УДК 517.956.3

А.Х. Аттаев

Институт прикладной математики и автоматизации — филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук», Нальчик, Россия
(E-mail: attaev.anatoly@yandex.ru)

Краевые задачи для нагруженного волнового уравнения

В статье рассмотрены задачи Коши, Гурса и Дарбу для нагруженного уравнения колебания струны $u_{xx} - u_{yy} = \lambda u(x_0, y)$. Построено явное представление решения задачи Коши, которое при $\lambda = 0$ совпадает с известным представлением решения задачи Коши для уравнения колебания струны. Описаны области зависимости, влияния и определения данных Коши. Показано их существенное отличие от аналогичных областей в случае задачи Коши для уравнения колебания струны. Сформулированы задачи Дарбу и Гурса в нелокальной постановке и предложен алгоритм построения их решений.

Ключевые слова: уравнение колебания струны, нагруженное уравнение, задача Коши, задача Гурса, задача Дарбу, область зависимости, область влияния, область определения данных Коши.

Введение

В этом году исполнился 41 год со дня выхода работы А.М. Нахушева [1], где было введено определение нагруженных дифференциальных уравнений.

Уравнение вида

$$\sum_{|\alpha|\leq r} D^{\alpha}u + A(u|_{\omega_k}) = f(x), \tag{1}$$

где A — заданный оператор (в частности, интегродифференциальный), действующий на сужении $u|_{\omega_k}$ искомой функции $u = u(x)$ на многообразие $\omega_k : u|_{\omega_k} = u(x)\ \forall x \in \omega_k$, называется нагруженным интегродифференциальным уравнением.

Этому предшествовало достаточно большое количество работ зарубежных математиков, посвященных в основном одномерным дифференциально-граничным операторам, то есть нагруженным дифференциальным операторам по терминологии [1]. Обширную библиографию исследований в этом направлении можно найти в работах [2, 3]. Наличие нагруженных слагаемых влияет на корректную постановку тех или иных начально-краевых задач. В этой связи можно отметить некоторые работы [4–10]. Особенно этот эффект проявляется для нагруженных как строго, так и слабо гиперболических уравнений.

В данной работе обсуждаются некоторые отличительные моменты, связанные с постановкой и исследованием основных начально-краевых задач для нагруженных гиперболических уравнений на примере нагруженного уравнения вида

$$u_{xx} - u_{yy} = \lambda u(x_0, y), \tag{2}$$

где λ, x_0- действительные константы.

Задача Коши

Известно, что любое регулярное решение уравнения (2) при $\lambda = 0$ представимо в виде

$$u(x,y) = f(x-y) + g(x+y), \tag{3}$$

где f и g — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Формула (3) носит название формулы Даламбера.

Лемма 1. Любое регулярное решение уравнения (2) представимо в виде

$$u(x,y) = f(x-y) + g(x+y) + \int_0^y K(y,t)[f(x_0-t)+g(x_0+t)]\,dt, \tag{4}$$

где

$$K(y,t) = \begin{cases} \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}(t-y), & \lambda > 0; \\ \sqrt{-\lambda}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{-\lambda}(t-y), & \lambda < 0. \end{cases}$$

Доказательство. Замена

$$u(x,y) = \upsilon(x,y) + \int_0^y K(y,t)\upsilon(x_0,t)\,dt, \tag{5}$$

где $K(y,t)$ есть решение задачи

$$K(y,y) = 0, \;\; K_t'(y,y) = -\lambda \tag{6}$$

для обыкновенного дифференциального уравнения

$$K_t''(y,t) + \lambda K(y,t) = 0, \tag{7}$$

переводит уравнение (2) в уравнение

$$\upsilon_{xx} - \upsilon_{yy} = 0.$$

Подставляя в (5) вместо $K(y,t)$ решение задачи (6), (7), а вместо $\upsilon(x,y)$ — решение Даламбера, приходим к (4). Лемма доказана.

Ниже везде для определенности будем считать, что $\lambda > 0$.

Пусть

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; u_y(x,0) = \psi(x). \tag{8}$$

Теорема 1. Регулярное решение задачи Коши (8) для уравнения (2) имеет вид

$$u(x,y) = \frac{\varphi(x-y)+\varphi(x+y)}{2} + \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\int_{x_0-y}^{x_0} \sin\sqrt{\lambda}(x_0-t-y)\varphi(t)dt +$$
$$+\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\int_{x_0}^{x_0+y} \sin\sqrt{\lambda}(t-x_0-y)\varphi(t)dt + \frac{1}{2}\int_{x_0-y}^{x_0} \cos\sqrt{\lambda}(x_0-t-y)\psi(t)dt +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_0+y} \cos\sqrt{\lambda}(t-x_0-y)\psi(t)dt - \frac{1}{2}\int_{x_0-y}^{x_0+y}\psi(t)dt + \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt. \tag{9}$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что функция

$$u(x,y) = \upsilon(x,y) + \sqrt{\lambda}\int_0^y \sin\sqrt{\lambda}(t-y)\upsilon(x_0,t)\,dt \tag{10}$$

является регулярным решением задачи Коши (8) для уравнения (2), где

$$\upsilon(x,y) = \frac{\varphi(x-y)+\varphi(x+y)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (10), после несложных преобразований получим формулу (9).

Следуя [11; 158, 159], опишем области зависимости, влияния и определения данных Коши. Пусть носителем начальных данных является вся числовая ось $\mathbb{R}$. Как видно из формулы (9), область зависимости, то есть множество по заданным значениям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, на котором вполне определяется значение решения уравнения (2), есть $[x_0 - y, x_0 + y] \cup [x - y, x + y]$. Следует отметить, что последние два отрезка в зависимости от выбора точки (x, y) могут пересекаться, а могут и не пересекаться. Также нужно заметить, что для вычисления $u(x, y)$ в точке (x, y) необходимо знать значение функции $\varphi(x)$ на отрезке $[x_0 - y, x_0 + y]$, а также значение $\psi(x)$ на $[x_0 - y, x_0 + y] \cup [x - y, x + y]$.

Пусть теперь носителем начальных данных является некоторый отрезок $[a, b] \in \mathbb{R}$. Как видно из формулы (9), множество точек плоскости, на значение $u(x, y)$ которых влияют $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, представляют собой область влияния (рис. 1).

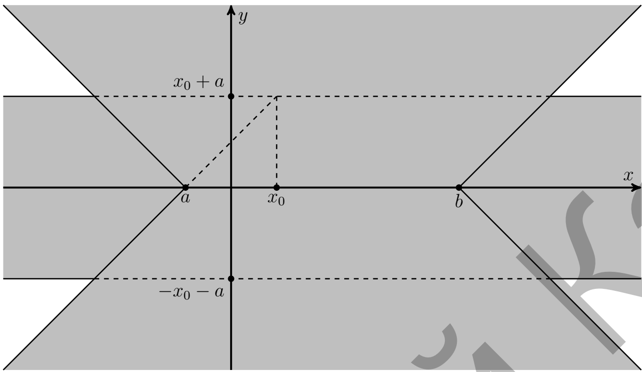

Рисунок 1. Область влияния

Множество точек $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, в которых значение $u(x, y)$ вполне определяется по заданным значениям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на $[a, b]$, есть область определения (рис. 2).

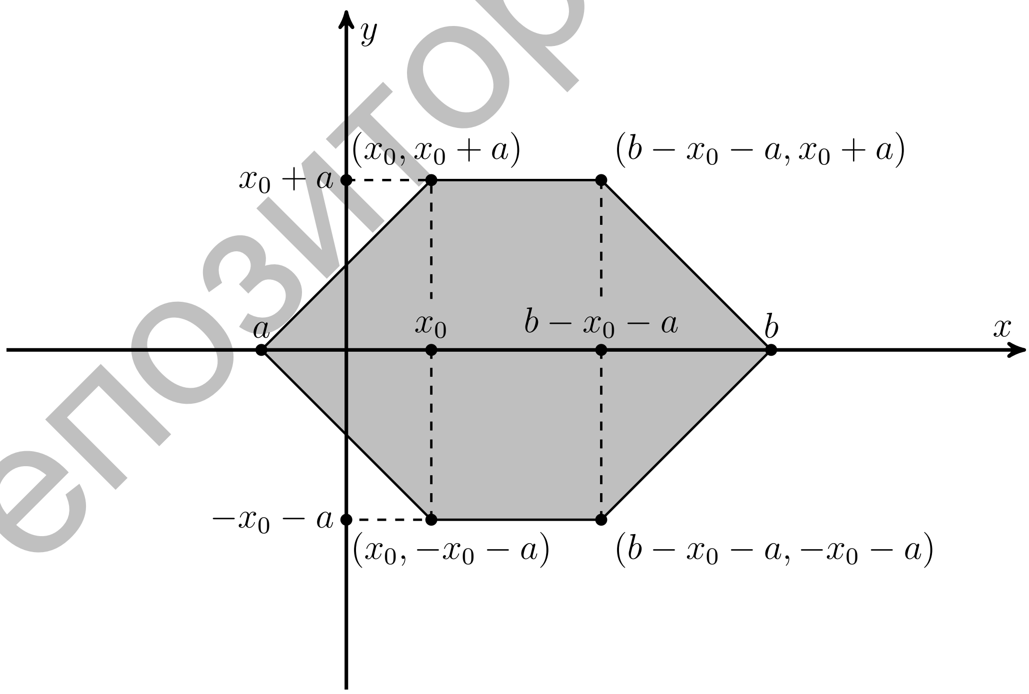

Рисунок 2. Область определения

Пусть Ω — область, ограниченная характеристиками $x - y = 0$, $x + y = l$ и прямыми $y = 0$ и $y = x_0$, $0 < x_0 < l$.

Функцию $u(x, y)$ будем называть обобщённым решением уравнения (2), если она представима в виде

$$u(x, y) = f(x - y) + g(x + y) + \sqrt{\lambda} \int_0^y \sin \sqrt{\lambda}(y - t) \left[f(x_0 - t) + g(x_0 + t) \right] dt.$$

Не нарушая общности, будем считать, что $x_0 < l/2$. В противном случае можно ввести точку $x'_0 = l - x_0$, для которой будет справедливо неравенство $x'_0 < l/2$.

Аналог задачи Дарбу

Необходимо найти обобщённое решение уравнения (2), удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 < x < l; \tag{12}$$

$$u(x, x_0) = \varphi(x), \quad x_0 \le x \le l - x_0; \tag{13}$$

$$u\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right) + \lambda \int_0^{x/2} \left(\frac{x}{2} - t\right) u(x_0, t) dt = \psi(x), \quad 0 < x < 2x_0. \tag{14}$$

Пусть $l = nx_0 + r$, $0 < r < x_0$. Разобьём область Ω прямыми $x - y = 2kx_0$ и $x + y = (2k + 2)x_0$, $k = 0, 1, \ldots, n - 2$, на $n - 1$ треугольных областей Ω_k и $\Omega_n = \{(x, y)\colon nx_0 \le x + y < l, y = 0, y = x_0\}$.

В области Ω_0 условия (2), (14) позволяют записать решение в виде

$$u(x, y) = \tau(x - y) - \psi(x - y) + \psi(x + y) +$$

$$+ \sqrt{\lambda} \int_0^y \sin \sqrt{\lambda}(y - t) \left[\tau(x_0 - t) - \psi(x_0 - t) + \psi(x_0 + t) \right] dt. \tag{15}$$

После того, как нашли решение в области Ω_0, в областях Ω_k, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, решение находится как решение обычной задачи Дарбу для уравнения (2), в котором правая часть уже известна.

В области Ω_n решение находится последовательным решением трёх задач: задачи Дарбу, задачи Гурса и снова задачи Дарбу для уравнения (2) с известной правой частью (рис. 3).

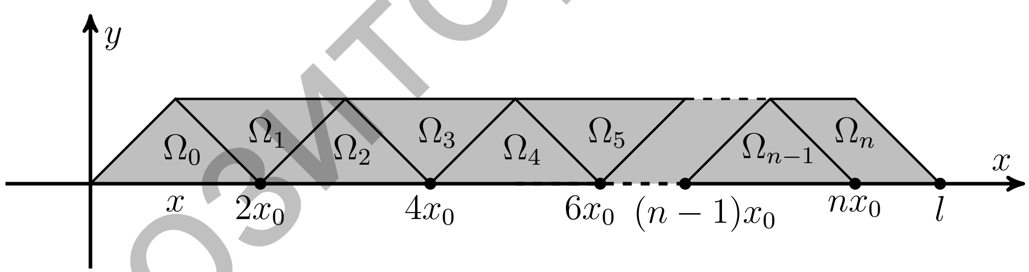

Рисунок 3. Области Ω_k, где $k = 0, 2, \ldots, n$

Если $l = 2x_0$, то условие (13) автоматически отпадает, и решение задачи Дарбу в области Ω принимает вид (15).

Аналог задачи Гурса

Необходимо найти обобщённое решение уравнения (2) в области Ω, ограниченной характеристиками $x - y = 0$, $x + y = 0$, $x - y = l$, $x + y = l$, а также прямыми $y = x_0$ и $y = -x_0$, удовлетворяющего следующим условиям:

$$u(x, x_0) = \varphi_1(x), \quad x_0 \le x \le l - x_0; \tag{16}$$

$$u(x, -x_0) = \varphi_2(x), \quad x_0 \le x \le l - x_0; \tag{17}$$

$$u\left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right) + \lambda \int_0^{x/2} \sin \sqrt{\lambda} \left(\frac{x}{2} - t\right) u(x_0, t) dt = \psi_1(x), \quad 0 \le x \le x_0; \tag{18}$$

$$u\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)-\lambda\int_0^{-x/2}\sin\sqrt{\lambda}\left(\frac{x}{2}+t\right)u(x_0,t)dt=\psi_2(x),\quad 0\le x\le 2x_0. \tag{19}$$

Для доказательства существования и единственности решения задачи Гурса нужно проделать без особых изменений ту же процедуру, что и при доказательстве существования и единственности решения задачи Дарбу.

Список литературы

1 Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегродифференциального уравнения второго порядка / А.М. Нахушев // Дифференциальные уравнения. — 1976. — Т. 12. — № 1. — С. 103–108.

2 Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применения / А.М. Нахушев. — М.: Наука, 2012. — 232 с.

3 Krall A.M. Differential-boundary operators / A.M. Krall // Trans. Amer. Math. Soc. — 1971. — 154 p.

4 Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференциальные уравнения. — 1983. — Т. 19. — № 1. — С. 86–94.

5 Нахушев А.М. О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями / А.М. Нахушев // Дифференциальные уравнения. — 1985. — Т. 21. — № 1. — С. 92–102.

6 Дженалиев М.Т. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений / М.Т. Дженалиев, М.И. Рамазанов. — Алматы: Ғылым, 2010. — 336 с.

7 Ломов И.С. Нагруженные дифференциальные операторы: сходимость спектральных разложений / И.С. Ломов // Дифференциальные уравнения. — 1983. — Т. 19. — № 1. — С. 86–94.

8 Аттаев А.Х. Характеристическая задача Коши для линейного нагруженного гиперболического уравнения / А.Х. Аттаев // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. — 2010. — Т. 12. — № 1. — С. 9, 10.

9 Аттаев А.Х. Задача с данными на параллельных характеристиках для нагруженного волнового уравнения / А.Х. Аттаев // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. — 2013. — Т. 15. — № 2. — С. 25–28.

10 Аттаев А.Х. Задача Гурса для нагруженного гиперболического уравнения / А.Х. Аттаев // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. — 2014. — Т. 16. — № 3. — С. 9–12.

11 Бицадзе А.В. Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе. — М.: Наука, 1982. — 336 с.

А.Х. Аттаев

Жүктелген толқындық теңдеу үшін шеттік есептер

Мақалада $u_{xx}-u_{yy}=\lambda u(x_0,y)$ ішек тербелісінің жүктелген теңдеуі үшін Коши, Гурс және Дарбу есептері қарастырылды. $\lambda=0$ болғанда ішектің тербеліс теңдеуі үшін Коши есебі шешімінің белгілі нұсқасымен Коши есебінің шешімінің айқын берілуі ұсынылған. Коши берілгендерінің тәуелділік, әсер ету және анықталу облыстары сипатталған. Ішектің тербеліс теңдеуі үшін Коши есебі жағдайында аналогты облыстардан едәуір айырмашылық байқалады. Бейлокалды берілуде Дарбу және Гурс есептері тұжырымдалған және олардың шешімін құрудың алгоритмі ұсынылған.

Кілт сөздер: ішектің тербеліс теңдеуі, жүктелген теңдеу, Коши есебі, Гурс есебі, Дарбу есебі, тәуелділік облысы, әсер ету облысы, Коши берілгендерін анықтау облысы.

A.H. Attaev

Boundary value problems for a loaded wave equation

We consider Cauchy, Goursat and Darboux problems for a loaded wave equation $u_{xx} - u_{yy} = \lambda u(x_0, y)$. We construct an explicit representation for solution of Cauchy problem, which coincides with the classical representation for solution of the Cauchy problem for the wave equation as $\lambda = 0$. We describe the domains of dependence, influence and definition of Cauchy data. It is shown their essential difference from corresponding domains in the case of the Cauchy problem for the wave equation. We formulate Darboux and Goursat problems in nonlocal setting and give an algorithm for construction of their solutions.

Keywords: wave equation, loaded equation, Cauchy problem, Goursat problem, Darboux problem, dependence domain, influence domain, definition domain of Cauchy data.

References

1 Nakhushev, A.M. (1976). O zadache Darbu dlia odnoho vyrozhdaiushchehosia nahruzhennoho intehrodifferentsialnoho uravneniia vtoroho poriadka [On the Darboux problem for a degenerate loaded second-order integrodifferential equation]. *Differentsialnye uravneniia – Differential equation, Vol. 12, 1,* 103–108 [in Russian].

2 Nakhushev, A.M. (2012). *Nahruzhennye uravneniia i ikh primeneniia [Loaded equations and their applications].* Moscow: Nauka [in Russian].

3 Krall, A.M. (1971). Differential-boundary operators // *Transactions of the American Mathematical Society,* 154.

4 Nakhushev, A.M. (1983). Nahruzhennye uravneniia i ikh prilozheniia [Loaded equations and their applications]. *Differentsialnye uravneniia – Differential equation, Vol. 19, 1,* 86–94 [in Russian].

5 Nakhushev, A.M. (1985). O nelokalnykh kraevykh zadachakh so smeshcheniem i ikh sviazi s nahruzhennymi uravneniiami [On nonlocal boundary-value problems with displacement and their connection with the loaded equations]. *Differentsialnye uravneniia – Differential equation, Vol. 21, 1,* 92–102 [in Russian].

6 Jenaliyev, M.T., Ramazanov, M.I. (2010). *Nahruzhennye uravnenie kak vozmushcheniia differentsialnykh uravnenii [Loaded equations as perturbations of differential Equations].* Almaty: Gylym [in Russian].

7 Lomov, I.S. (1983). Nahruzhennye differentsialnye operatory: skhodimost spektralnykh razlozhenii [Loaded differential operators: convergence of spectral decompositions]. *Differentsialnye uravneniia – Differential equation, Vol. 19, 1,* 86–94 [in Russian].

8 Attaev, A.H. (2010). Kharakteristicheskaia zadacha Koshi dlia lineinoho nahruzhennoho hiperbolicheskoho uravneniia [The characteristic Cauchy problem for a linear stressed hyperbolic equation]. *Adyhskaia (Cherkesskaia) Mezhdunarodnaia akademiia nauk – Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences, Vol. 12, 1,* 9, 10 [in Russian].

9 Attaev, A.H. (2013). Zadacha s dannymi na parallelnykh kharakteristikakh dlia nahruzhennoho volnovoho uravneniia [A problem with data on parallel characteristics for the loaded wave equation]. *Adyhskaia (Cherkesskaia) Mezhdunarodnaia akademiia nauk – Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences, Vol. 15, 2,* 25–28 [in Russian].

10 Attaev, A.H. (2014). Zadacha Hursa dlia nahruzhennoho hiperbolicheskoho uravneniia [The Goursat problem for the loaded hyperbolic equation]. *Adyhskaia (Cherkesskaia) Mezhdunarodnaia akademiia nauk – Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences, Vol. 16, 3,* 9–12 [in Russian].

11 Bitsadze, A.V. (1982). *Uravneniia matematicheskoi fiziki [Equations of mathematical physics].* Moscow: Nauka [in Russian].