3. *Pulatov A.K.* On a problem Bitsadze-Samarskii // Differential Equations. — 1989. — Vol. 25. — № 3. — P. 537–540.
4. *Skubachevskii A.L.* Nonclassical boundary-value problems // Journal of Mathematical Sciences. — 2010. — Vol. 166. — № 4. — P. 377–561.
5. *Torebek B.T., Turmetov B.Kh.* On the solvability of some problems for the Laplace equation // Mathematical journal. — Almaty, 2010. — Vol. 10. — № 1 (35). — P. 93–103.
6. *Turmetov B.H., Ilyasova M.T.* On the solvability of a nonlocal problem with a boundary operator of fractional order Hadamard Marsh. // Bulletin of ENU. — Astana. — 2010. — № 2 (75). — P. 24–30.
7. *Karachik V.V. and Turmetov B.Kh.* One problem for the harmonic equation // Ser. Phis.-math. Sciences. — Tashkent. 1990. — № 4. — P. 17–21.

ӘОЖ 531

Цилиндрлік қабықшаны есептеу

Calculation of a cylindrical environment

Тұрсынов К.А., Тойчибекова М.К., Самалықова С.Б.

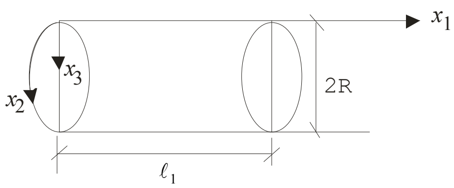
Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті (E-mail: mkt88_01@mail.ru)

Статья посвящена расчету цилиндрической оболочки. На базе известного основного уравнения пластины получено основное уравнение оболочки, которое существенно отличается от уравнения существующих теорий, тем самым значительно упрощая расчеты цилиндрических оболочек. При осесимметричных деформациях расчеты цилиндрических оболочек сведены к расчету изгибаемой балки. Осуществлен учет параметров нормального перемещения и жесткости в расчетных формулах теории оболочек. Получено решение задачи изгиба цилиндрической оболочки при действии произвольных внешних нагрузок, жесткостных характеристик.

Article is devoted to calculation of a cylindrical environment. On the basis of the known basic equation of a plate the basic equation of an environment which essentially differs from the equation of existing theories and by that essentially simplifies calculations of cylindrical environments is received. At symmetric on an axis deformations calculations of cylindrical environments are shown to calculation of a bent beam. The account of parameters of normal moving and rigidity in settlement formulas of the theory of covers is carried out. The decision of a problem of a bend of a cylindrical cover is received, at action of any external loadings, rigid characteristics.

Цилиндрлік қабықша ұшатын аппараттар мен қозғалтқыштардың, су асты кемелерінің, резервуарлардың және де құбырлардың, сонымен қатар тағы басқа конструкцияларына кіреді. Сондықтан да оларды есептеу практикалық жағынан үлкен қызығушылық тудырады [1–4].

Ең алдымен қалыңдығы h тұрақты дөңгелек цилиндрлік қабықшаны есептеудің сызықтық теорияның негізгі қатыстарын келтіріп өтейік. Орта бетінің қисығының радиусын R арқылы белгілейік. Орталық беттің кез келген нүктесінің координатасын анықтайтын параметр ретінде доға мен құраушы бойымен бағытталған x_1 және x_2 координаталарын таңдап алайық (сур. қара).



Сур. Цилиндрлік қабықша

Осы бағыттардағы және нормаль бойындағы жылжуларды u_1, u_2 және W арқылы белгілейміз. Жалпыланған пластинаға сыртқы күштерден басқа қабақшының бұралуымен қисықтары арқылы өрнектелген күштер әсер етеді. Төменнен жоғары қарай бағытталған көлденең күшті мына түрде аламыз:

$$q_\varphi = EhK_0^2 \cdot \lambda \cdot W;\ \lambda = \lambda_1^2 + 2\frac{G}{E}\lambda_{12}^2 + \lambda_2^2;\ \lambda_1 = \frac{K_1}{K_0};$$

$$\lambda_2 = \frac{K_2}{K_0},\ \lambda_{12} = \frac{K_{12}}{K_0},\ G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \tag{1}$$

мұндағы K_0 — қабықшаның базалық қисығы; $W(x_1, x_2)$ — пластинаның иілу функциясы (тік жылжу); E, ν — қабықша материалының серпімділік модулі мен Пуассон коэффициенті.

Цилиндрлік қабықшаның орталық бетінің қисығы мына түрде жазылады:

$$R_1 = \infty;\ R_2 = R;\ K_1 = 0;\ K_2 = \frac{1}{R};\ K_0 = K_2;\ K_{12} = 0; \tag{2}$$

$$\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 1;\ \lambda_{12} = 0;\ \lambda = 1.$$

Осы қабықшаның негізгі теңдеуі былайша болмақ [1]:

$$Dg\nabla^2\nabla^2 W = q(x_1, x_2),\ g = 1 + \frac{12(1-\nu^2)}{K_w}K_K^2;\ K_K^2 = \frac{K_0^2\ell_1^2\ell_2^2}{h^2}, \tag{3}$$

мұнда g — қатаңдық параметрі; $\ell_1 = \alpha_1 R$; $\ell_2 = \beta_1 R$; шамаларды ескере отырып, оны былайша жазуға болады:

$$g = 1 + \frac{12(1-\nu^2)}{K_w}K_K^2;\ K_K^2 = \frac{K_0^2\ell_1^2\ell_2^2}{h^2} = \alpha_1^2\beta_1^2\frac{R^2}{h^2}, \tag{4}$$

мұндағы β_1 — центрлік бұрыш ($0 < \beta \le 2\pi$).

Цилиндрлік қабықшаның сызықтық теориясының негізгі қатыстарын [1] келтірейік:

– иілім функциясы (3-ші теңдеудің шешімі)

$$W(x_1, x_2) = f(x, y)W_0;\ q(x_1, x_2) = Pu(x, y)q_0; \tag{5}$$

$$f(x,y) = X(x)Y(y);\ x = \frac{x_1}{\ell_1} = \frac{x_1}{\alpha_1 R};\ y = \frac{x_2}{\ell_2} = \frac{x_2}{\beta_1 R};$$

$$X^{IV}(x) = P(x); Y^{IV}(y) = P(y); Pu(x, y) = P(x)P(y),$$

– иілім параметрі

$$W_0 = \frac{\alpha}{g}\frac{\alpha_1^2\beta_1^2 R^4}{D};\ \alpha = \frac{R_0}{R};\ D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)};$$

$$R_0 = \int_0^1\int_0^1 Pu(x, y)dxdy;\ R = \int_0^1\int_0^1 \nabla^2\nabla^2 f dxdy; \tag{6}$$

$$\nabla^2\nabla^2 f = \frac{1}{m^2}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2} + m^2\frac{\partial^4 f}{\partial y^4};\ m = \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\alpha_1}{\beta_1},$$

– ішкі күштер

$$M_1 = -m_1(x, y)M_1^0;\ m_1(x, y) = \frac{1}{m^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 f}{\partial y^2};\ M_1^0 = \frac{\alpha q_0\alpha_1^2 R^2}{g};$$

$$M_2 = -m_2(x, y)M_2^0;\ m_2(x, y) = m^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 f}{\partial x^2};\ M_2^0 = \frac{\alpha q_0\beta_1^2 R^2}{g};$$

$$M_{12} = -m_{12}(x, y)M_{12}^0;\ m_{12}(x, y) = (1-\nu)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y};\ M_{12}^0 = \frac{\alpha q_0\beta_1\alpha_1 R^2}{g};$$

$$Q_1 = -q_1(x, y)Q_1^0;\ q_1(x, y) = \frac{1}{m^2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2};\ Q_1^0 = \frac{\alpha q_0\alpha_1 R}{g}; \tag{7}$$

$$Q_2 = -q_2(x, y)Q_2^0;\ q_2(x, y) = m^2\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2};\ Q_2^0 = \frac{\alpha q_0\beta_1 R}{g};$$

– тангенциалдық жылжулар

$$u_1(x,y)=0;\ u_2(x,y)=K_0 2\pi R V_{10}(y)X(x)W_0;$$

$$V_{10}(y)=\omega_2(y)-\omega_2(1)y;\ \ \omega_2(y)=\int_0^y Y(y)dy, \tag{8}$$

– мембраналық күштер

$$N_1=0;\ N_2=-EhK_0W_0\omega_2(1)X(x);$$
$$N_{21}=0;\ N_{12}=0. \tag{9}$$

Сөйтіп, цилиндрлік қабықшаның кернеулік-деформациялық қалпын анықтауда (4)–(9) формулаларын қолдану керек. Есептің шекаралық шарттары $f(x,y)$ функциясын тапқанда ескеріледі. Топсалы бекінгенде және де қабықшаның $x_*=0,\ x_*=1$ шеттері қатты бекітілгенде олар былай жазылады:

$$X(x_*)=X''(x_*)=0,\ \text{немесе}\ X(x_*)=X'(x_*)=0. \tag{10}$$

Қабықшаның шеттері жылжымайтын жағдайда $u_1=0;\ u_2=0.$

Қабықшаға әсер ететін сыртқы күшті $Pu(x,y)$ ескере отырып, (4)–(9) формулаларын қолдану арқылы тұйық цилиндрлік қабықшаны кең диапазонда есептеуін жүргізуге болады.

Енді қарапайым жағдайлардың бірі, бірақ дегенмен практикалық жағынан үлкен маңызы бар симметриялы жүктелген тұйық дөңгелек цилиндрлік қабықшаны қарастырайық. Осьтік симметрия негізгі қатыстарды едәуір жеңілдетуге мүмкіндік береді. Симметрияның арқасында күштер мен жылжулар доғалық координатадан тәуелсіз, сондықтан да көрсетілген қатыстағы y бойынша туындылар нөлге айналады. Айтылған жеңілдетулерден кейін осьтік симметриялы деформация кезінде цилиндрлік қабықшаның негізгі қатыстары (5)–(9) келесі түрге келеді:

– иілім функциясы (5)

$$W(x_1)=X(x)W_0;\ q(x_1)=P(x)q_0;Y(y)=1;$$
$$x=\frac{x_1}{\ell_1}=\frac{x_1}{\alpha_1 R};\ X^{IV}(x)=P(x), \tag{11}$$

– иілім параметрі (6)

$$R_0=\int_0^1 P(x)dx;\ \nabla^2\nabla^2 f=\frac{1}{m^2}X^{IV}(x); \tag{12}$$

$$R=\int_0^1 \nabla^2\nabla^2 f dx=\frac{1}{m^2}\int_0^1 X^{IV}dx=\frac{1}{m^2}\int_0^1 P(x)dx=\frac{R_0}{m^2};$$
$$\alpha=\frac{R_0}{R}=m^2;\ W_0=\frac{\alpha}{g}\frac{q_0\ell_1^2\ell_2^2}{D}=\frac{1}{g}\frac{\alpha_1^4 q_0 R^4}{D};$$
$$g=1+\frac{12(1-\nu^2)}{K_w}K_K^2;\ K_K^2=\frac{\ell_1^4}{R^2h^2}=\alpha_1^4\frac{R^2}{h^2},$$

– ішкі күштер (7)

$$M_1=-m_1(x)M_1^0;\ m_1(x)=X''(x);\ M_1^0=\frac{\alpha_1^2}{g}q_0R^2;$$
$$M_2=-m_2(x)M_2^0;\ m_2(x)=\nu X''(x);\ M_2^0=\frac{\alpha_1^2}{g}q_0R^2;$$
$$M_{12}=0; \tag{13}$$
$$Q_1=-q_1(x)Q_1^0;\ q_1(x)=X'''(x);\ Q_1^0=\frac{\alpha_1}{g}q_0R;\ Q_2=0,$$

– тангенциалдық жылжулар (8)

$$u_1(x,y)=0;\ u_2(x,y)=0;\ \omega_2(1)=1, \tag{14}$$

– мембраналық күштер (9)

$$N_1=0;\ N_2=-EhK_0W_0X(x);\ N_{21}=N_{12}=0. \tag{15}$$

Осылай, қабықшаның осьтік симметриялық деформация кезінде негізгі қатыстар едәуір жеңілдейді.

Айта кететініміз, ғылыми әдебиетте осьтік-симметриялық деформация кезінде цилиндрлік қабықшаның негізгі теңдеуі мына түрде келтірілген:

$$D\frac{d^4W}{dx_1^4}+\frac{Eh}{R^2}W=q(x_1)\rightarrow\frac{d^4W}{d\xi^4}+4W=\frac{q(\xi)}{\alpha^4D};$$

$$\xi=\alpha_0x_1;\ \alpha_0=\sqrt[4]{\frac{Eh}{4DR^2}}=\sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2h^2}}, \tag{16}$$

жалпы шешіммен

$$W(\xi)=C_1Y_1(\xi)+C_2Y_2(\xi)+C_3Y_3(\xi)+C_4Y_4(\xi)+\overline{W}(\xi), \tag{17}$$

мұндағы Y_1-Y_4 — акад. А.Н.Крыловтың фундаменталды функциялары; $\overline{W}(\xi)$ — теңдеудің дербес шешімі.

Осылай, егер де негізгі теңдеу жалпы шешімі (17) болып келетін болса, онда ұсынылып отырған әдіс бойынша берілген теңдеу мына түрде болады:

$$Dg\frac{d^4W}{dx_1^4}=q(x_1);\ g=1+\frac{12(1-\nu^2)}{K_\omega}K_K^2. \tag{18}$$

Бұл теңдеудің жалпы шешімі көпмүшелік ретінде болады.

Моментті теория бойынша цилиндрлік қабықшаны есептеудің нақты мысалы ретінде шетіне дейін сумен толтырылған цилиндрлік резервуарды қарастырайық. Осьтерінің бағыты суретте көрсетілген. Қабықшаның жоғарғы шеті $(x=1)$ бекіністен бос, ал төменгісі $(x=0)$ — бекітілген. Резервуардың өлшемдері: қабықша радиусы — R; құраушы бойымен алынған қабықша ұзындығы — ℓ_1; қабықша қалыңдығы — h. Резервуардағы судың меншікті салмағы γ белгілі деп есептейміз, біздің жағдайымызда $\ell_1=1,\ h=1$ және де $\gamma=1$ деп қарастырамыз.

Осы резервуарды тұйық дөңгелек цилиндрлік қабықша ретінде қарастырып, оны есептеу үшін (11)–(15) формулаларын қолдануға болады.

Қабықшаға әсер етіп тұрған беттік жүктеме (5) мынаған тең

$$q(x_1)=q_0P(x);\ q_0=\gamma\cdot\ell_1;\ P(x)=1-x. \tag{19}$$

Негізгі теңдеу (18) және шекаралық шарттарды қанағаттандыратын өлшемсіз иілім функциясы мына түрге ие:

$$X(x)=\frac{1}{120}(-x^5+5x^4-10x^3+10x^2). \tag{20}$$

Қабықшаның иілім параметрі (12) және ($K_K,\ g,\ K_\omega$) келесіге тең болады:

$$W_0=\frac{1}{g}\frac{\gamma\ell_1^5}{D};$$

$$K_K^2=\frac{\ell_1^4}{R^2h^2}=\alpha_1^4\frac{R^2}{h^2}; \tag{21}$$

$$g=1+\frac{12(1-\nu^2)}{K_\omega}K_K^2;$$

$$K_w=(1{,}875)^4;\ \ell_1=\alpha_1R,$$

мұндағы K_ω — қарапайым арыс арқалықтың еркін тербелісінің жиілік параметрі.

Ішкі күштер (13) келесі мәндер қабылдайды:

$$M_1^0=\frac{1}{g}\gamma\ell_1^3;$$

$$M_1=-\frac{1}{6}(-x^3+3x^2-3x+1)M_1^0;$$

$$Q_1^0 = \frac{1}{g}\gamma \ell_1^2;$$
$$Q_1 = -\frac{1}{2}(-x^2 + 2x - 1)Q_1^0; \tag{22}$$
$$N_2 = -E\left(\frac{h}{R}\right)X(x)W_0.$$

Алынған нәтижелерден (19)–(22) өрнектерінен шығатын қорытынды: ең үлкен момент пен көлденең күш $x = 0$ нүктесінде, ал N_2 айналмалы мембраналық күші $x = 1$ нүктесінде пайда болады.

Есепті шығарудың жалпы жағдайында (5)–(9) қатыстары қолданылады. Функциялар $f(x, y)$ мен $Pu(x, y)$ үшін шекаралық және жүктелу шарттарын қанағаттандыратын өрнекті қабылдаймыз:

$$f(x, y) = X(x)\sin ny,\ \ Pu(x, y) = P(x)\sin ny; \tag{23}$$
$$X^{IV}(x) = P(x),\ x = x_1 / L,\ y = x_2 / R,$$

мұндағы n — шеңбер бойындағы толық толқындар саны.

Негізгі функциялар (23) негізінде мына шамаларды табамыз:

– иілім параметрі (6)

$$W_0 = \frac{\alpha}{g}\frac{q_0 L^2 R^r}{D},\ \ g = 1 + \frac{12(1-\nu^2)}{K_\omega}K_K^2,\ \ K_K^2 = \frac{L^2}{h^2};$$
$$R_0 = \int_0^1 P(x)dx;$$
$$R = \int_0^1 \left[\frac{1}{m^2}P(x) - 2n^2 X''(x) + m^2 n^4 X(x)\right]dx; \tag{24}$$
$$m = \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{L}{R};$$
$$\alpha = \frac{R_0}{R},$$

– ішкі күштер компоненттері (13)

$$m_1(x, y) = \sin ny\left[\frac{1}{m^2}X''(x) - n^2 \nu X(x)\right];$$
$$M_1^0 = \frac{\alpha}{g}q_0 L^2;$$
$$M_1(x, y) = -m_1(x, y)M_1^0;$$
$$m_2(x, y) = \sin ny\left[-m^2 n^2 X(x) + \nu X''(x)\right];$$
$$M_2^0 = \frac{\alpha}{g}q_0 R^2;$$
$$M_2(x, y) = -m_2(x, y)M_2^0;$$
$$m_{12}(x, y) = (1-\nu)n\cos ny X'(x);$$
$$M_{12}^0 = \frac{\alpha}{g}q_0 L \cdot R; \tag{25}$$
$$M_{12}(x, y) = -m_{12}(x, y)M_{12}^0;$$

$$q_1(x,y)=\sin ny\left[\frac{1}{m^2}X'''(x)-n^2X'(x)\right];$$

$$Q_1^0=\frac{\alpha}{g}q_0L;$$

$$Q_1(x,y)=-q_1(x,y)Q_1^0;$$

$$q_2(x,y)=n\cos ny\left[-m^2n^2X(x)+X''(x)\right];$$

$$Q_2^0=\frac{\alpha}{g}q_0R;$$

$$Q_2(x,y)=-q_2(x,y)Q_2^0;$$

– тангенциалдық жылжулар (8)

$$u_1(x,y)=0;$$

$$V_{10}(y)=-\frac{1}{n}(\cos ny-1+2y);$$

$$u_2(x,y)=V_{10}(y)X(x)W_0, \quad (26)$$

– мембраналық күштер (9)

$$N_1=N_{21}=N_{12}=0;$$

$$N_2=-Eh\frac{W_0}{R}\frac{2}{n}X(x). \quad (27)$$

Иілім функциялары мен жүктемені (5) түрінде қабылдау цилиндрлік қабықшаның негізгі қатыстарын (5)–(9) едәуір ықшамдайды да, қабықшаны есептеуді арқалық сияқты есептеуге мүмкіндік береді. Егер топсалы бекітілген цилиндрлік қабықшаның құраушысы бойымен бірқалыпты таралған жүктемемен $P(x)=1$ әсер еткенде иілім функциясы мына түрге ие болады:

$$X(x)=\frac{1}{24}(x^4-2x^3+x).$$

Осының негізінде иілім параметрі (6) табылады:

$$\alpha=\frac{1}{\left[\frac{1}{m^2}+\frac{n^2}{6}+\frac{m^2n^4}{120}\right]},\quad m^2=\frac{L^2}{R^2}.$$

Бұдан шеңбер бойымен толық толқындар саны артқанда иілім параметрі кемитіні көрінеді, яғни толқындар саны аз болғандағы жағдайға қарағанда қабықша осы кезде көп қарсыласады.

Басқа жүктемелер мен шекаралық шарттар кезінде есептеулерді жоғарыда келтірген әдіс бойынша жүргізуге болады.

References

1. *Tursunov K.A.* Mechanics of arches and covers. — Karaganda: KarSU Publ., 2010. — 200 p.
2. *Darkov A.V. et al.* The building mechanics. — M.: The higher school, 1976. — 600 p.
3. *Kiselev V.A.* The building mechanics. — M.: Building Publ. House, 1980 — 616 p.
4. *Timoshenko S.P.* Durability and fluctuations of elements of constructions. — M.: Science, 1975. — 704 p.