$N \to \infty$, справедлива оценка:

$$u(t) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 \Gamma(\alpha))^n D_{\infty t}^{-n\alpha} a(t), \tag{3}$$

если ряд сходится. Доказательство основано на итерационном применении (2).

В качестве важного следствия, если $a(t) = Ce^{-\delta_a t}$ $(C \geq 0, \delta_a > 0)$ и $\lambda_0 \Gamma(\alpha) < \delta_a^{\alpha}$, то

$$u(t) \leq \frac{Ce^{-\delta_a t}}{1 - \frac{\lambda_0 \Gamma(\alpha)}{\delta_a^{\alpha}}}. \tag{4}$$

Эта оценка получается подстановкой $D_{\infty t}^{-n\alpha}(Ce^{-\delta_a t}) = Ce^{-\delta_a t}/\delta_a^{n\alpha}$ в (3) и суммированием геометрической прогрессии.

Полученные неравенства (3) и (4) являются новыми для правосторонних дробных операторов и могут быть использованы для анализа асимптотики решений дробных дифференциальных уравнений, например, для установления скорости их убывания на бесконечности (3; 2).

Список литературы

[1] Gronwall T.H. Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations // Annals of Mathematics. 1919. Vol. 20, No. 2. P. 292–296.

[2] Ye H., Gao J., Ding Y. A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007. Vol. 328, No. 2. P. 1075–1081.

[3] Podlubny I. *Fractional Differential Equations.* Academic Press, 1999.

[4] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Elsevier, Amsterdam, 2006.

РАЗРЕШИМОСТЬ ИНВОЛЮТИВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Сарсенби Абдижахан[1], **Сарсенби Абдисалам**[2]

[1]Южно Казахстанский университет имени М.Ауэзова, Шымкент, Казахстан

[1]E-mail: abzhahan@gmail.com

[2]Университет Дружбы народов имени академика А.Куатбекова, Шымкент, Казахстан

[2]E-mail: abdisalam.sarsenbi@gmail.com

В вещественном гильбертовом пространстве H с нормой $\|.\|$ рассматривается следующая задача

$$-y''(x) + \alpha y''(-x) + \gamma^2 y(x) + f(x, y(x), y(-x)) = h(x), \ -1 < x < 1, \tag{1}$$

$$y\left(-1\right)=0,\ y\left(1\right)=0 \tag{2}$$

Здесь $y\left(x\right)$ есть неизвестная функция на $[-1,1]$, с значениями в гильбертовом пространстве H, $h\left(x\right):\left(-1,1\right)\to H$, $f\left(x,y,z\right):\left(-1,1\right)\times H\times H\to H$, $\gamma>0$, $-1<\alpha<1$. Производная $y''(x)$ понимается в смысле предела нормы в пространстве H. Для $y,z\in H$ через (y,z) обозначим скалярное произведение в H.

Ряд работ посвящены разрешимости двухточечных краевых задач для инволютивных дифференциальных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве. Например, в работе (1) исследована задача вида

$$-y''(x)+\alpha y'\left(x\right)+f\left(x,y\left(x\right),y\left(-x\right)\right)=h\left(x\right),\ -1<x<1,$$

$$y\left(-1\right)=0,\ y\left(1\right)=0.$$

Изучению задач вида

$$-y''(x)+\alpha^2 y\left(x\right)+f\left(x,y\left(x\right),y\left(-x\right)\right)=h\left(x\right),\ -1<x<1,$$

$$y\left(-1\right)=\ y\left(1\right),\ y'\left(-1\right)=\ y'\left(1\right),$$

посвящена работа (2). Если $H=R$, то скалярная задача для уравнения

$$-y''(x)+\alpha y''\left(-x\right)+\gamma^2 y\left(x\right)=0$$

имеет функцию Грина. Мы строим функцию Грина и с помощью теоремы Лере – Шаудера доказываем теорему о разрешимости задачи.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

1) $f\left(x,y,z\right):\left(-1,1\right)\times H\times H\to H$ вполне непрерывное отображение.

2) Существуют вещественные числа $a,b,\ a+|b|<\gamma^2$ такие, что $\left(f\left(x,y,z\right),y\right)\geq -a\|y\|^2-b\left\|y\right\|\left\|z\right\|$ для всех $\left(x,y,z\right)\in\left(-1,1\right)\times H\times H$.

Тогда краевая задача (1),(2) имеет хотя бы одно решение для любого $h\left(x\right)\in L_1\left(\left(-1,1\right),H\right)$.

В случае $H=R$ теоремы о разрешимости доказаны в работе (3).

Funding: Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МНиВО РК (грант AP19674587).

Список литературы

[1] Chaitan Gupta, Boundary value problems for differential equations in Hilbert spaces involving reflection of the argument, J. Math. Anal. Appl., 128, (1987), 375 – 388.

[2] Boris Rudolf, Periodic boundary value problem in Hilbert space for differential equation of second order with reflection of the argument, Matem. Slovaca 6 42, (1992), No. 1, 65 – 84.

[3] Abdissalam Sarsenbi, Abdizhahan Sarsenbi. Boundary value problems for a second-order differential equation with involution in the second derivative and their solvability[J]. AIMS Mathematics, 2023, 8(11): 26275-26289. doi: 10.3934/math.20231340