

Н.К.Аширбаев

Южно-Казахстанский государственный университет им. М.Ауезова, Шымкент (ank_56@mail.ru)

Численное исследование влияния разрыва в граничных условиях на волновое поле в прямоугольнике

Работа посвящена обобщению разностного метода пространственных характеристик на случай плоской задачи о распространении волн в прямоугольной области конечных размеров с разрывами в граничных условиях. На основе разработанной в работе численной методики получены расчетные конечно-разностные соотношения динамических задач в особых точках лицевой границы прямоугольной области, где граничные условия по координате не являются непрерывными. Они терпят разрыв первого рода в точках, в которых начинается действие П-образной динамической нагрузки. Результаты исследования доведены до численного решения.

Ключевые слова: нестационарное поле, динамические задачи, система гиперболических уравнений, действительные скорости распространения волн.

Актуальность изучения нестационарного поля напряжений в упругих телах с неоднородностями обусловлена как внутренними потребностями развития механики деформируемого твердого тела, так и многочисленными приложениями в различных отраслях современной техники. Следует подчеркнуть исключительную сложность влияния неоднородности на динамические процессы в деформируемых средах и ее количественного описания, особенно если среда имеет конечные размеры. Эта сложность обусловлена тем, что при распространении волн напряжений в средах ограниченных размеров они испытывают многократные отражения от граничных поверхностей тела, в результате образуется сложное дифракционное поле, аналитическое описание которого становится практически невозможным.

Решение краевых задач для таких областей, как правило, требует и разработки эффективных нестандартных или модифицированных численных алгоритмов. А в связи с бурным ростом современных вычислительных средств и современных информационных технологий существует также потребность в их использовании для решения указанного рода задач и получения работающих программ для персональных компьютеров, позволяющих рассчитывать то или иное состояние объектов в конкретных задачах практической направленности [1–4].

Математическая постановка задачи. Исследуется плоская деформация упругого тела с прямоугольным поперечным сечением. Сечение имеет размеры $0 \leq x_1 \leq l$, $-L \leq x_2 \leq L$ (рис. 1). Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ тело находится в состоянии покоя:

$$v_1(x_1; x_2; 0) = v_2(x_1; x_2; 0) = p(x_1; x_2; 0) = q(x_1; x_2; 0) = \tau(x_1; x_2; 0) = 0. \quad (1)$$

Кроме того, для рассматриваемой ограниченной области формулируются граничные условия. В моменты времени $0 \leq t \leq t^*$ на некоторой лицевой части $x_1 = 0$, $L^* \leq x_2 \leq L^{**}$ прямоугольной области прикладывается внешняя П-образная динамическая нагрузка:

$$p + q = \begin{cases} A \cdot \sin \omega t & \text{при } 0 \leq t \leq t^*, \\ 0 & \text{при } t \geq t^*, \end{cases} \quad (2)$$

$$\tau = 0 \quad \text{при } t \geq 0,$$

а затем при $t \geq t^*$ нагрузка на этом участке лицевой границы $x_1 = 0$ полностью снимается. Остальная часть лицевой границы $x_1 = 0$ свободна от внешних нагрузок. В (2) принято, что A — амплитуда внешней нагрузки, а ω — ее частота.

Граница $x_1 = l$ прямоугольной области свободна от напряжений, т.е.

$$p + q = 0, \quad \tau = 0 \quad \text{при } t \geq 0. \quad (3)$$

Границы $x_2 = \pm L$ прямоугольной области предполагаются закрепленными, и на них скорости перемещений равны нулю в любой момент времени, т.е.

$$v_1(x_1; t) = v_2(x_1; t) = 0 \text{ при } t \geq 0. \quad (4)$$

Задача заключается в определении внутри прямоугольной области полей напряжений и скоростей, вызванных фронтами падающих и многократно дифрагированных упругих волн в момент времени $t > 0$.

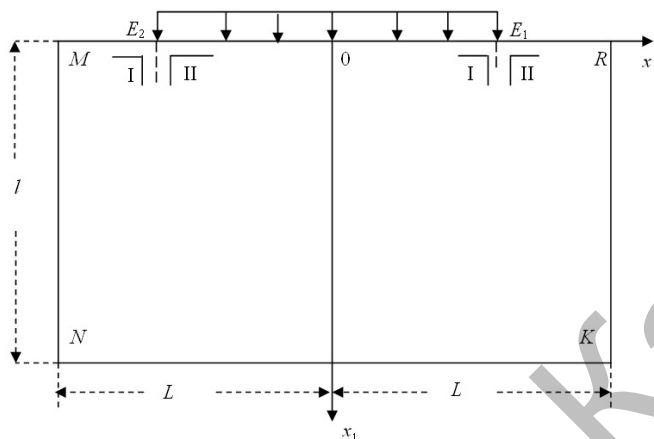


Рисунок 1. Исследуемая область

Уравнения, определяющие динамические деформации в плоской задаче, составляют систему гиперболических уравнений в частных производных с двумя действительными скоростями (c_1, c_2) распространения волн. Поэтому, следуя работе [5], введены безразмерные независимые переменные и искомые величины:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \frac{t \cdot c_1}{b}; \quad \bar{x}_i = \frac{x_i}{b}; \quad v_i = \frac{1}{c_1} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (i=1, 2); \\ p &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2\rho c_1^2}; \quad q = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2\rho c_1^2}; \\ \tau &= \frac{\sigma_{12}}{\rho c_1^2}; \quad \gamma = \frac{c_1}{c_2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где b — характерная длина. В дальнейшем черта над безразмерными параметрами опускается. При этом динамическая задача теории упругости записывается в виде симметричной системы дифференциальных уравнений первого порядка для напряжений ρ, q, τ и скоростей перемещений v_1, v_2 [5]:

$$\begin{aligned} v_{1,t} - p_{,1} - q_{,1} - \tau_{,2} &= 0; \quad v_{2,t} - p_{,2} + q_{,2} - \tau_{,1} = 0; \\ \gamma^2(\gamma^2 - 1)^{-1} \cdot p_{,t} - v_{1,1} - v_{2,2} &= 0; \quad \gamma^2 \cdot q_{,t} - v_{1,1} + v_{2,2} = 0; \\ \gamma^2 \tau_{,t} - v_{1,2} - v_{2,1} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Поставленная задача решена методом пространственных характеристик, подробный алгоритм численной реализации которого изложен в [5]. Особенностью рассмотренного тела является то, что в особых точках E_1, E_2 границы $x_1 = 0$ исследуемого тела нарушается «привычная» для динамических задач гладкость функций, т.е. в этих точках искомые функции и их производные терпят разрыв первого рода. Именно на такие особенности не был распространен метод количественного решения (или вообще, как нам известно, данного метода не было). В дополнение к известным соотношениям [5] получены расчетные соотношения в особых точках E_1, E_2 границы $x_1 = 0$ для нахождения искомых функций, в которых граничные условия терпят разрыв первого рода [4].

Необходимым и достаточным условием устойчивости явной конечно-разностной расчетной схемы является следующее ограничение на размеры шагов [5]:

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2 \leq \min\left\{\frac{\gamma^2}{\gamma^2+1}, \frac{\gamma^2}{2(\gamma^2-1)}\right\},$$

где k — шаг по времени, h — шаг по координатам.

На базе разработанного численного алгоритма создана единая программа расчетов на языке Фортран для быстродействующих персональных компьютеров и реализована для стали ($\nu = 0,3$, $\rho = 7,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $c_1 = 5817 \text{ м/сек}$, $c_2 = 3109 \text{ м/сек}$, $\gamma = 1,87$) при следующих значениях исходных данных: $0 \leq x_1 \leq 100h$, $|x_2| \leq 100h$, $A = 1$, $\omega = \frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{100k}$, $k = 0,025$, $h = h_1 = h_2 = 0,05$. Область приложенной нагрузки принята следующая: $x_1 = 0$, $-50h \leq x_2 \leq 50h$.

Симметричность приложенной нагрузки и характер деформирования исследуемого тела позволяют ограничиться анализом динамических явлений в области только положительных значений переменной $x_2 \geq 0$. На рисунке 2 представлена осциллограмма энергии деформации U в пяти точках наблюдения $x_2 = 0(1)$, $x_2 = 20h(2)$, $x_2 = 40h(3)$, $x_2 = 60h(4)$, $x_2 = 80h(5)$, расположенных на лицевой поверхности $x_1 = 0$ исследуемого тела. Нетрудно видеть что точки наблюдения 1,2,3, лежащие на границе $x_1 = 0$, в течение всего времени действия внешней нагрузки ($0 \leq t \leq T$) воспринимают действующую нагрузку, а остальные две точки наблюдения 4,5 находятся за область приложенной нагрузки. Указанное обстоятельство определяет, что энергия деформации U на первых 100 шагах по времени имеет синусоидальную форму распределения, подобную заданной нагрузке (2), в точках наблюдения, находящихся в пределах действующей нагрузки. А также точки наблюдения $x_2 = 20h$ и $x_2 = 80h$, $x_2 = 40h$ и $x_2 = 60h$ на поверхности $x_1 = 0$ находятся на расстояниях, равноудаленных от особой граничной точки $E_1(x_1 = 0, x_2 = 50h)$. Поэтому дифрагированные от особой точки E_1 волны через одинаковое время достигают указанные точки наблюдения.

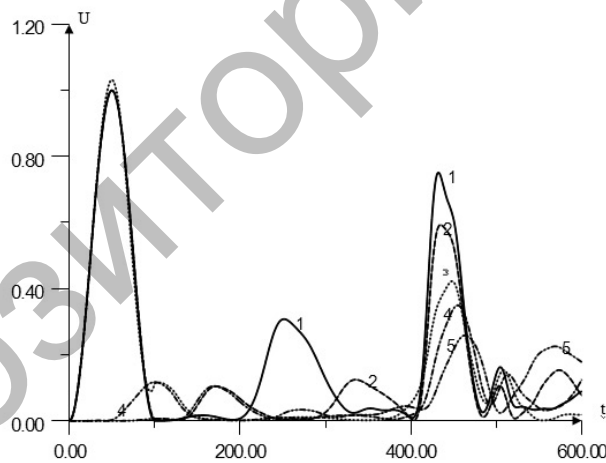


Рисунок 2. Осциллограмма энергии деформации U на лицевой стороне $x_1 = 0$ прямоугольной области в пяти точках наблюдения

Этот вывод хорошо просматривается при исследовании результатов расчетов, представленных на рисунке 2. Следует обратить внимание на пик осциллограммы энергии деформации U в точке $x_2 = 0(1)$ в момент времени $t = 260k$, который является результатом интерференции дифрагированных волн, исходящих из особых граничных точек E_2 и E_1 . В моменты времени $t \geq 400k$ отраженная от тыльной поверхности $x_1 = 100h$ большой интенсивности волна достигает лицевой поверхности $x_1 = 0$. Оценить влияние отдельных типов волн в указанные моменты времени в этом случае становится практически невозможным.

Анализ динамических процессов на свободной тыльной поверхности $x_1 = 100h$ труден. Вместе с тем, вновь можно видеть, что в моменты времени $t \geq 200k$ во все наблюдаемые точки поверхности $x_1 = 100h$ приходит динамическое возмущение. Форма возмущения энергии деформации U не отличается от заданного на поверхности $x_1 = 0$ гармонического импульса (рис. 3). Однако их максимальные значения убывают, и в точке $x_2 = 80h$ они минимальны. Для точек ($x_2 = 60h$ и $x_2 = 80h$), расположенных вне действия нагрузки, можно уверенно выделить участки времени ($t \geq 350k$ и $t \geq 480k$), при которых наблюдается действие дифрагированных от угловых точек R и K волн.

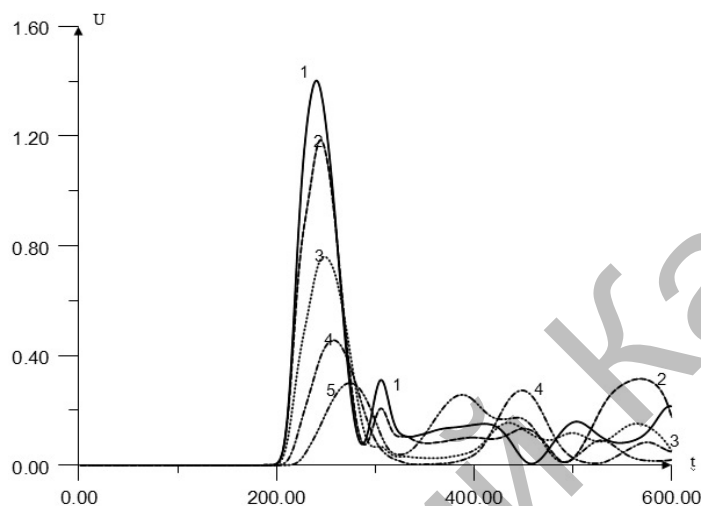


Рисунок 3. Оциллограмма энергии деформации U на тыльной стороне $x_1 = 100h$ прямоугольной области в пяти точках наблюдения

Таким образом, получены расчетные соотношения динамических задач для нахождения искомых параметров в особых точках границы тела, где первые и вторые производные искомых функций терпят разрыв первого рода. Путем численной реализации установлена устойчивость расчетных алгоритмов для достаточно большого времени. Результаты исследования в окончательном виде доведены до численного решения.

References

- 1 Erzhanov Zh.S., Karimbayev T.D., Bayteliyev T.B. Waves of tension in homogeneous and non-uniform environments. — Almaty: Gylym, 1998. — 142 p.
- 2 Ashirbayev N.K., Bayteliyev T.B., Karimbayev T.D. Analytical research of influence of foreign particulates on parameters of wave movement in an elastic rectangle // News of Academy of Sciences of the USSR. MTT. — 1987. — № 4. — P. 128–133.
- 3 Ashirbayev N.K., Bayteliyev T.B., Karimbayev T.D. A wave field in a rectangular plate with a noncentral opening // Applied mechanics. — Kiev, 1990. — T. 26. — № 5. — P. 76–81.
- 4 Ashirbayev N.K. Influence of a noncontinuousness on parameters of wave fields // Vestnik KarGU. It is gray. Mathematics. — 2009. — № 2 (54). — P. 89–92.
- 5 Clifton R.Dzh. The difference method in flat problems of dynamic elasticity // Mechanics. — 1968. — № 1. — P. 103–122.

Н.К.Әшірбаев

Шекаралық шарттағы үзілістің тік төртбұрыштағы толқындық өріске әсерін сандық зерттеу

Мақалада толқындардың жазық тік бұрышты ақырлы өлшемді үзілісті шекаралық шарттармен берілген облысында таралуын зерттеу барысында кеністіктік сипаттамалар әдісі жетілдіріліп, жалпыланды. Жетілдірілген сандық әдіс негізінде шекаралық шарттары координат бойынша үзілісті болатын дененің бет жағының ерекше түйісу нүктелерінде ақырлы-айырымды есептеу қатынастары алынды. Әсер етуші Π -пішінді динамикалық күштің шеткі нүктелері бірінші текті үзілісті нүктелер болып табылады. Зерттеу нәтижелері сандық есептеулерге дейін жеткізілді.

N.K.Ashirbayev

Numerical research of influence of rupture in boundary conditions on the wave field in the rectangle

Work is devoted to the generalization of difference method of spatial characteristics on a case of a flat problem about distribution of waves to rectangular area of the final sizes with ruptures in boundary conditions. Settlement certainly — difference parities of dynamic problems in special points of obverse border of rectangular area where boundary conditions on coordinate aren't continuous are received on the basis of the numerical technique developed in work. They suffer rupture of the first sort in points in which action Π — figurative dynamic loading begins. Results of research are finished to the numerical decision.

УДК 624.04

А.К.Бейсебаев, Р.Ш.Тельгузинова, Т.В.Заикина

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: radianc729@mail.ru)

Синтез вантово-балочной комбинированной конструкции

Предлагается порядок расчета оптимальной с точки зрения материалоемкости комбинированной конструкции. Проектные параметры определены на основе решения задачи оптимизации. В результате применения упругих элементов и рациональных значений геометрических параметров балка, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой, получилась почти равномоментной. Показано, что в случае разгрузки усилия в балке жесткости уменьшаются.

Ключевые слова: материалоемкость, комбинированная конструкция, задачи оптимизации, вантово-балочная конструкция, оптимальное проектирование.

Повышение несущей способности многопролетной неразрезной балки в упругой области возможно за счет поперечного смещения промежуточных опор, что не сложно осуществить в период ее строительства [1, 2]. Однако этот способ имеет ограниченную область применения вследствие того, что полученные преднапряжения в балке, возникающие за счет осадки некоторых опор, могут вызвать такие усилия, которые для незагруженной балки будут превышать предельно допустимые. Техническое решение этой проблемы авторы попытались осуществить путем введения упругих промежуточных опор, выполненных в виде наклонных вант (рис. 1, а). Реализация задачи рационального проектирования предварительно напряженной вантово-балочной комбинированной конструкции оказалась комплексной, и поэтому разбита на два этапа.

1. Вначале проектируется несущая неразрезная многопролетная балка жёсткости, в которой от действия внешней нагрузки из условия квазиравномоментности (почти равномоментности) определяются:

- положения точек подвеса вант и усилия в них;
- соответствующая эпюра изгибающих моментов и сечение балки;
- поперечные смещения конструкции в точках её подвеса.