

К.Сексенбаев, А.О.Башеева

Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті

ПОЛИЦИКЛДЫҚ ГРУППАНЫҢ КЕМІМЕЛІ ЦЕНТРЛІК ҚАТАРЫ БАР БОЛУЫ ТУРАЛЫ

Статья посвящена теории полициклических групп. Авторами рассматривается вопрос о том, что существует упорядоченная полициклическая группа, не обладающая убывающим центральным рядом.

Work is devoted to the theory of polycyclic groups, the question that there is ordering the polycyclic group which is not possessing a decreasing central number is considered.

Қазіргі заманда группалар теориясы алгебраның ең бір дамыған облысы болып келеді. Ол әр түрлі салаларда — топологияда, функциялар теориясында, кванттық механикада және басқада математиканың және жаратылыстану салаларында, сондай-ақ күрделі алгебралық жүйелер қатарында ең қажетті бөлігі болып қолданылады. Жалпы группалар нақты өмірдің ең терең заңдылықтарының, атап айтқанда, симметрияны танудың ең қуатты аспабы болып келеді.

Мақалада полициклдық группаның бір қасиеті қарастырылады. Негізгі нәтижеге көшпес бұрын полициклдық группаның анықтамасын және басқа белгілі анықтамалар мен теоремаларды [1] келтірілмегендіктен және олар қажет болғандықтан, осы жұмыста атап өтейік.

Анықтама 1. Егер G -группасының

$$G = G_0 \Delta G_1 \Delta G_2 \Delta \dots \Delta G_n = 1$$

нормальдық қатарының ұзындығы шекті және факторлары циклдық группа болса, онда G -группасын *полициклдық группа* деп атаймыз. Мұндағы Δ белгісі нормальдық бөлгішті көрсетеді.

Анықтама 2. Егер G мен G^* -группаларының арасындағы ϕ бейнелеуі амалды сақтайтын болса, басқаша айтқанда, $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$, онда ϕ бейнелеуін группалардың арасындағы *гомоморфизм* деп атайды.

Мысалы. Бізге n натурал саны және Z барлық бүтін сандар жиыны берілсін. Сонда Z жиынын n -ге бөлгендегі қалдықтарына қарап, n класқа бөлуге болады. Бұл кластарда z_0, z_1, \dots, z_{n-1} түрінде белгілеп, Z деп қабылдаймыз.

Сонда Z жиыны кластарды қосу амалына қарағанда группа болады. Сонда $Z \xrightarrow{\phi} Z_n$ бейнелеуі гомоморфизм болады.

Бізге G группасы және оның H нормальдық бөлгіші берілсін. Сонда G группасы H ішкі группасы бойынша іргелес кластарға бөлеміз, мұнда H нормальдық бөлгіш болғандықтан,

$$aH = Ha$$

болады. Сондықтан оң іргелес немесе сол іргелес деп атаймыз. Бұл жағдайда H нормальдық бөлгіш бойынша іргелес кластардың жиынын G/H түрде белгілейміз.

Теорема 1. G группасының H нормальдық бөлгіші бойынша G/H кластар жиыны кластарды көбейту амалына қарағанда группа болады.

Жоғарыда анықталған G/H группасы H нормальдық бөлгіші бойынша *фактор-группа* деп аталады.

Анықтама 3. Егер

1. Кез келген x үшін $x \leq x$ (рефлексивтік).
2. Кез келген x, y, z үшін $x \leq y$ және $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (транзитивтік) шарттар орындалатын \leq бинарлық предикат жартылай реттік деп аталады.
3. Егер кез келген x, y үшін $x \leq y$ немесе $y \leq x$ сызықтық шарт орындалса, онда \leq предикаты сызықтық реттік деп аталады.
4. Егер кез келген x, y, z үшін $x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$ және $zx \leq zy$ орындалса, онда группада анықталған \leq предикат көбейтуге қарағанда *тұрақты* деп аталады.

Осы төрт шарт орындалса, онда группа *реттелген* деп аталады. Егер группа реттелген болса, онда оның ішкі группасы да сондай болып табылады.

Ағылшын ғылымы R.Ree [1] өзінің бір жұмысында «егер реттелген группа ішкі группалар үшін максималдық шартын қанағаттандырса, онда ол группаның ұзындығы бірінші реттік ω -санынан аспайтын төменгі центрлік қатары болады» деген теорема дәлелденген. Осы теореманың дәлелдеуінің кемшіліктері А.Л.Виноградовтың [2] жұмысында көрсетілген. Бірақ R.Ree жұмысындағы ұйғарым не дәлелденіп, не жоққа шығарылған жоқ, осы жұмыста ол ұйғарымды жоққа шығаратын келесі теорема дәлелденеді:

Теорема 4. Кемімелі центрлік қатарды қамтымайтын реттелген полициклдық группа бар.

Дәлелдеуі: Оң нақты сандардың мультипликативті группасының көмегі бойынша анықталған, Γ — нақты сандардың аддитивті группасының кеңейтілуі болсын. Γ -группаның элементтері (s, l) түрінде болсын, мұндағы s — кез келген нақты сан, ал $l > 0$ және егер

$$a = (s, l);$$

$$d = (s_1, l_1)$$

түрінде алсақ, онда

$$a \cdot d = (s + ls_1, ll_1).$$

$$1) a \cdot d = (s + ls_1, ll_1) \in \Gamma;$$

мұндағы $s, s_1 \in D$, $l, l_1 \in D^+$, $s + ls_1 \in D$, $ll_1 \in D^+$;

$$2) a \cdot (d \cdot c) = (a \cdot d) \cdot c.$$

Тексереміз:

$$(s_1, l_1)((s_2, l_2) \cdot (s_3, l_3)) = ((s_1, l_1)(s_2, l_2))(s_3, l_3).$$

$$a. (s_2, l_2)(s_3, l_3) = (s_2 + l_2s_3, l_2l_3);$$

$$(s_1, l_1)(s_2 + l_2s_3, l_2l_3) = (s_1 + l_1(s_2 + l_2s_3), l_1l_2l_3) = (s_1 + l_1s_2 + l_1l_2s_3, l_1l_2l_3);$$

$$b. (s_1, l_1)(s_2, l_2) = (s_1 + l_1s_2, l_1l_2);$$

$$(s_1 + l_1s_2, l_1l_2)(s_3, l_3) = (s_1 + l_1s_2 + l_1l_2s_3, l_1l_2l_3)$$

топтау заңы орындалады.

3) Бірлік элемент іздейміз

$$(0, 1)(s, l) = (0 + 1 \cdot s, 1 \cdot l) = (s, l)$$

$$(s, l)(0, 1) = (s + l \cdot 0, l \cdot 1) = (s, l)$$

$$(0, 1) = e \text{ бірлік элемент.}$$

$$4) (s, l)(x, y) = (0, 1);$$

$$(s + l \cdot x, ly) = (0, 1);$$

$$s + lx = 0, \quad ly = 1, \quad y = \frac{1}{l};$$

$$lx = -s \Rightarrow x = -\frac{s}{l} \in D, \quad l \neq 0;$$

$$(x, y)(s, l) = (0, 1);$$

$$(x + ys, ye) = (0, 1);$$

$$x + ys = 0, \quad yl = 1, \quad x = -\frac{s}{l};$$

$$(s, l)^{-1} = \left(-\frac{s}{l}, \frac{1}{l} \right)$$

бірмәнді екеніне көзіміз жетті.

Бұдан Γ группа болатындығы шығады. Γ -группаның реттелетіндігін байқаймыз.

$$a = (s, l);$$

$$d = (s_1, l_1)$$

екі теңдікті салыстыруға болады. Егер $s > s_1$ болса, онда $a > d$. Егер $s = s_1$ болса, онда біз l -ге қарап жаза аламыз. Бұл кезде ол бөлшектеп реттелген деп аталады. Егер $l \geq l_1$ болса, онда $a \geq d$ болады.

Γ -группаның

$$G^* = \{(1, 1), (0, \alpha^{-1})\}$$

ішкі группасын алайық, мұнда

$$\alpha: x^2 - x - 1 = 0 \text{ —}$$

квадрат тендеудің түбірі, басқаша айтқанда,

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Γ -группасының реттелетіндігіне G^* -группаның реттелетіндігі шығады.

Егер

$$a_1 = (1; 1), \quad \vartheta = (0, \alpha^{-1}), \quad a_2 = (\alpha, 1)$$

болса, онда

$$\begin{aligned} (\vartheta \vartheta^{-1} = (0, \alpha^{-1}) (0, \alpha)) &= (0, 1), \quad \vartheta^{-1} = (0, \alpha); \\ \vartheta^{-1} a_1 \vartheta &= (0, \alpha) (1, 1) (0, \alpha^{-1}) = (\alpha, \alpha) (0, \alpha^{-1}) = (\alpha, 1) = a_2; \\ \vartheta^{-1} a_2 \vartheta &= (0, \alpha) (\alpha, 1) (0, \alpha^{-1}) = (\alpha^2, \alpha) (0, \alpha^{-1}) = (\alpha^2, 1) = a_1 a_2; \\ (\alpha^2, 1) &= (1, 1) (x, y) = (1+x, y), \end{aligned}$$

бұдан

$$\alpha^2 = 1+x,$$

онда алатынымыз

$$\begin{aligned} (\alpha^2, 1) &= (\alpha+1, 1); \\ \vartheta^{-1} a_2 \vartheta &= (\alpha^2, 1) = (\alpha+1, 1) = (1, 1)(\alpha, 1) = a_1 a_2 \end{aligned}$$

және

$$\begin{aligned} [a_1, a_2] &= a_1^{-1} a_2^{-1} a_1 a_2 = (-1, 1) (-\alpha, 1) \cdot (1, 1) (\alpha, 1) = (-(1+\alpha), 1) (1+\alpha, 1) = \\ &= (-(1+\alpha) + (1+\alpha), 1) = (0, 1) = 1. \end{aligned}$$

Онда

$$[a_1, a_2] = 1, \quad \vartheta^{-1} a_1 \vartheta = a_2, \quad \vartheta^{-1} a_2 \vartheta = a_1 a_2$$

сәйкестіктермен анықталған

$$G = \{a_1, a_2, \vartheta\}$$

абстрактті группа G^* -группаға изоморфты екені анық. G -группаның реттелетіндігін көрсеттік.

G -группасы $A = \{a_1, a_2\}$ және $\{\vartheta\}$ -группалардың жартылай тура көбейтілуімен анықталған

$$G = A\lambda\{\vartheta\}.$$

G — группа полициклдық

$$G \triangleright A \triangleright \{a_1\} \triangleright E = 1,$$

(1) — G -группаның басты нормаль қатары. G/A -фактор-группа циклдық, ал G/E группа a_1, a_2 екі элементтен тұратын жасаушылар жүйесін қамтиды.

G -группаның центрлік тізбегі келесі түрде анықталсын:

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots,$$

мұнда

$$G_\alpha = [G_{\alpha-1}, G]$$

α шекті болған кезеңде G_α ретінде G_β , ($\beta < \alpha$)-дың барлық қиюшылары алынады.

$$G_1 = [G, G] = A$$

екені анық. Бірақ G_1 -группаның

$$[\vartheta, a_2^{-1}] = a_1$$

және

$$[\vartheta, a_1^{-1}] = a_1^{-1} a_2$$

элементтері барлық A -группаның жасаушысы болады.

Сонымен қоса G -группаның келесі элементтері A -группаның жасаушыларың құрайды:

$$[\vartheta, a_2^{-1}] = \vartheta^{-1} a_2 \vartheta a_2^{-1} = (0, \alpha)(\alpha, 1) \left(0, \frac{1}{2}\right) (-\alpha, 1) =$$

$$= (\alpha^2, \alpha) \left(-1, \frac{1}{2}\right) = (a = \alpha_2 + 1 - \alpha, 1) = (1, 1) = a_1;$$

$$[\vartheta, a_1^{-1}] = \vartheta^{-1} a_1 \vartheta a_1^{-1} = a_2 a_1^2 = a_1^{-1} a_2;$$

$$\{[\vartheta, a_2^{-1}], [\vartheta, a_1^{-1}]\} = G_1 \ni a_1, a_2 \supset A,$$

онда

$$G = A.$$

Осылайша 1-ші нөмірден бастап кез келген α үшін

$$[G_{\alpha-1}, G] = A$$

екенін көрсете аламыз. Онда G -группаның төменгі центрлік тізбегі 1-ші нөмірден бастап A -ға стабилизацияланады.

$$G \supset A = A = A = A = \dots$$

Сондықтан G -группа кемімелі центрлік қатарды қамтымайтыны шығады.

Әдебиеттер тізімі

1. Ree R. On ordered, finitely generated, solvable groups // Trans. Roy. Soc. — Canada, 1954. — № 48. — С. 39–42.
2. Виноградов А.Л. Замечание по теории частично упорядоченных групп и полугрупп // Алгебра и логика. — М., 1962. — № 2. — С. 22–29.

УДК 517.51

А.Т.Сыздыкова

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана

ПРОСТРАНСТВО БЕСОВА С БАЗИСОМ ПО КРАТНОЙ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЕ УОЛША И ЕГО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НОРМИРОВКИ

Мақалада ең жақсы жуықтау және үзілісдік модулі терминдерінде еселі жалтыланған Уолш жүйесі бойынша Бесов кеңістігінің эквивалентті нормалары қарастырылған. Сондай-ақ оның құрылу тізбектерінің шенелгендігінің қажеттілігі көрсетілген.

In this work we consider equivalent norms of the Besov space with bases by the multiple Walsh system in terms the best approximations and modulus of continuous. We show the essentiality of boundedness of elemental sequence of systems.

Пусть $P^n = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ n -кратное множество систем произвольных образующих, т.е.

$P_i = \{p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \dots, p_j^{(i)}, \dots\}$, $p_j^{(i)} \geq 2$, $p_j^{(i)}$ — целые числа, $i = 1, 2, \dots, n$, $j \in \mathbb{N}$.