроприводом (манипуляторы) можно рассматривать как электромеханические системы. Для исследования их динамики наиболее удобными являются уравнения Лагранжа-Максвелла, которые имеют форму уравнений Лагранжа второго рода и позволяют автоматически получать не только уравнения движения механической части системы, но и связанные с ними уравнения электрической части.

Обобщенные механические координаты обозначим через $\tilde{\varphi}_i$, где $i = 1,...,n,$ а число n равно числу электрических степеней свободы. За обобщенные механические координаты будем выбирать линейные и угловые координаты звеньев манипулятора.

Обобщенные электрические координаты обозначим через i_k, где $k = 1,...,m,$ а число m равно числу электрических степеней свободы. За обобщенные электрические координаты будем выбирать количества электричества.

Рассмотрим привод с электродвигателем постоянного тока с независимым возбуждением. Приведенный момент инерции J_k и приведенный момент сил M_k — заданные функции угла поворота якоря (ротора) k -го электродвигателя. Обозначим индуктивность обмоток возбуждения и якоря через L_{Bk}, L_k, взаимную индуктивность — через M_k, токи в обмотках возбуждения и якоря соответственно через i_{Bk} и i_k.

Тогда функция Лагранжа-Максвелла получает вид:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n}(L_{Bk}\, i_{Bk}^2 + L_k\, i_k^2 + 2M_k\, i_k i_{Bk} + J_k \dot{\tilde{\varphi}}_k^2).$$

Уравнения Лагранжа-Максвелла [1; 27] имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\tilde{\varphi}}_k}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \tilde{\varphi}_k} = M_k;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial i_k}\right) = U_k - i_k R_k,\ k = 1,...,n, \tag{1}$$

где U_k — напряжение, приложенное к обмотке якоря; R_k — сопротивление этой обмотки. Выполняя дифференцирование в (1), получаем

$$J_k\ddot{\tilde{\varphi}}_k+\frac{\dot{\tilde{\varphi}}_k^2}{2}\frac{dJ_k}{d\tilde{\varphi}_k}-\frac{dM_k}{d\tilde{\varphi}_k}i_{\text{вк}}i_{\text{k}}=M_k;$$

$$L_k\frac{di_k}{dt}+\frac{dM_k}{d\tilde{\varphi}_k}i_{Bk}\dot{\tilde{\varphi}}_k=U_k-i_kR_k. \qquad (2)$$

Если введем передаточное число редуктора n_k (отношение числа зубьев ведомой и ведущей шестерен), то между углами φ_k и $\tilde{\varphi}_k$ имеется связь

$$\varphi_k=-n_k\tilde{\varphi}_k,\ k=1,...,n,$$

где знак минус показывает, что шестерни редуктора вращаются в противоположных направлениях. Следовательно,

$$\dot{\tilde{\varphi}}_k=-\frac{\dot{\varphi}_k}{n_k},\ k=1,...,n. \qquad (3)$$

По закону сохранения количества энергии

$$Q_k\dot{\varphi}_k=-M_k\dot{\tilde{\varphi}}_k,\ k=1,...,n.$$

Откуда

$$Q_k=\frac{M_k}{n_k},\ k=1,...,n. \qquad (4)$$

С учетом (3), (4), система (2) примет вид:

$$Q_k=\frac{dM_k}{d\varphi_k}i_{Bk}i_k-\frac{J_k}{n_k^2}\ddot{\varphi}_k-\frac{dJ_k}{d\varphi_k}\frac{\dot{\varphi}_k^2}{2n_k^2};$$

$$L_k\frac{di_k}{dt}+\frac{dM_k}{d\varphi_k}i_{Bk}\dot{\varphi}_k=U_k-i_kR_k,\ k=1,...,n. \qquad (5)$$

Для существующих конструкций электродвигателей

$$\frac{dM_k}{d\varphi_k}=N_k=const,\ k=1,...,n.$$

Тогда (5) примет вид:

$$Q_k=N_ki_{Bk}i_k-\frac{J_k}{n_k^2}\ddot{\varphi}_k-\frac{dJ_k}{d\varphi_k}\frac{\dot{\varphi}_k^2}{2n_k^2};$$

$$L_k\frac{di_k}{dt}+N_ki_k\dot{\varphi}_k=U_k-i_kR_k,\ k=1,...,n. \qquad (6)$$

Введем следующие обозначения:

$$C_1^{(k)}(\varphi_k)=-\frac{J_k(\varphi_k)}{n_k^2},\ C_2^{(k)}(\varphi_k)=-\frac{dJ_k(\varphi_k)}{2d\varphi_k n_k^2},\ C_3^{(k)}=-N_ki_{Bk};$$

$$B_1^{(k)}=L_k^{-1},\ B_2^{(k)}=L_k^{-1}R_k,\ B_3^{(k)}=L_k^{-1}N_ki_{Bk}.$$

Тогда соотношение (6) примет вид:

$$Q_k=C_1^{(k)}(\varphi_k)\ddot{\varphi}_k+C_2^{(k)}(\varphi_k)\dot{\varphi}_k^2-C_3^{(k)}i_k;$$

$$\frac{di_k}{dt}+B_3^{(k)}\dot{\varphi}_k=B_1^{(k)}U_k-B_2^{(k)}i_k,\ k=1,...,n.$$

В векторно-матричной форме:

$$Q=C_1(\varphi)\ddot{\varphi}+C_4(\varphi,\dot{\varphi})-C_3i;$$

$$\frac{di}{dt}+B_3\dot{\varphi}=B_1U-B_2i,$$

где

$$C_1(\varphi)=diag[C_1^{(1)}(\varphi_1),...,C_1^{(n)}(\varphi_n)],\ C_4(\varphi,\dot{\varphi})=diag[C_2^{(1)}(\varphi_1)\dot{\varphi}_1^2,...,C_2^{(n)}(\varphi_n)\dot{\varphi}_n^2];$$

$$C_3=diag[C_3^{(1)},...,C_3^{(n)})],\ B_3=diag[B_3^{(1)},...,B_3^{(n)})];$$

$$B_1=diag[B_1^{(1)},...,B_1^{(n)})],\ B_2=diag[B_2^{(1)},...,B_2^{(n)})].$$

Окончательно, уравнение движения с учетом электропривода примет вид:

$$A(\varphi)\ddot{\varphi} + B(\varphi,\dot{\varphi},t) = Q;$$
$$Q = C_1(\varphi)\ddot{\varphi} + C_4(\varphi,\dot{\varphi}) - C_3 i;$$
$$\frac{di}{dt} + B_3\dot{\varphi} = B_1 U - B_2 i,$$

где $A(\varphi)$ — матрица коэффициентов кинетической энергии системы; $B(\varphi,\dot{\varphi},t)$ — вектор-функция, в которую входят слагаемые, обусловленные кинетической энергией системы и внешними силами, приложенными к звеньям манипулятора; Q — вектор обобщенных сил, включающий управляющие моменты, приложенные к осям шарниров робота.

В наиболее простых математических моделях манипуляционных роботов, не учитывающих динамику приводов, обобщенные силы Q_i зависят только от обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени:

$$Q_i = Q_i(\varphi,\dot{\varphi},t)$$

или

$$\bar{A}(\varphi)\ddot{\varphi} + \bar{B}(\varphi,\dot{\varphi},t) = -C_3 i;$$
$$\frac{di}{dt} + B_2 i + B_3\dot{\varphi} = B_1 U, \tag{7}$$

где $\bar{A}(\varphi) = A(\varphi) - C_1(\varphi)$, $\bar{B}(\varphi,\dot{\varphi},t) = B(\varphi,\dot{\varphi},t) - C_4(\varphi,\dot{\varphi})$.

Если из системы (7) исключим i, т.е.

$$i = B_2^{-1}[B_1 U - B_3\dot{\varphi} - \frac{di}{dt}]$$

и

$$\bar{A}(\varphi)\ddot{\varphi} + \bar{B}(\varphi,\dot{\varphi},t) = C_3 B_2^{-1}[\frac{di}{dt} + B_3\dot{\varphi} - B_1 U]. \tag{8}$$

С другой стороны, дифференцируя по t первое уравнение из системы (8), имеем:

$$\frac{d\bar{A}(\varphi)}{dt}\ddot{\varphi} + \bar{A}(\varphi)\dddot{\varphi} + \frac{d}{dt}\bar{B}(\varphi,\dot{\varphi},t) = -C_3\frac{di}{dt}$$

и, подставляя во второе уравнение, получим

$$C_3^{-1}[\frac{d\bar{A}(\varphi)}{dt}\ddot{\varphi} + \bar{A}(\varphi)\dddot{\varphi} + \frac{d}{dt}\bar{B}(\varphi,\dot{\varphi},t)] + B_1 U = B_3\dot{\varphi} - B_2 C_3^{-1}[\bar{A}(\varphi)\ddot{\varphi} + \bar{B}(\varphi,\dot{\varphi},t)]$$

или

$$\bar{\bar{A}}(\varphi)\dddot{\varphi} + \bar{\bar{B}}(\varphi,\dot{\varphi},\ddot{\varphi},t) + B_1 U = 0,$$

где

$$\bar{\bar{A}}(\varphi) = C_3^{-1}\bar{A}(\varphi),$$
$$\bar{\bar{B}}(\varphi,\dot{\varphi},\ddot{\varphi},t) = [C_3^{-1}\frac{d\bar{A}(\varphi)}{dt} + B_2 C_3^{-1}\bar{A}(\varphi)]\ddot{\varphi} + C_3^{-1}\frac{d}{dt}\bar{B}(\varphi,\dot{\varphi},t) + B_2 C_3^{-1}\bar{B}(\varphi,\dot{\varphi},t)] - B_3\dot{\varphi}.$$

Здесь в качестве управления используется вектор U.

Стабилизация программных траекторий манипуляционного робота. Рассмотрим уравнения движения манипуляционного робота (8) с учетом динамики электрического привода:

$$\bar{A}(\varphi)\ddot{\varphi} + \bar{B}(\varphi,\dot{\varphi},t) = C_3 B_2^{-1}[\frac{di}{dt} + B_3\dot{\varphi} - B_1 U],\ t \in [t_0,t_1],\quad t_1 \le \infty. \tag{9}$$

Пусть $\varphi_p(t)$, $t \in [t_0,t_1]$ — заданная программная траектория, построенная с «запасом» [1], обеспечивающим обход возможных препятствий в рабочей зоне. Задачу стабилизации программной траектории манипулятора будем понимать как задачу синтеза управляющих воздействий $U = (U_1,...,U_n)^*$, обеспечивающего асимптотическую устойчивость программной траектории и, в частности, гарантирующего убывание вектора динамической ошибки $\sigma(t) = \varphi(t) - \varphi_p(t)$ со временем.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\det \overline{A}(\varphi) \neq 0,\ \det B_1 \neq 0,\ \det C_3 \neq 0$ и закон управления

$$U = B_1^{-1}\frac{di}{dt} + B_1^{-1}B_3\dot{\varphi} - B_1^{-1}B_2C_3^{-1}\{\overline{A}(\varphi)[\ddot{\varphi}_p - D_1(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_p) - D_2(\varphi - \varphi_p)] + \overline{B}(\varphi, \dot{\varphi}, t)\}, \tag{10}$$

где $D_1 = \| d_{1ij} \|,\ D_2 = \| d_{2ij} \|$ — определенно-положительные вещественные матрицы.

Тогда программная траектория $\varphi_p(t)$ асимптотически устойчива в целом, т.е. асимптотически устойчива при любых начальных возмущениях $\sigma(t_0) = \varphi(t_0) - \varphi_p(t_0)$.

Доказательство. Подставляя управление U из (10) в систему (9), получим

$$\overline{A}(\varphi)[(\ddot{\varphi} - \ddot{\varphi}_p) + D_1(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_p) + D_2(\varphi - \varphi_p)] = 0,$$

или

$$\ddot{\sigma} + D_1\dot{\sigma} + D_2\sigma = 0.$$

Следуя работе [2], положим

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 E + \lambda D_1 + D_2.$$

Пусть λ^0 — корень характеристического уравнения $\det \Delta(\lambda) = 0$.

Обозначим через $\nu(\lambda^0)$ — ненулевой вектор, удовлетворяющий уравнению

$$\Delta(\lambda^0)\nu = 0. \tag{11}$$

Умножая (11) слева на $\overline{\nu}^*(\lambda^0)$, т.е. на транспонированный вектор ν с комплексно-сопряженными компонентами, получим

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0,$$

где

$$a_0 = \overline{\nu}^*\nu = \sum_k |\nu_k|^2,\ a_1 = \overline{\nu}^* D_1\nu,\ a_2 = \overline{\nu}^* D_2\nu.$$

Числа a_1, a_2 — положительные, так как D_1, D_2 — положительно определенные матрицы.

Следовательно, λ^0 является корнем квадратичного уравнения с положительными коэффициентами. А линейная система (11) асимптотически устойчива по критерию Гурвица [2; 221]. Теорема доказана.

Заметим, что в теореме 1 условие невырожденности рассматриваемых матриц, как правило, выполняется.

Следствие 1. Пусть матрицы D_1, D_2 — диагональные, т.е.

$$D_j = diag\{d_{j11}, ..., d_{jnn}\},\ j = 1, 2.$$

При этом, если характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + d_{1kk}\lambda + d_{2kk} = 0,\ k = 1, ..., n$$

имеет простые корни

$$\lambda_{jk} = \frac{1}{2}(-d_{1kk} \pm \sqrt{d_{1kk}^2 - 4d_{2kk}}) < 0,$$

то решение

$$\sigma_k(t) = C_{1k}e^{\lambda_{1k}t} + C_{2k}e^{\lambda_{2k}t},\ k = 1, ..., n, \tag{12}$$

а в случае кратного корня $\lambda_{1k} = \frac{1}{2}d_{1kk}$ — решение

$$\sigma_k(t) = C_{1k}^0 e^{\lambda_{1k}t} + C_{2k}^0 e^{\lambda_{2k}t},\ k = 1, ..., n. \tag{13}$$

Здесь

$$C_{1k} = \frac{\lambda_{2k}\sigma_k(t_0) - \dot{\sigma}_k(t_0)}{e^{\lambda_{1k}t_0}(\lambda_{2k} - \lambda_{1k})},\ C_{2k} = \frac{-\lambda_{1k}\sigma_k(t_0) + \dot{\sigma}_k(t_0)}{e^{\lambda_{2k}t_0}(\lambda_{2k} - \lambda_{1k})};$$

$$C_{1k}^0 = e^{-\lambda_{1k}t_0}[(1 + t_0\lambda_{1k})\sigma(t_0) - t_0\dot{\sigma}(t_0)];$$

$$C_{2k}^{0} = e^{-\lambda_{1k} t_0}[(-\lambda_{1k})\sigma(t_0) + \dot{\sigma}(t_0)].$$

Тогда для решения (12) можно получить оценки

$$\sigma_k^2(t) \le L_{1k}^2 e^{2\lambda_{1k} t},\; L_{1k} = C_{1k} + C_{2k};$$
$$\int_{t_0}^{t_1} \sigma_k^2(t)dt \le \frac{L_{1k}^2}{2\lambda_{1k}}[e^{2\lambda_{1k}t_1} - e^{2\lambda_{1k}t_0}], \tag{14}$$

а для решения (13):

$$\sigma_k^2(t) \le (L_{2k}^0)^2 t^2 e^{2\lambda_{2k} t},\; L_{2k}^0 = \tilde{C}_{1k}^0 + C_{2k}^0;$$
$$\tilde{C}_{1k}^0 = \max\{0, C_{1k}^0\}; \tag{15}$$
$$\int_{t_0}^{t_1} \sigma_k^2(t)dt \le \frac{(L_{2k}^0)^2}{2\lambda_{2k}^2} e^{2\lambda_{2k}t}(\lambda_{2k}t^2 - t + 1)\Big|_{t=t_0}^{t=t_1}.$$

Матрицы $D_1 > 0, D_2 > 0$ можно доопределить так, чтобы правые части неравенства (14), (15) были минимальными при фиксированном $t_1 < \infty$.

References

1 *Yurevich E.I.* Dynamics of management of robots. — Moscow: Nauka, 1984. — 336 p.
2 *Iserman M.A.* Classical mechanics. — Moscow: Nauka, 1980. — 368 p.

А.Т.Әбдірахманов

Манипуляция роботының берілген программалық траекториясының тұрақтануы

Мақалада кейбір уақыт мерзіміндегі болуы мүмкін бөгелулердің жұмыс аймағындағы аралап шығуды қамтамасыз ететін «қормен» салынған манипуляция роботының берілген траекториялық бағдарламасы қарастырылды. Манипуляциялық жұмыстың теңдік қозғалысы ток арқылы жүргізу есебінен алынды. Кейбір басқару орындарында программалық траекторияның асимптотикалық орнықтылығын қамтамасыз ететін теорема дәлелденді. Көкейкесті басқарушы әсер аналитикалық түрде анықталды.

A.T.Abdrakhmanov

Stabilization of the set program trajectory of the handling robot

In work the set program trajectory of the handling robot on some interval of time, constructed with «stock», providing round of possible obstacles in a working zone is considered. The equations of movement of the handling robot in view of dynamics of an electric drive are received. The theorem about asymptotic stability of a program trajectory is proved at some management. Appropriating operating influence in an analytical type is received.