

**О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ  
ОГРАНИЧЕННОЙ Р- ВАРИАЦИЙ ПОЛИНОМАМИ ПО СИСТЕМАМ ХААРА ИЛОУЛША  
Ахажанов Т.Б.<sup>1</sup>, Танин А.О.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Казахстан

<sup>2</sup>Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова, Караганда

В данной работе доказывается прямая и обратная теоремы приближения функций многих переменных ограниченной р- вариации полиномами Хаара и Уолша.

**Определения.** Пусть функция  $f(x_1, \dots, x_N)$  определена на множестве  $[0,1]^N$  и  $\rho = \rho_1 \times \rho_2 \times \dots \times \rho_N$ , где  $\rho_j = \{0 = x_j^0 < x_j^1 < \dots < x_j^{s_j} = 1\}$ ,  $s_j \geq 1$ ,  $j = 1, \dots, N$  - произвольное разбиение множества  $[0,1]^N$ . Вариационной суммой порядка  $p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) функции  $f(x_1, \dots, x_N)$  по

разбиению  $\rho$  назовем величину  $\chi_\rho^p(f) = \left( \sum_{r_1=1}^{s_1} \dots \sum_{r_N=1}^{s_N} |\Delta_1(f; x_1^{r_1-1}, \dots, x_N^{r_N-1}; h_1^{r_1}, \dots, h_N^{r_N})|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ , где

$$\Delta_1(f; x_1, \dots, x_N; h_1, \dots, h_N) := \sum_{\eta_1=0}^1 \dots \sum_{\eta_N=0}^1 (-1)^{\eta_1 + \dots + \eta_N} f(x_1 + \eta_1 h_1, \dots, x_N + \eta_N h_N),$$

$$(x_1, \dots, x_N) \in [0,1]^N \text{ и } h_1, \dots, h_N > 0, \quad h_j^{r_j} := x_j^{r_j} - x_j^{r_j-1}, \quad r_j = 1, 2, \dots, s_j, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Для функции одной переменной понятие вариационной суммы впервые ввел Винер [1], для функций двух переменных -Л.Кларксон и С.Адамс [2]. Вариационным модулем непрерывности  $\omega_{1-1/p}(f, \delta_1, \dots, \delta_N)$  порядка  $1-1/p$  функции  $f(x_1, \dots, x_N)$  называется величина

$$\omega_{1-1/p}(f, \delta_1, \dots, \delta_N) = \sup_{|\rho_j| \leq \delta_j} \chi_\rho^p(f) \text{ где } |\rho_j| = \max_{1 \leq r_j \leq s_j} (x_j^{r_j} - x_j^{r_j-1}). \text{ Будем говорить, что } f \in BV_p[0,1]^N,$$

$1 \leq p < \infty$ , если  $V_p(f, [0,1]^N) \equiv \omega_{1-1/p}(f, 1, \dots, 1) < \infty$ , и что  $f \in C_p[0,1]^N$ ,  $1 < p < \infty$ , если  $\lim_{\delta_j \rightarrow 0} \omega_{1-1/p}(f, \delta_1, \dots, \delta_N) = 0$ . Свойства вариационного модуля непрерывности для функции одной

переменной исследованы А.П. Терехиным [3], С.С. Волосивецем [4]. Пространства  $BV_p[0,1]^N$  и

$C_p[0,1]^N$  являются банаховыми с нормой  $\|f\|_{BV_p} = \max \left\{ \sup_{(x_1, \dots, x_N) \in [0,1]^N} |f(x_1, \dots, x_N)|, V_p(f, [0,1]^N) \right\}$ . Пусть

теперь  $r_0(x)$  равна 1 на  $\left[0, \frac{1}{2}\right)$  и -1 на  $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ . Продолжим ее периодически с периодом 1 на всю ось.

Тогда функциями Радемахера  $r_k(x)$  называются функции  $r_0(2^k x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Функции Уолша в нумерации Пэли определяются следующим образом (см. [5]). Положим  $w_0(x) \equiv 1$ . При  $n \in \mathbb{N}$

рассмотрим двоичную запись  $n$ :  $n = \sum_{i=0}^{k(n)} \varepsilon_i 2^i$ ;  $\varepsilon_{k(n)} = 1$ ;  $\varepsilon_i = 0$  или  $\varepsilon_i = 1$ ,  $0 \leq i < k(n)$ . Тогда

$w_n(x) = \prod_{i=0}^{k(n)} (r_i(x))^{\varepsilon_i}$   $n$ -я функция Уолша. Функции системы Хаара на  $[0,1)$  задаются так:  $h_0(x) = 1$

при  $x \in [0,1)$ ; если же  $n = 2^k + j$ ,  $k \in P = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $0 \leq j < 2^k$  и  $\Delta_j^{(k)} = \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right)$ , то

$$h_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2}, & x \in \Delta_{2^j}^{(k+1)} \\ -2^{k/2}, & x \in \Delta_{2^{j+1}}^{(k+1)} \\ 0, & x \in [0,1) \setminus \Delta_j^{(k)} \end{cases} \text{ Пусть } \bar{x} = (x_1, \dots, x_N) \in [0,1]^N, \quad \bar{n} = (n_1, \dots, n_N) \text{-параметр суммирования,}$$

$n_i \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , тогда кратную систему Хаара и Уолша определим следующим образом:

$h_n(\bar{x}) = \prod_{i=1}^k h_{n_i}(x_i)$ ,  $w_n(\bar{x}) = \prod_{i=1}^k w_{n_i}(x_i)$ . Через  $E_n^h(f)_X$ ,  $(E_n^w(f))_X$  соответственно будем обозначать

наилучшее приближение функции  $f \in X[0,1]^N$  полиномами по системе Хаара (Уолша) порядка не выше  $n_1 \times \dots \times n_N$  ( $n_j \in N$ ) в метрике  $X[0,1]^N$ , где  $X[0,1]^N = BC_p[0,1]^N$ ,  $1 < p < \infty$  или

$X[0,1]^N = BV_p[0,1]^N$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $E_n^-(f)_X = \inf_{c_i} \left\| f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{s_i} c_i \chi_i(\bar{x}) \right\|_X$ . Через  $S_n^h(f)$ ,  $(S_n^w(f))$

обозначим частичную сумму ряда Фурье по системе Хаара (Уолша) функции  $f$ . Через  $K_{\alpha, \beta, \dots, \gamma}$  - обозначим положительные постоянные, зависящие от параметров  $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ , вообще говоря, различные в разных формулах. Основной целью данной работы является доказательство следующей теоремы, являющейся аналогом прямой теоремы теории приближения функций полиномами по системе Уолша или Хаара.

**Теорема 1.** Пусть  $f \in C_p[0,1]^N$ ,  $1 < p < \infty$ . Тогда верны неравенства

$$E_n^h(f)_{BV_p} \leq K_p \omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f, \frac{1}{n_1}, \dots, \frac{1}{n_N}\right), \quad E_n^w(f)_{BV_p} \leq K_p \omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f, \frac{1}{n_1}, \dots, \frac{1}{n_N}\right).$$

**Теорема 2.** Пусть  $f \in C_p[0,1]^N$ ,  $1 < p < \infty$ . Тогда верны неравенства

$$\omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f, \frac{1}{n_1}, \dots, \frac{1}{n_N}\right) \leq K_p E_n^h(f)_{BV_p}, \quad \omega_{1-\frac{1}{p}}\left(f, \frac{1}{n_1}, \dots, \frac{1}{n_N}\right) \leq K_p E_n^w(f)_{BV_p}.$$

Для случай функций одной переменной подобные теоремы были доказаны в работе [4].

#### Список использованных источников

1. Wiener N. The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients / Massachusetts J.Math., 3(1924), p. 72-94 .
2. Clarkson J.A. and Adams C.R. On definitions of bounded variation for functions of two variables / Trans. Amer. Math. Soc., 35(1933),p. 824-854 .
3. Терехин А.П. Приближение функций ограниченной р- вариации / Изв. Вузов. Математика. 1965. №2. с.171-187 .
4. Волосивец С.С. Приближение функций ограниченной р- вариации полиномами по системам Хаара и Уолша / Мат. Заметки. 1993. Т 53. №6. с.11-21.
5. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша: теория и применения. / Москва «Наука», 1987 г. 345 с.

#### ON THE ESTIMATE OF THE NORM OF THE VECTOR-VALUED FOURIER MULTIPLIERS ON GENERALIZED PERIODIC MORREY SPACES

**Baituyakova Zh, Ilyasova M, Keulimzhaeva Zh.**

*L.N. Gumilyov Eurasian national university, Astana, Kazakhstan*

E-mail: baituyakova.zhzh@yandex.ru

In this paper we present the estimate of the norm of the Fourier multipliers on generalized periodic Morrey space by the norm on Bessel potential space.

Let  $0 \leq p < \infty$  and let  $\varphi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ . Then the generalized periodic Morrey space  $M_p^\varphi(T^d)$  is the collection of all functions  $f : R^d \rightarrow C$ ,  $2\pi$ -periodic in each component, such that  $f \in L_p(B(x, r))$  for all  $x \in R^d$  and all  $r > 0$  and

$$\|f\|_{M_p^\varphi(T^d)} := \sup_{x \in [-\pi, \pi]^d} \sup_{0 < r \leq 2\sqrt{d}\pi} \varphi(r) \left( \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

In the definition of generalized Morrey space we assume, that  $\varphi \in G_p$ .