ее потери связаны с нерациональным путевым развитием и простаиванием электровозов перед однопутевыми участками, с плохой организацией локомотивной откатки.

Обобщая сказанное выше, можно отметить, что в ожидаемой перспективе на шахтах Карагандинского бассейна основные резервы снижения трудоемкости подземного транспорта все-таки заключены в совершенствовании технологии и организации его работы, в первую очередь локомотивной откатки.

References

1. *Labeker L.G., Babeshko L.O.* The queuing theory in economic sphere: the Manual. — M.: Banks and stock exchanges, UNITI, 1998. — 319 p.
2. *Novikov O.A., Petukhov S.I.* Cocks of SI. Applied questions of the queuing theory. — M.: Soviet radio, 1969. — 400 p.
3. *Saati T.L.* Element of the queueing theory and its applications. — M.: Soviet radio, 1965. — 511 p.
4. *Chetyrkin E.M.* The queueing theory and its application in economy. — M.: Statistics, 1971. — 104 p.
5. *Aldokhin L.P.* The queueing theory in the industry. — M.: Economy, 1970. — 207 p.
6. *Ivchenko G.I., Kashtanov V.A., Kovalenko I.N.* The queuing theory. — M.: Higher school, 1982. — 256 p.
7. *Lukin A.I.* Queueing systems. — M.: Military publishing house, 1980. — 189 p.
8. *Gnedenko B.V., Kovalenko I.N.* Introduction in the queuing theory. — M.: Science. The main edition of the physical and mathematical literature, 1966. — 432 p.
9. *Astashkin N.V.* Application of probabilistic queuing systems in mining. — M.: Bowels, 1971. — 160 p.
10. *Shulga J.N., Suslov O. P., Anokhin B.C.* Application of methods of the queuing theory at research of processes of extraction and coal transportation. — M.: Bowels, 1971. — 160 p.
11. *Kosmambetova R.I., Fedorova E.M.* Perfection of industrial structure of collieries. — Alma-Ata: Science of KazSSR, 1976. — 192 p.
12. *Karenov R.S.* Modeling and forecasting of efficiency of mountain manufacture in market conditions. — Karaganda: IPZ "Professional formation", 2006. — 280 p.
13. *Karenov R.S.* Formation of the market of a mineralno-source of raw materials of Kazakhstan. — Karaganda: IPZ "Professional formation", 2008. — 276 p.
14. *Karenov R.S.* Priorities of strategy of industrially-innovative development and mining the industries of Kazakhstan. — Astana: Publishing house KazUeFmT, 2010. — 539 p.

УДК 517.5

Восстановление решения уравнения Пуассона на классе Коробова

Restoration of solution of Poisson's equation on Korobov's class

Кудайбергенов С.С., Сабитова С.Г.

Южно-Казахстанский государственный университет им. М.Ауезова, Шымкент (E-mail: svetamath88@mail.ru)

Пуассон теңдеуінің қатар түрінде берілген шешімінің қалыпқа келтіруі мәселесі қарастырылған. Теңдеудің оң жағы Коробов класына жатқан жағдайда қалыпқа келтірудің қателігінің дәрежелік шкалада нақты бағалануы алынған. Осындай есепті Е.Баилов пен Н.Темірғалиев қарастырған. Қалыпқа келтіру операторын құру үшін Шерниязовтың әдісі және Смоляктың түйіндері қолданылды. Алынған нәтиже Е.Баилов пен Н.Темірғалиевтің нәтижесімен сәйкес келеді, бірақ ұсынылған оператор қарапайым және ЭЕМ-де есептеу үшін ыңғайлы болып табылады.

The problem of restoration of solution of Poisson's equation represented as a series is considered. In case of the right part of equation belongs to Korobov's class the exact in power-mode scale estimation of inaccuracy of the restoration is received. For creating the operator of restoration the method of Sherniyazov and points of Smolyak are used. Received result coincides with result of E.Bailov, N.Temirgaliev but offered operator distinguishes oneself by simplicity and it is suitable for calculations on computer.

Постановка задачи и формулировка основных результатов

Сформулируем общую постановку задачи восстановления.

Пусть даны два нормированных пространства X и Y числовых функций, определённых соответственно на множествах Ω и Ω_1. Пусть $F \subset X$ и $Tf = u(y; f)$ есть отображение F в Y.

Для каждого N через $\left\{\left(l^{(N)};\varphi_N\right)\right\}$ обозначим множество всевозможных пар $\left(l^{(N)};\varphi_N\right)$, где $l^{(N)}=\left(l_1,...,l_N\right)$ есть набор функционалов $l_j:F\to C\left(j=1,...,N\right)$, $\varphi_N\equiv\varphi_N\left(\tau_1,...,\tau_N;y\right)$ — измеримая функция, действующая из $C^N\times\Omega_1$ в C (C — поле комплексных чисел, $C^N=C\times...\times C$).

Положим для $\left(l^{(N)};\varphi_N\right)\in\left\{\left(l^{(N)};\varphi_N\right)\right\}$

$$\delta_N\left(\left(l^{(N)};\varphi_N\right),T,F\right)_Y=\sup_{f\in F}\left\|u\left(y;f\right)-\varphi_N\left(l_1\left(f\right),...,l_N\left(f\right);y\right)\right\|_Y \tag{1}$$

и для некоторого $D_N\subset\left\{\left(l^{(N)};\varphi_N\right)\right\}$

$$\delta_N\left(D_N,T,F\right)_Y=\inf_{\left(l^{(N)};\varphi_N\right)\in D_N}\delta_N\left(\left(l^{(N)};\varphi_N\right),T,F\right)_Y. \tag{2}$$

Задача восстановления $u\left(y;f\right)$ заключается в получении оценок сверху и оценок снизу для величины (2) (желательно совпадающих с точностью для констант) и в указании пары $\left(l^{(N)};\varphi_N\right)$ из D_N, реализующей оценку сверху.

Конкретизируя в (1), (2) операторы T, множества D_N, пространства X и Y и классы F $\left(F\subset X\right)$, получаем различные постановки задач.

Одной из самых распространённых конкретизаций множества D_N является случай, когда в качестве функционалов $l^{(N)}=l^{(N)}\left(f\right)=\left(l_1\left(f\right),...,l_N\left(f\right)\right)$ берутся значения функции f в узлах сетки $\left\{\xi\right\}_{j=1}^N$, т.е. $l_j(f)=f\left(\xi_j\right)$ $\left(j=1,...,N\right)$. В данной работе мы будем рассматривать именно эту конкретизацию D_N и в (2) вместо $\delta_N\left(D_N,T,F\right)_Y$ будем писать $\delta_N\left(T,F\right)_Y$.

При $X=Y$ и $Tf=f$ задача (1), (2) есть задача восстановления функций из класса F. Другой её конкретизацией является задача восстановления решений уравнения в частных производных, когда $Tf=u(y,f)$ есть решение уравнения с краевыми и начальными условиями или правой частью $f\left(x\right)$.

Задача восстановления решений уравнения теплопроводности изучена Хуа Ло Кеном, Вань Юанем [1] и К.Е.Шерниязовым [2]. Н.С.Бахваловым [3] также рассмотрено численное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа методом конечных разностей с применением равномерных и неравномерных сеток.

Задача восстановления решений уравнения Пуассона по значениям в точках правой части f для классов Соболева W_2^r и классов Никольского-Бесова $B_{q,\theta}^r$ была рассмотрена в работах авторов [4–5].

Сначала дадим некоторые определения.

Уравнение Пуассона — эллиптическое дифференциальное уравнение в частных производных, имеющее вид

$$\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}+...+\frac{\partial^2u}{\partial x_s^2}=f. \tag{3}$$

Если $\hat f\left(0\right)\neq0$, то при любом краевом условии существует непрерывная на $\left[0,1\right]^s$ функция $w\left(x\right)$ такая, что $\Delta w\equiv1$ на $\left[0,1\right]^s$, зависящая от краевого условия, и решение уравнения (3) имеет вид:

$$u_w\left(x,f\right)=w\left(x\right)\cdot\hat f\left(0\right)-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m\in Z^s}\frac{*\hat f\left(m\right)}{\left(m,m\right)}e^{2\pi i\left(m,x\right)}, \tag{4}$$

где Z^s — целочисленная решетка s-мерного пространства $R^s=R\times...\times R$ (звёздочка в знаке суммы означает, что $m=(0,...,0)$ в суммировании не участвует).

Если же $f\left(x_1,...,x_s\right)$ нечетна по каждой из переменных $x_1,...,x_s$, то функция

$$u\left(x,f\right)=-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m\in Z^s}\frac{*\hat f\left(m\right)}{\left(m,m\right)}e^{2\pi i\left(m,x\right)}$$

является решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона, удовлетворяющим на $[0,1]^s$ нулевым граничным условиям [6].

Обратно, как легко проверить, всякая функция вида (4) удовлетворяет уравнению (3) на $\left[0,1\right]^s$.

Определение 1. Классом Коробова $E_s^r, r>1$ называется множество всех 1-периодических по каждой из переменных функций $f(x)=f(x_1,...,x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье

$$\hat{f}(m)=\int\limits_{[0,1]^s} f(x)e^{-2\pi i(m,x)}dx,$$

которые удовлетворяют условию $\left|\hat{f}(m)\right|\le\left(\overline{\overline{m}}\right)^{-r}$. Здесь $m=(m_1,...,m_s)$, $\overline{m_j}=\max\left\{1,\left|m_j\right|\right\}$, $\overline{\overline{m}}=\overline{m_1},...,\overline{m_s}, r>1$.

Всюду через $c(...)$ будем обозначать некоторые положительные величины, разные, вообще говоря, в различных формулах, зависящие лишь от указанных в скобках параметров. При положительном A и любом B запись $B \underset{\alpha,\beta,...}{<<} A$ означает, что $|B|\le c(\alpha,\beta,...)A.$ При положительных A и B запись $A \underset{\alpha,\beta,...}{\succ\prec} B$ означает, что $A \underset{\alpha,\beta,...}{<<} B \underset{\alpha,\beta,...}{<<} A.$

Н.М.Коробов доказал [6], что если $a_1,...,a_s$ есть оптимальные коэффициенты по модулю $p=N$ и β — их индекс, то для решения

$$u(x,f)=-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m\in Z^s}\frac{*\hat{f}(m)}{(m,m)}e^{2\pi i(m,x)}$$

и сетки

$$\xi^{(n)}(a)=\left(\left\{\frac{n}{p}a_1\right\},...,\left\{\frac{n}{p}a_s\right\}\right)\quad (n=1,...,p) \tag{5}$$

справедлива оценка $\left(N_1=\left[\sqrt{N}\ln^{-\frac{\beta}{2}}N\right]\right)$

$$\sup_{f\in E_s^r}\sup_{x\in[0,1]^s}\left|u(x,f)-\frac{1}{4\pi^2 N}\sum_{n=1}^{N}f\left(\xi^{(n)}(a)\right)\cdot\sum_{m\in\Gamma_{N_1}}\frac{{}^*1}{(m,m)}e^{2\pi i\left(m,x-\xi^{(n)}(a)\right)}\right|<<\frac{(\ln N)^{\frac{r\beta}{2}+s}}{N^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{s}}}.$$

Затем Е.А.Баилов, Н.Темиргалиев [7], используя в качестве сетки $\{\xi\}_{j=1}^N$ сетку Шерниязова и оператор восстановления

$$(Jf)(x)=\sum_{\substack{\tau\in Z_+^s\\ \|\tau\|<n}}\frac{1}{\det A_{n,\tau}}\sum_{k\in K(n,\tau)}f\left(k\left(A_{n,\tau}^{-1}\right)'\right)\left(w(x)-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m\in\rho(\tau)}\frac{{}^*e^{2\pi i\left(m,x-k\left(A_{n,\tau}^{-1}\right)'\right)}}{(m,m)}\right),$$

получили следующий результат.

Теорема 1. Пусть даны числа $s(s=2,3...), r>1$ и $2\le q\le\infty.$ Тогда справедливы соотношения при $1-\frac{1}{p}-\frac{2}{s}>0$

$$\delta_N\left(u_w,E_s^r\right)_{L^p(0,1)^s}<<\frac{(\ln N)^{\left(r+\frac{2}{s}\right)(s-1)}}{N^{r-\left(1-\frac{1}{p}-\frac{2}{s}\right)}},$$

при $1-\dfrac{1}{p}-\dfrac{2}{s}\le 0$

$$\delta_N\left(u_w,E_s^r\right)_{L^p(0,1)^s} << \frac{\left(\ln N\right)^{r(\beta+s)+s}}{N^r}.$$

Таким образом, оценка Коробова была улучшена почти в «квадрат раз» и доведена до окончательной в степенной шкале.

Мы рассмотрели данную задачу в случае

$\Omega=\Omega_1=\left[0,1\right]^s, X=Y=L^p\left(0,1\right)^s,\ 2\le p<\infty,\ F=E_s^r,\ 1\text{-}\dfrac{1}{\mathrm{p}}-\dfrac{2}{s}>0,$ используя в качестве сетки $\left\{\xi\right\}_{j=1}^N$ сетку Смоляка [8] и оператор восстановления:

$$(Jf)(x)=w(x)\sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in\Omega_{\left(\nu^{(0)},q\right)}\subset Z^s_{\nu(0)}}\frac{1}{2^{\nu_1+\dots+\nu_s}}\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1}\cdots\sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1}\left(-1\right)^{\sum_{j=1}^{s}\left(k_j-1\right)\mathrm{sgn}\left(\nu_j-\nu_j^{(0)}\right)}f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\dots,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)-$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n\in V_q}\frac{*1}{(n,n)}e^{2\pi i(n,x)}\sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in\Omega_{\left(\nu^{(n)},q\right)}\in Z^s_{\nu(n)}}\frac{1}{2^{\nu_1+\dots+\nu_s}}\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1}\cdots\sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1}\left(-1\right)^{\sum_{j=1}^{s}\left(k_j-1\right)\mathrm{sgn}\left(\nu_j-\nu_j^{(n)}\right)}f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\dots,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)e^{-2\pi i\left(n,\frac{k}{2^{\nu}}\right)},$$

где $q>0$ и $V_q=\left\{\left(n_1,\dots,n_s\right):\ \left(n_1,\dots,n_s\right)\in Z^s,1\le n_1\cdot\ldots\cdot n_s<q\right\}$.

Число узлов в данном операторе равно $N\succ\prec 2^q\cdot q^{s-1}$.

Следует отметить, что в узлах данного оператора содержатся только рациональные числа, что дает дополнительное преимущество при вычислениях на ЭВМ.

Нами была получена

Теорема 2. Пусть даны числа $s(s=2,3,\dots)$, $r>1$ и $2\le p\le\infty$. При $1-\dfrac{1}{\mathrm{p}}-\dfrac{2}{s}>0$ справедливо соотношение

$$\delta_N\left(u_w,E_s^r\right)_{L^p(0,1)^s} << \frac{\left(\ln N\right)^{(s-1)\left(r+\frac{2}{s}\right)}}{N^r},$$

где $N><2^q-q^{z-1}$.

Как видно, полученная нами оценка совпадает с результатом Е.А.Баилова, Н.Темиргалиева.

Вспомогательные утверждения

Для заданного $n=\left(n_1,\dots,n_s\right)$ определим $\nu\left(n\right)$ из условий $\dfrac{1}{4}2^{\nu(n)}<\left|n\right|\le\dfrac{1}{2}2^{\nu(n)}$. При $n=0$ положим, по определению, $\nu\left(0\right)=0$.

Лемма 1 [9]. При данном $\nu^{(0)}=\left(\nu_1^{(0)},\dots,\nu_s^{(0)}\right)\in Z^s$, $\nu_j^{(0)}\ge 0$ $\left(j=1,\dots,s\right)$ имеет место равенство

$$\hat f\left(0\right)-\Lambda_{\Omega\left(\nu^{(0)},q\right)}\left(f\right)=\Delta_{\Omega\left(\nu^{(0)},q\right)}\left(f\right),$$

где $Z^s_{\nu^{(0)}}\equiv\left\{\left(\nu_1,\dots,\nu_s\right)\in Z^s:\nu_j\ge\nu_j^{(0)}\left(j=1,\dots,s\right)\right\},0\le\nu_1^{(0)}+\dots+\nu_s^{(0)}<q,$

$$\Omega\left(\nu^{(0)};q\right)\equiv\left\{\left(\nu_1,\dots,\nu_s\right)\in Z^s_{\nu_0}:\nu_1+\dots+\nu_s\le q\right\},$$

$$\Lambda_{\Omega\left(\nu^{(0)};q\right)}(f)=\sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in\Omega\left(\nu^{(0)};q\right)}\frac{1}{2^{\nu_1+\dots+\nu_s}}\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1}\cdots\sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1}\left(-1\right)^{\sum_{j=1}^{s}\left(k_j-1\right)\mathrm{sgn}\left(\nu_j-\nu_j^{(0)}\right)}f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\dots,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right),$$

$$\Delta_{\Omega\left(\nu^{(0)};q\right)}(f)=\sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in Z^s_{\nu_0}/\Omega\left(\nu^{(0)};q\right)}\left(-1\right)^{\sum_{j=1}^{s}\mathrm{sgn}\left(\nu_j-\nu_j^{(0)}\right)}\sum_{(t_1,\dots,t_s)\in Z^s}\hat f\left(\left(2t_1+\mathrm{sgn}\left(\nu_j-\nu_j^{(0)}\right)\right)\cdot 2^{\nu_1-1},\dots,\left(2t_s+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\mathrm{sgn}\left(\nu_s-\nu_s^{(0)}\right)\right)2^{\nu_s-1}\right).$$

Лемма 2 [9]. Для данного $n=(n_1,...,n_s)\in Z^s$ имеет место равенство

$$\hat f(n)-\Lambda_{n,q}(f)=\int\limits_{[0,1]^s} f(x)e^{-2\pi x(n,x)}dx-\Lambda_{n,q}(f)=\Delta_{n,q}(f),$$

где

$$\nu(n)=(\nu_1(n),...,\nu_s(n)),\nu_j(n)\in Z,\nu_j(n)\ge 0\,(j=1,...,s),$$

$$Z^s_{\nu^{(0)}}\equiv\left\{(\nu_1,...,\nu_s)\in Z^s:\nu_j\ge\nu_j^{(n)}\,(j=1,...,s)\right\},0\le\nu_1^{(n)}+...+\nu_s^{(n)}<q,$$

$$\Omega_{(\nu(n);q)}=\left\{(\nu_1,...,\nu_s)\in Z^s_{\nu(n)}:\nu_1+...+\nu_s<q\right\},$$

$$\Lambda_{n,q}(f)=\Lambda_{\Omega(\nu(n),q)}\left(f(\cdot)e^{-2\pi i(n,\cdot)}\right)$$

и

$$\Delta_{n,q}(f)\equiv\Delta_{\Omega(\nu(n);q)}\left(f(\cdot)e^{-2\pi i(n,\cdot)}\right).$$

Лемма 3 [9]. Пусть чётная по каждой из s переменных монотонная функция $D_s(y_1,...,y_s)$ удовлетворяет Δ_2 – условию, т.е. существует c>0 такое, что для всех $(y_1,...,y_s)\in R^s_+$ имеет место неравенство $g(2y_1,...,2y_s)\le cg(y_1,...,y_s)$.

Тогда равномерно по $n=(n_1,...,n_s)\in Z^s$ имеют место соотношения

$$D_s\left(n+\left(2t+\operatorname{sgn}(\nu-\nu(n))\right)2^{\nu-1}\right)\succ\prec D_s\left(\bar t\cdot 2^{\nu}\right).$$

Лемма 4 [9]. Если $l>\nu_1^{(0)}+...+\nu_s^{(0)}$, то $\sum\limits_{\substack{(\nu_1,...,\nu_s):\nu_1+...+\nu_s=l\\ \nu_j\ge\nu_j^{(0)}(j=1,...,s)}}1\succ\prec\left(l-\left(\nu_1^{(0)}+...+\nu_s^{(0)}\right)\right)^{s-1}$.

Лемма 5 [9]. Если $q>A$, то $\sum\limits_{l=q}^{\infty}\frac{(l-A)^{s-1}}{2^{lr}}\succ\prec\frac{(q-A)^{s-1}}{2^{qr}}$.

Лемма 6 [9]. Равномерно по всем q и $n=(n_1,...,n_s)\in Z^s$ таким, что $v_1(n)+...+v_s(n)<q$,

$$\log_2(\bar n_1\cdots\bar n_s)\underset{s}{\succ\prec}v_1(n)+...+v_s(n),$$

$$q-\left(v_1(n)+v_2(n)+...+v_s(n)\right)\underset{s}{\succ\prec}q-\log_2(\bar n_1\cdots\bar n_s).$$

Лемма 7 [9]. Для $n=(n_1,...,n_s)\in Z^s$, $t>0$ имеет место равенство $\sum\limits_{n_1\cdots n_s\le t}1<<t(1+\ln t)^{s-1}$.

Лемма 8 [6]. Пусть r>1, $n=(n_1,...,n_s)\in Z^s$, тогда $\sum\limits_{\substack{n_1\cdots n_s>t\\ n_j\ge 1(j=1,...,s)}}\frac{1}{(n_1\cdots n_s)^r}\le r\left(\frac{r}{r-1}\right)^s\frac{(1+\ln t)^{s-1}}{t^{r-1}}$.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим разность

$$u_w(x,f)-(Jf)(x)=w(x)\hat f(0)-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n\in Z^s}\frac{{}^*\hat f(n)}{(n,n)}e^{2\pi i(n,x)}-w(x)\sum_{(\nu_1,...,\nu_s)\in\Omega_{\left(\nu^{(0)},q\right)}\subset Z^s_{\nu(0)}}\frac{1}{2^{\nu_1+...+\nu_s}}\times$$

$$\times\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1}...\sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1}(-1)^{\sum\limits_{j=1}^{s}(k_j-1)\operatorname{sgn}\left(\nu_j-\nu_j^{(0)}\right)}f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},...,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)+\frac{1}{4\pi^2}\times$$

$$\times\sum_{n\in V_q}\frac{*1}{(n,n)}e^{2\pi i(n,x)}\sum_{(\nu_1,...,\nu_s)\in\Omega_{\left(\nu^{(n)},q\right)}\in Z^s_{\nu(n)}}\frac{1}{2^{\nu_1+...+\nu_s}}\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1}...\sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1}(-1)^{\sum\limits_{j=1}^{s}(k_j-1)\operatorname{sgn}\left(\nu_j-\nu_j^{(n)}\right)}f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},...,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)e^{-2\pi i\left(n,\frac{k}{2^{\nu}}\right)}=$$

$$=w(x)\cdot\left[\hat f(0)-\sum_{(\nu_1,...,\nu_s)\in\Omega_{\left(\nu^{(0)},q\right)}\in Z^s_{\nu(0)}}\frac{1}{2^{\nu_1+...+\nu_s}}\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1}...\sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1}(-1)^{\sum\limits_{j=1}^{s}(k_j-1)\operatorname{sgn}\left(\nu_j-\nu_j^{(0)}\right)}f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},...,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n\in V_q}\frac{*e^{2\pi i(n,x)}}{(n,n)}\left[\hat f(n)-\sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in\Omega_{\left(\nu^{(n)},q\right)}\in Z^s_{\nu(n)}}\frac{1}{2^{\nu_1+\dots+\nu_s}}\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1}\dots\sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1}(-1)^{\sum\limits_{j=1}^{s}(k_j-1)\operatorname{sgn}\left(\nu_j-\nu_j^{(n)}\right)} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\dots,\frac{k}{2^{\nu_s}}\right)e^{-2\pi i\left(n,\frac{k}{2^{\nu}}\right)}\right]-$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n\in Z^s/V_q}\frac{*\hat f(n)}{(n,n)}e^{2\pi i(n,x)}=J_1+J_2+J_3. \qquad (6)$$

Далее, применяя последовательно леммы 1 и 2, получим следующие равенства для J_1 и J_2 соответственно:

$$J_1=w(x)\cdot\sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in Z^s_{\nu_0}/\Omega_{\left(\nu^{(0)},q\right)}}(-1)^{\sum\limits_{j=1}^{s}\operatorname{sgn}\left(\nu_j-\nu_j^{(0)}\right)}\sum_{(t_1,\dots,t_s)\in Z^s}\hat f\left(\left(2t_1+\operatorname{sgn}\left(\nu_1-\nu_1^{(0)}\right)\right)2^{\nu_1-1},\dots,(2t+\operatorname{sgn}\left(\nu_s-\nu_s^{(0)}\right)\right)2^{\nu_s-1}\right),$$

$$J_2=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n\in V_q}\frac{*e^{2\pi i(n,x)}}{(n,n)}\sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in Z^s_{\nu(n)}/\Omega\left(\nu^{(n)},q\right)}(-1)^{\sum\limits_{j=1}^{s}\operatorname{sgn}\left(\nu_j-\nu_j^{(n)}\right)}\sum_{(t_1,\dots,t_s)\in Z^s}\hat f\left(n_1+\left(2t_1+\operatorname{sgn}\left(\nu_s-\nu_s^{(0)}\right)\right)2^{\nu_s-1},\dots,n_s+\right.$$

$$\left.+\left(2t_s+\operatorname{sgn}\left(\nu_s-\nu_s^{(n)}\right)\right)2^{\nu_s-1}\right).$$

Оценим J_1, учитывая определение класса E_s^r:

$$\|J_1\|_{L^p}=\|w(x)\|_{L^p}\cdot\left|\sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in Z^s_{\nu_0}/\Omega_{\left(\nu^{(0)},q\right)}}(-1)^{\sum\limits_{j=1}^{s}\operatorname{sgn}\left(\nu_j-\nu_j^{(0)}\right)}\sum_{(t_1,\dots,t_s)\in Z^s}\hat f\left(\left(2t_1+\operatorname{sgn}\left(\nu_1-\nu_1^{(0)}\right)\right)2^{\nu_1-1},\dots,(2t_s+\operatorname{sgn}(\nu_s-\nu_s^{(0)}))2^{\nu_s-1}\right|\le$$

$$<<\sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in Z^s_{\nu_0}/\Omega_{\left(\nu^{(0)},q\right)}}\sum_{(t_1,\dots,t_s)\in Z^s}\frac{1}{\left(\left(2t_1+\operatorname{sgn}\left(\nu_1-\nu_1^{(0)}\right)\right)2^{\nu_1-1}\right)^r\dots\left(\left(2t_s+\operatorname{sgn}\left(\nu_s-\nu_s^{(0)}\right)\right)2^{\nu_s-1}\right)^r}.$$

Далее, применяя лемму 3, получим:

$$\sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in Z^s_{\nu_0}/\Omega_{\left(\nu^{(0)},q\right)}}\sum_{(t_1,\dots,t_s)\in Z^s}\frac{1}{\left(\left(2t_1+\operatorname{sgn}\left(\nu_1-\nu_1^{(0)}\right)\right)2^{\nu_1-1}\right)^r\dots\left(\left(2t_s+\operatorname{sgn}\left(\nu_s-\nu_s^{(0)}\right)\right)2^{\nu_s-1}\right)^r}\succ\prec$$

$$\succ\prec\sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in Z^s_{\nu_0}/\Omega_{\left(\nu^{(0)},q\right)}}\sum_{(t_1,\dots,t_s)\in Z^s}\frac{1}{\left(\overline{t_1}\cdot 2^{\nu_1}\dots\overline{t_s}\cdot 2^{\nu_s}\right)^r}\succ\prec\sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in Z^s_{\nu_0}/\Omega_{\left(\nu^{(0)},q\right)}}\frac{1}{2^{r(\nu_1+\dots+\nu_s)}}\succ\prec\sum_{l=q+1}^{\infty}\frac{1}{2^{lr}}\sum_{\substack{\nu_1+\dots+\nu_s=l\\ \nu_j\ge\nu_j^{(0)}}}1.$$

В силу лемм 4 и 5 имеем

$$\sum_{l=q+1}^{\infty}\frac{1}{2^{lr}}\sum_{\substack{\nu_1+\dots+\nu_s=l\\ \nu_j\ge\nu_j^{(0)}}}1\succ\prec\sum_{l=q+1}^{\infty}\frac{l^{s-1}}{2^{lr}}<<\frac{q^{s-1}}{2^{qr}}.$$

Таким образом,

$$\|J_1\|_{L^p}<<\frac{q^{s-1}}{2^{qr}}. \qquad (7)$$

Применяя неравенство Хаусдорфа-Юнга, неравенство

$$(n,n)\ge(n_1\cdot\ldots\cdot n_s)^{\frac{2}{s}}, \qquad (8)$$

оценим J_2 в метрике L^p $\left(2\le p\le\infty,\, p'=\dfrac{p}{p-1}\right)$:

$$\left\|J_2\right\|_{L^p}=\left(\int\limits_{[0,1]^s}\left|\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n\in V_q}\frac{{}^{*}e^{2\pi i(n,x)}}{(n,n)}\sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in Z^s_{\nu(n)}/\Omega\left(\nu^{(n)},q\right)}(-1)^{\sum_{j=1}^{s}\operatorname{sgn}\left(\nu_j-\nu_j^{(n)}\right)}\sum_{(t_1,\dots,t_s)\in Z^s}\hat f\left(n_1+\left(2t_1+\operatorname{sgn}\left(\nu_1-\nu_1^{(0)}\right)\right)2^{\nu_s-1},\dots,n_s+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left(2t_s+\operatorname{sgn}\left(\nu_s-\nu_s^{(0)}\right)\right)2^{\nu_s-1}\right|^p dx\right)^{\frac1p}<<\left(\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n\in V_q}\frac{1}{(n,n)^{p'}}\cdot\left|\sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in Z^s_{\nu(n)}/\Omega\left(\nu^{(n)},q\right)}\sum_{t\in Z^s}\hat f\left(n_1+\left(2t_1+\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\operatorname{sgn}\left(\nu_1-\nu_1^{(0)}\right)\right)2^{\nu_1-1},\dots,n_s+\left(2t_s+\operatorname{sgn}\left(\nu_s-\nu_s^{(0)}\right)\right)2^{\nu_s-1}\right|^{p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Далее, применяя определение класса E_s^r, получим:

$$\sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in Z^s_{\nu(n)}/\Omega\left(\nu^{(n)},q\right)}\sum_{t\in Z^s}\left|\hat f\left(n_1+\left(2t_1+\operatorname{sgn}\left(\nu_1-\nu_1^{(0)}\right)\right)2^{\nu_s-1},\dots n_s+\left(2t_s+\operatorname{sgn}\left(\nu_s-\nu_s^{(0)}\right)\right)2^{\nu_s-1}\right)\right|\le$$

$$\le\sum_{\substack{\nu_1+\dots+\nu_s>q\\ \nu_j\ge\nu_j^{(n)}}}\sum_{t\in Z^s}\frac{1}{\left(n_1+\left(2t_1+\operatorname{sgn}\left(\nu_1-\nu_1^{(0)}\right)\right)2^{\nu_s-1},\dots,n_s+\left(2t_s+\operatorname{sgn}\left(\nu_s-\nu_s^{(0)}\right)\right)2^{\nu_s-1}\right)^r}.$$

На основании леммы 3 имеем

$$\sum_{\substack{\nu_1+\dots+\nu_s>q\\ \nu_j\ge\nu_j^{(n)}}}\sum_{t\in Z^s}\frac{1}{\left(n_1+\left(2t_1+\operatorname{sgn}\left(\nu_1-\nu_1^{(0)}\right)\right)2^{\nu_s-1},\dots,n_s+\left(2t_s+\operatorname{sgn}\left(\nu_s-\nu_s^{(0)}\right)\right)2^{\nu_s-1}\right)^r}\asymp$$

$$\asymp\sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in Z^s_{\nu(n)}/\Omega_{\left(\nu^{(n)},q\right)}}\sum_{(t_1,\dots,t_s)\in Z^s}\frac{1}{\left(\overline{t_1}\cdot2^{\nu_1}\dots\overline{t_s}\cdot2^{\nu_s}\right)^r}\asymp\sum_{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in Z^s_{\nu(n)}/\Omega_{\left(\nu^{(n)},q\right)}}\frac{1}{2^{r(\nu_1+\dots+\nu_s)}}\asymp\sum_{l=q+1}^{\infty}\frac{1}{2^{lr}}\sum_{\substack{\nu_1+\dots+\nu_s=l\\ \nu_j\ge\nu_j^{(n)}}}1.$$

Используя последовательно леммы 4, 6 и 5, получим:

$$\sum_{l=q+1}^{\infty}\frac{1}{2^{lr}}\sum_{\substack{\nu_1+\dots+\nu_s=l\\ \nu_j\ge\nu_j^{(n)}}}1\asymp\sum_{l=q+1}^{\infty}\frac{\left(l-\left(\nu_1(n)+\dots+\nu_s(n)\right)\right)^{s-1}}{2^{lr}}\asymp\frac{q^{s-1}}{2^{qr}}\asymp\sum_{l=q+1}^{\infty}\frac{\left(l-\log_2\left(\overline{n}_1\cdot\ldots\cdot\overline{n}_s\right)\right)^{s-1}}{2^{lr}}\asymp$$

$$\asymp\frac{\left(l-\log_2\left(\overline{n}_1\cdot\ldots\cdot\overline{n}_s\right)\right)^{s-1}}{2^{lr}}.\tag{9}$$

Применяя (9), продолжим оценку:

$$\left\|J_2\right\|_{L^p}^{p'}<<\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n\in V_q}{}^{*}\frac{1}{(n,n)^{p'}}\cdot\left(\frac{q-\log_2\left(\overline{n}_1\cdot\ldots\cdot\overline{n}_s\right)}{2^{qr}}\right)^{p'}<<\frac{1}{2^{qrp'}}\sum_{n\in V_q}{}^{*}\frac{\left(q-\log_2\left(\overline{n}_1\cdot\ldots\cdot\overline{n}_s\right)\right)^{(s-1)p'}}{\left(\overline{n}_1\cdot\ldots\cdot\overline{n}_s\right)^{\frac{2p'}{s}}}=$$

$$=\frac{1}{2^{qrp'}}\sum_{1\le n_1\cdot\ldots\cdot n_s\le2^q}{}^{*}\frac{\left(q-\log_2\left(\overline{n}_1\cdot\ldots\cdot\overline{n}_s\right)\right)^{(s-1)p'}}{\left(\overline{n}_1\cdot\ldots\cdot\overline{n}_s\right)^{\frac{2p'}{s}}}<<\frac{1}{2^{qrp'}}\sum_{k=1}^{q}\frac{(q-k)^{(s-1)p'}}{\left(2^k\right)^{\frac{2p'}{s}}}\cdot\sum_{2^{k-1}\le n_1\cdot\ldots\cdot n\le2^k}1.$$

На основании леммы 7 имеем $\sum\limits_{2^{k-1}\le n_1\cdot\ldots\cdot n\le2^k}1\asymp2^k\cdot k^{s-1}$. Следовательно,

$$\left\|J_2\right\|_{L^p}^{p'}<<\frac{1}{2^{qrp'}}\sum_{k=1}^{q}\frac{(q-k)^{(s-1)p'}}{\left(2^k\right)^{\frac{2p'}{s}}}\cdot2^k\cdot k^{s-1}=\frac{1}{2^{qrp'}}\sum_{k=1}^{q}\frac{(q-k)^{(s-1)p'}}{2^{k\left(\frac{2p'}{s}-1\right)}}\cdot k^{s-1}.\tag{10}$$

При $1-\frac{2p'}{s}=1-\frac{1}{p}-\frac{2}{s}>0$, умножив и разделив выражение (10) на $2^{q\left(1-\frac{2p'}{s}\right)}$, получим:

$$\|J_2\|_{L^p}^{p'} << \frac{1}{2^{qrp'}}\sum_{k=1}^{q}\frac{(q-k)^{(s-1)p'}}{2^{k\left(\frac{2p'}{s}-1\right)}}\cdot k^{s-1}=\frac{1}{2^{qrp'}}\cdot\sum_{k=1}^{q}\frac{(q-k)^{(s-1)p'}}{2^{(q-k)\left(1-\frac{2p'}{s}\right)}}\cdot 2^{q\left(1-\frac{2p'}{s}\right)}\cdot k^{s-1}.$$

Так как $\sum_{k=1}^{q}\frac{(q-k)^{(s-1)p'}}{2^{(q-k)\left(1-\frac{2p'}{s}\right)}}<+\infty$ при $q\to\infty$, то $\|J_2\|_{L^p}^{p'} << \frac{q^{s-1}}{2^{qp'\left(r-\frac{1}{p'}+\frac{2}{s}\right)}}$. Учитывая, что $p'=\frac{p}{p-1}$, получим:

$$\|J_2\|_{L^p} << \frac{q^{(s-1)\left(1-\frac{1}{p}\right)}}{2^{q\left(r-1+\frac{1}{p}+\frac{2}{s}\right)}}. \tag{11}$$

Теперь оценим J_3. Применяя неравенство Хаусдорфа-Юнга, неравенство (8), а также определение класса E_s^r, имеем: $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\ p'=\frac{p}{p-1}\right)$.

$$\|J_3\|_{L^p}=\left\|-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n\in Z^s/V_q}\frac{*\hat{f}(n)}{(n,n)}e^{2\pi i(n,x)}\right\|_{L^p} << \left(\sum_{n\in Z^s/V_q}*\left|\frac{\hat{f}(n)}{(n,n)}\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \le \left(\sum_{n\in Z^s/V_q}\frac{\left|\hat{f}(n)\right|^{p'}}{(n_1\cdot\ldots\cdot n_s)^{\frac{2}{s}p'}}\right)^{\frac{1}{p'}} <<$$

$$<< \left(\sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_s>2^q}\frac{1}{(n_1\cdot\ldots\cdot n_s)^{\left(\frac{2}{s}+r\right)p'}}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

На основании леммы 8, учитывая, что $p'=\frac{p}{p-1}$, приходим к оценке:

$$\left(\sum_{n_1\cdot\ldots\cdot n_s>2^q}\frac{1}{(n_1\cdot\ldots\cdot n_s)^{\left(\frac{2}{s}+r\right)p'}}\right)^{\frac{1}{p'}} << \left(\frac{\left(1+\ln 2^q\right)^{s-1}}{\left(2^q\right)^{p'\left(\frac{2}{s}+r\right)-1}}\right)^{\frac{1}{p'}}=\frac{q^{(s-1)\left(1-\frac{1}{p}\right)}}{2^{q\left(r+\frac{2}{s}-1+\frac{1}{p}\right)}}.$$

Таким образом,

$$\|J_3\|_{L^p} << \frac{q^{(s-1)\left(1-\frac{1}{p}\right)}}{2^{q\left(r+\frac{2}{s}-1+\frac{1}{p}\right)}}. \tag{12}$$

Из неравенств (7), (11) и (12) следует

$$\delta_N\left(u_w, E_s^r\right)_{L^p(0,1)^s} << \frac{q^{(s-1)\left(1-\frac{1}{p}\right)}}{2^{q\left(r-1+\frac{1}{p}+\frac{2}{s}\right)}} \text{ при } 1-\frac{1}{p}-\frac{2}{s}>0.$$

В пересчете на число узлов

$$\delta_N\left(u_w, E_s^r\right)_{L^p(0,1)^s} << \frac{(\ln N)^{(s-1)\left(r+\frac{2}{s}\right)}}{N^{r-\left(1-\frac{1}{p}-\frac{2}{s}\right)}}.$$

Теорема доказана.

References

1. *Hua Loo Keng, WangYuan*. Application of Number Theory of Numerical Analysis. — Berlin; Heidelberg: New York: Springer Yerlag, 1981.

2. *Sherniyazov K.E.* Approximate restoration of functions and solutions of equation of heat conductivity with functions of distribution the initial temperature from E, SW classes // Diss. cand. of phis.-mat. sc. 01.01.01 — Mathematical analysis. — Almaty, 1998.
3. *Bakhvalov N.S.* About numerical solving of the Dirichlet problem for Laplace's equation // Vestnik of MSU. — 1959. — № 5. — P. 171–195.
4. *Temirgaliev N.* Theoretical numeric methods and theoretical probabilistic approach to problems of analysis. Embedding and approximation theory, absolute convergence and the transformation of Fourier series // Vestnik of the Eurasian National University. — 1997. — № 3. — P. 90–144.
5. *Temirgaliev N.* Theoretical numeric methods and theoretical probabilistic approach to problems of analysis. Embedding and approximation theory, absolute convergence and the transformation of Fourier series (continuation 1) // Vestnik of the Eurasian National University. — 2002. — № 3–4. — P. 222–272.
6. *Korobov N.M.* Theoretical numeric methods in approximate analysis. — M.: Fizmatgiz, 1963. — 224 p.
7. *Bailov E.A., Temirgaliev N.* About discretezation the solutions of Poisson's equation // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2006. — Vol. 47. — № 9. — P. 1594–1604.
8. *Smolyak S.A.* Quadrature and interpolation formulae on tensor products of certain classes of functions // Rep. of AS USSR. — 1963. — Vol. 148. — № 5. — P. 1042–1045.
9. *Temirgaliev N., Kudaibergenov S.S., Shomanova A.A.* Applications of Smolyak's quadrature formulae for numerical integration of the Fourier coefficients and restoration problems // News of h.s. Matem. — 2010. — № 3. — P. 52–71.

ӘОЖ 517.62

Жай дифференциалдық теңдеулерді MathCad құралдарымен шешу

Solution of ordinary differential Equations by means of MathCad

Ниханбаева Н.Т.

Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті (E-mail: nazima_kz@mail.ru)

В данной статье показана возможность использования современных информационных технологий с помощью простейших методов вычислений. Для этого наиболее подходящей является одна из самых мощных и эффективных математических систем — Mathcad, которая занимает особое место среди множества таких систем (Matlab, Maple, Mathematica и др.). Mathcad остается единственной системой, в которой описание решения математических задач задается с помощью привычных математических формул и знаков. Mathcad позволяет выполнять как численные, так и аналитические (символьные) вычисления, имеет чрезвычайно удобный математико-ориентированный интерфейс и прекрасные средства научной графики.

The article reveals the possibility to apply the simplest calculation methods using modern informational technologies. One of the most powerful and effective mathematical systems — Mathcad, which has a special place among lots of similar systems (Matlab, Maple, Mathematica and others) is the most suitable for it. Mathcad remains the only one system where the description of solution of mathematical tasks is given by the help of usual mathematical formulas and signs. Mathcad allows to make both numeral and symbolic calculations. It has a very convenient mathematically-oriented interface and fine means of scientific graphic arts.

Жай дифференциалдық теңдеулерді шешу ғылыми-техникалық есептеулер тәжірибесінде кең қолданылады. Сызықтық жай дифференциалдық теңдеулердің арнайы функциялар түрінде шешімі болғанымен, көп физикалық жүйелер сызықтық емес және аналитикалық шешімдері жоқ сызықтық жай дифференциалдық теңдеулермен сипатталады. Бұл жағдайда дифференциалдық теңдеулерді шешуде сандық әдістерді қолдануға тура келеді.

Жай дифференциалдық теңдеулерді шешу үшін, тәуелді айнымалының мәнін және туындылардың кейбір мәндерінде тәуелсіз айнымалының мәнін білу керек [1]. Егер бұл қосымша шарттар бір мәнде тәуелсіз айнымалы түрінде болса, онда мұндай есеп Коши есебі деп аталады. Егер шарттар екі немесе көп тәуелсіз айнымалы түрінде болса, онда есеп шектік деп аталады.