

## Разрешимость вырождающихся уравнений вязкого теплопроводного газа

## Solvability of degenerating equations of a viscous heat-conducting gas

Искендерова Д.А.

Агротехнический университет им. С.Сейфуллина, Астана (E-mail: iskenja\_2005@mail.ru)

Бірқалыпты стационарлық емес тұтқыр жылуөткізгіш газдың ағынын сипаттайтын дифференциалдық теңдеулердің сызықтық емес жүйесі зерттелді. Бастапқы тығыздықтан туындаған Коши есебі шығарылды. Бастапқы мезетте барлық ізделіп отырған функциялар әр түрлі тұрақты шексіздікке ұмтылды, бір ғана ғаламдық жинақталған шешімнің болуының дәлелі априори бағалау әдісі арқылы жүзеге асты.

The nonlinear system of differential equations describing one-dimensional no stationary flow of a viscous heat-conducting gas is considered. The Cauchy problem with degenerate initial density is under study. At the initial time, the required functions tend to various constants at infinity. Existence of a unique global generalized solution is proved by a method of a priori estimates.

1. *Постановка задачи и основной результат.* Уравнения течения вязкого теплопроводного газа в лагранжевых координатах имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad v = \frac{\rho^0}{\rho}, \\ \rho^0 \frac{\partial u}{\partial t} &= \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad p = k \rho^0 \frac{\theta}{v}, \\ \rho^0 \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{v} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - p \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{v} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\rho(x, t)$ ,  $v(x, t)$ ,  $u(x, t)$ ,  $\theta(x, t)$ ,  $p(x, t)$  — плотность, удельный объем, скорость, температура, давление — искомые функции;  $\mu, \lambda, k$  — физические постоянные — положительные числа; переменные  $x \in R = (-\infty; \infty)$ ;  $t \in [0; T]$ ,  $0 < T < \infty$ .

В начальный момент времени  $t = 0$  все характеристики среды известны:

$$u|_{t=0} = u^0(x), \quad \theta|_{t=0} = \theta^0(x), \quad v|_{t=0} = 1, \quad |x| < \infty, \quad (2)$$

причем  $(\rho^0, u^0, \theta^0)$  — непрерывные,  $(\rho^0, \theta^0)$  — ограниченные функции,

$$0 < m_0 \leq \theta^0(x) \leq M_0 < \infty, \quad 0 < \rho^0(x) \leq C_0,$$

имеют конечные пределы на бесконечности:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \rho^0(x) &= \rho_1^0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \rho^0(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u^0(x) &= u_1^0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u^0(x) = u_2^0, \quad u_1^0 < u_2^0, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \theta^0(x) &= \theta_1^0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta^0(x) = \theta_2^0, \quad \theta_1^0 \neq \theta_2^0. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем вспомогательные функции  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$ , обладающие свойствами:

$$\begin{aligned} |f(x)| &< C_1 < \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = u_1^0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = u_2^0, \\ 0 < f'(x) &\leq C_2, \quad f'(x) \in W_2^1(R), \quad f'(x) \in L_1(R), \\ f'(x) &\leq C_3 \sqrt{\rho^0(x)}, \quad \frac{f''(x)}{\sqrt{\rho^0(x)}} \in L_2(R), \end{aligned} \quad (4)$$

$$0 < C_4^{-1} < \varphi(x) < C_4, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \theta_0(x) \varphi(x) = 1, \quad \varphi'(x) \in W_2^1(R).$$

Функции  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  связаны неравенствами

$$(\varphi'(x))^2 < \delta (f'(x))^3, \quad 0 < \delta < 1.$$

Существование таких функций нетрудно проверить.

*Теорема.* Пусть начальные данные (2) удовлетворяют условиям (3) и

$$(u^0 - f, \theta^0 \varphi - 1) \in W_2^1(R), \quad \theta_x^0 \in L_2(R),$$

$$\rho^0(x) \in L_1(0; \infty), \quad \frac{\rho_x^0}{\rho^0} \in L_2(R), \quad (\rho_x^0)^2 \leq C(\rho^0)^3 \text{ при } x \in (0; \infty).$$

Тогда на любом конечном интервале времени  $[0; T]$ ,  $0 < T < \infty$ , существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(3), которое удовлетворяет уравнениям и начальным данным почти всюду, причем

$$(\sqrt{\rho^0}(u - f), \sqrt{\rho^0}(\varphi \theta - 1), u_x, v_x, \rho^0 \theta_x) \in L_\infty(0, T; L_2(R)),$$

$$(\sqrt{\rho^0} u_t, (\rho^0)^{3/2} \theta_t, u_{xx}, v_x, \sqrt{\rho^0} \theta_x, \sqrt{\rho^0} \theta_{xx}) \in L_2(\Pi), \quad \Pi = R \times (0, T),$$

$\theta(x, t)$ ,  $v(x, t)$  — строго положительные функции,  $\rho^0(x)\theta(x, t)$ ,  $v(x, t)$  — ограниченные функции.

Доказательство существования обобщенного решения «в целом» по времени основывается на выводе глобальных априорных оценок, положительные постоянные в которых  $C, C_i, K_i$  зависят от начальных данных и условий теоремы, но не зависят от промежутка существования локального решения. Глобальные априорные оценки позволяют продолжить локальное решение [2] на весь промежуток времени.

2. *Априорные оценки.* Не нарушая общности, для простоты, положим все физические постоянные равными единице.

Сделаем замену, полагая  $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\varphi(x)}$ , тогда система уравнений (1) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\varphi} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= 0, \quad v = \frac{\rho^0}{\rho}, \\ \rho^0 \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{\varphi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\varphi v} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{\varphi} \frac{\partial p}{\partial \xi}, \quad p = \rho^0 \frac{\theta}{v}, \\ \rho^0 \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{1}{\varphi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\varphi v} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) - p \frac{1}{\varphi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\varphi^2 v} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

*Лемма 1.* При выполнении условий теоремы имеет место оценка

$$U(t) + \int_0^t W(\tau) d\tau \leq E = \text{const} > 0, \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

где

$$U(t) = \int \left\{ \frac{1}{2} \rho^0 (u - f)^2 + \rho^0 (\varphi \theta - \ln \varphi \theta - 1) + \rho^0 (v - \ln v - 1) \right\} dx, \quad W(t) = \int \left\{ \frac{\theta_x^2}{v \theta^2} + \frac{u_x^2}{v \theta} + \rho^0 \frac{\theta}{v} f'(x) \right\} dx.$$

Интегралы по  $x$  берутся от  $-\infty$  до  $\infty$ .

*Доказательство.* Умножим первое уравнение системы (5) на  $\rho^0 \left( 1 - \frac{1}{v} \right)$ , второе на  $\varphi(u - f)$ ,

третье на  $\left( \varphi - \frac{1}{\theta} \right)$ , сложим и проинтегрируем по  $R$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \left\{ \frac{1}{2} \rho^0 \varphi (u - f)^2 + \rho^0 (\varphi \theta - \ln \varphi \theta - 1) + \rho^0 (v - \ln v - 1) \right\} d\xi + \\ + \int \left\{ \frac{\theta_\xi^2}{\varphi^2 v \theta^2} + \frac{u_\xi^2}{\varphi^2 v \theta} + \rho^0 \frac{\theta}{v} f'(\xi) \right\} d\xi = \\ = \int \left\{ \frac{\rho^0}{\varphi} u_\xi + \frac{1}{\varphi v} u_\xi f' - \frac{\theta_\xi \varphi'}{v \varphi^3 \theta} \right\} d\xi = \sum_{k=1}^3 I_k. \end{aligned} \quad (7)$$

Оценим каждый интеграл  $I_k$  в правой части (7), используя интегрирование по частям, неравенства вложения, Юнга, Гельдера, Коши, условия теоремы и (4):

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{\rho^0}{\varphi} (u-f)_\xi d\xi + \int \frac{\rho^0}{\varphi} f' d\xi \leq C_5 \left( \left\| \sqrt{\rho^0 \varphi} (u-f) \right\|^2 + 1 \right), \\
I_2 &= \int f' \frac{\partial \ln v}{\partial t} d\xi = -\frac{d}{dt} \int f' (v - \ln v - 1) d\xi + \int \frac{f'}{\varphi} u_\xi d\xi \leq \\
&\leq -\frac{d}{dt} \int f' (v - \ln v - 1) d\xi + C_6 \left( \left\| \sqrt{\rho^0 \varphi} (u-f) \right\|^2 + 1 \right), \\
I_3 &= -\int \frac{\theta_\xi \varphi'}{v^{1/2} \theta \varphi^3} d\xi + \int \frac{\theta_\xi \varphi' (v^{1/2} - 1)}{v^{1/2} \theta \varphi^3 v^{1/2} \sqrt{v - \ln v - 1}} \sqrt{v - \ln v - 1} d\xi.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\frac{|v^{1/2} - 1|}{v^{1/2} \sqrt{v - \ln v - 1}} \leq C_7, \quad \forall (x, t) \in \Pi.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \left( \int \frac{\theta_\xi^2}{v \theta^2 \varphi^2} d\xi \right)^{1/2} \left( \int \frac{\varphi'^2}{\varphi^4} d\xi \right)^{1/2} + C_7 \left( \int \frac{\theta_\xi^2}{v \theta^2 \varphi^2} d\xi \right)^{1/2} \left( \int \frac{\varphi'^2}{\varphi^4} (v - \ln v - 1) d\xi \right)^{1/2} \leq \\
&\leq \varepsilon \int \frac{\theta_\xi^2}{v \theta^2 \varphi^2} d\xi + C_\varepsilon \left( \int \rho^0 (v - \ln v - 1) d\xi + 1 \right).
\end{aligned}$$

Выбираем  $\varepsilon < 1$ ,  $\delta < 1/C_3^2$ . Проинтегрируем по времени полученное из (7) неравенство. Применяя лемму Гронуолла и переходя к исходным переменным  $x$ , выводим оценку (6). Лемма доказана.

Из первого и второго уравнений системы (1) получим вспомогательное соотношение между искомыми функциями [3, 4]:

$$v(x, t) = I^{-1}(t) B^{-1}(x, t) \left[ 1 + \int_0^t \rho^0(x) \theta(x, \tau) I(\tau) B(x, \tau) d\tau \right], \quad (8)$$

$$\text{где } I(t) = \frac{1}{v(x_0, t)} \exp \left\{ \int_0^t \rho^0 \frac{\theta}{v}(x_0, \tau) d\tau \right\}, \quad B(x, t) = \exp \left\{ \int_{x_0}^x \rho^0(\xi) (u^0(\xi) - u(\xi, t)) d\xi \right\},$$

$x_0 = x_0(t)$ ,  $x$  – произвольно выбранные точки на числовой прямой.

Следуя [3], разобьем числовую ось  $R$  и соответственно полосу  $\Pi$  на конечные отрезки и прямоугольники:

$$\begin{aligned}
R &= \bigcup_{N=-\infty}^{\infty} \bar{\Omega}_N, \quad \Pi = \bigcup_{N=-\infty}^{\infty} \bar{Q}_N, \\
\Omega_N &= \{x \mid N < x < N+1\}, \quad Q_N = \Omega_N \times (0, T), \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots
\end{aligned}$$

*Лемма 2.* При выполнении условий теоремы имеют место оценки:

$$0 < K_1^{-1} \leq B(x, t) \leq K_1, \quad 0 < K_2^{-1} \leq I(t) \leq K_2, \quad \forall (x, t) \in \Pi.$$

*Доказательство.* Будем изучать соотношения между искомыми функциями на каждом  $Q_N$ . Воспользуемся произволом точки  $x_0$ . Предполагаем, что  $x_0$  выбрана в  $\Omega_N$ .

Ввиду того, что точки  $x_0$  и  $x$  из одного отрезка  $\bar{\Omega}_N$ , по неравенству Коши, используя (6) и условия теоремы, имеем:

$$\left| \int_{\alpha(t)}^x (u_0(\xi) - u(\xi, t)) d\xi \right| \leq \left( \int_N^{N+1} (u_0 - f)^2 d\xi \right)^{1/2} + \left( \int_N^{N+1} (u - f)^2 d\xi \right)^{1/2} \leq (2E)^{1/2} + C.$$

Отсюда вытекают оценки для функции  $B(x, t)$ , не зависящие от выбора прямоугольника  $\bar{Q}_N$ .

Далее, разобьем числовую ось на две полуоси:  $R = \Omega_1 \cup \Omega_2$  и соответственно полосу  $\Pi = Q_1 \cup Q_2$ , где  $\Omega_1 = (-\infty, 0)$ ,  $\Omega_2 = (0, \infty)$ ,  $Q_i = \Omega_i \times (0, T)$ . Теперь будем предполагать, что точка  $x_0$  выбрана в соответствующей области  $\Omega_i$  ( $i=1, 2$ ).

Рассмотрим сначала область  $\Omega_1 = (-\infty, 0)$ . Здесь  $C^{-1} \leq \rho^0(x) \leq C$ . Разобьем  $\Omega_1$  на единичные отрезки. Тогда из (6) следуют неравенства [3, 4]:

$$C^{-1} \leq \int_N^{N+1} \rho^0 v \, dx \leq C, \quad C^{-1} \leq \int_N^{N+1} \rho^0 \theta \, dx \leq C. \quad (9)$$

Перепишем (8) следующим образом:

$$v(x, t)I(t) = B^{-1}(x, t) \left[ 1 + \int_0^t \rho^0(x) \theta(x, \tau) B(x, \tau) I(\tau) d\tau \right]. \quad (10)$$

Умножим обе части этого равенства на  $\rho^0(x)$  и проинтегрируем по  $x$  от  $N$  до  $N+1$ . Учитывая оценки для функции  $B(x, t)$ , (9), после применения леммы Гронуолла имеем утверждение леммы.

Теперь рассмотрим  $\Omega_2 = (0, \infty)$ . В этой области об ограниченности снизу начальной плотности говорить нельзя. Заметим, что в  $\Omega_2$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \rho^0 v \, dx &\leq C \left[ \int_0^\infty \rho^0 (v - \ln v - 1) dx + \int_0^\infty \rho^0 dx \right] \leq C_8, \\ \int_0^\infty \rho^0 \theta \, dx &\leq C \left[ \int_0^\infty \rho^0 (\theta - \ln \theta - 1) dx + \int_0^\infty \rho^0 dx \right] \leq C_9 \end{aligned} \quad (11)$$

в силу неотрицательности функций  $\rho^0(v - \ln v - 1)$ ,  $\rho^0(\theta - \ln \theta - 1)$ .

Разобьем область  $\Omega_2$  на две:

$$A_1(t) = \{x \in \Omega_2 : v(x, t) < \varepsilon\}, \quad A_2(t) = \{x \in \Omega_2 : v(x, t) \geq \varepsilon\}.$$

Обозначим  $B = (0, b)$ , где  $b \in \Omega_2$  — фиксированная точка. Из (6) следует неравенство

$$\int_{B \cap A_1} \rho^0 v \, dx - \int_{B \cap A_1} \rho^0 \ln v \, dx - \int_{B \cap A_1} \rho^0 \, dx \leq C.$$

Отсюда  $\ln \frac{1}{\varepsilon} \int_{B \cap A_1} \rho^0 dx \leq C$ . Применяя теорему о среднем, имеем:  $\mu(B \cap A_1) \leq \frac{C}{\rho^0(\xi) \cdot \ln \frac{1}{\varepsilon}}$ , где  $\xi \in B$ .

Здесь  $\mu(B \cap A_1)$  — мера множества  $B \cap A_1$ . Выбираем  $\varepsilon$  достаточно малым. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \rho^0 v \, dx &= \int_{B \cap A_1} \rho^0 v \, dx + \int_{B \cap A_2} \rho^0 v \, dx + \int_{(0, \infty) \setminus B} \rho^0 v \, dx \geq \int_{B \cap A_2} \rho^0 v \, dx \geq \\ &\geq \varepsilon \rho^0(\xi_1) \mu(B \cap A_2) = \varepsilon \rho^0(\xi_1) [\mu(B) - \mu(B \cap A_1)] > C \end{aligned}$$

в силу выбора  $\varepsilon$  и  $\xi_1 \in B$ . Учитывая полученное неравенство, соотношения (11), из (10), умножая его на  $\rho^0(x)$  и интегрируя по  $x$  от 0 до  $+\infty$ , выводим утверждение леммы для области  $\Omega_2$ . Таким образом, лемма полностью доказана.

При доказательстве леммы 2 получены оценки:

$$\int_N^{N+1} \rho^0(x) v(x, t) \, dx \leq K_3, \quad \int_N^{N+1} \rho^0(x) \theta(x, t) \, dx \leq K_4, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (12)$$

Пусть  $h(x, t)$  — непрерывная функция. Введем обозначения:

$$M_h(t) = \max_{|x| < \infty} h(x, t), \quad m_h(t) = \min_{|x| < \infty} h(x, t).$$

*Лемма 3.* При выполнении условий теоремы имеют место оценки:

$$m_v(t) \geq K_5, \quad m_\theta(t) \geq K_6, \quad M_v(t) \leq K_7, \quad \forall t \in [0, T].$$

*Доказательство.* Ограниченность удельного объема снизу следует из представления (8) с учетом оценок леммы 2. Строгая положительность температуры вытекает из уравнения теплопроводности системы (1). Докажем ограниченность удельного объема сверху.

Из соотношения (8) и оценок леммы 2 вытекает неравенство

$$M_v(t) \leq C_{10} \left[ 1 + \int_0^t M_{\rho^0}(\tau) d\tau \right]. \quad (13)$$

Имеет место оценка [4, 5]:  $M_{\rho^0}(t) \leq C_\varepsilon A(t) M_v(t) + C$ , где

$$A(t) = \int \frac{\theta_x^2}{v\theta^2} dx. \quad (14)$$

Из (14) и (13) находим

$$M_v(t) \leq C_{11} \left[ 1 + \int_0^t A(\tau) M_v(\tau) d\tau \right].$$

Применяя лемму Гронуолла с учетом (6), выводим ограниченность удельного объема сверху. Лемма доказана.

Из (14) и леммы 3 вытекает оценка:

$$\int_0^t M_{\rho^0}(\tau) d\tau \leq K_8, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (15)$$

*Лемма 4.* При выполнении условий теоремы имеют место оценки:

$$\int_0^T (\|u_x(t)\|^2 + \|H_x(t)\|^2) dt \leq K_9. \quad (16)$$

*Доказательство.* Умножим второе уравнение системы (1) на  $(u - f)$  и проинтегрируем по  $R$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int \rho^0 (u - f)^2 dx + \int \frac{1}{v} u_x^2 dx + \int \rho^0 \frac{\theta}{v} f_x dx = \\ & = \int \left( \frac{1}{v} u_x f_x + \rho^0 \frac{\varphi\theta - 1}{\varphi v} u_x + \rho^0 \frac{u_x}{\varphi v} \right) dx = J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned} \quad (17)$$

Оценим каждое  $J_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ), используя (4), (6), (15), лемму 3:

$$J_1 \leq \delta_1 \int \frac{1}{v} u_x^2 dx + C, \quad \delta_1 < \frac{1}{2}.$$

Для оценки  $J_2$  разобьем числовую ось  $R$  на области:

$$\begin{aligned} \Omega_1(t) &= \{x \in R : \varphi\theta(x, t) > C_0\}, \\ \Omega_2(t) &= \{x \in R : \varphi\theta(x, t) \leq C_0, \varphi\theta(x, t) \neq 1\}, \quad C_0 = \text{const} > 1, \\ \Omega_3(t) &= \{x \in R : \varphi\theta(x, t) = 1\}. \end{aligned}$$

Справедливы неравенства [4]

$$\Omega_1(t): \frac{\varphi\theta - 1}{\varphi\theta - \ln \varphi\theta - 1} < C_{12}, \quad \Omega_2(t): \frac{|\varphi\theta - 1|}{\sqrt{\varphi\theta - \ln \varphi\theta - 1}} < C_{13}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{\Omega_1(t)} \rho^0 \frac{\varphi\theta - 1}{\varphi\theta - \ln \varphi\theta - 1} (\varphi\theta - \ln \varphi\theta - 1) \frac{u_x}{v} dx + \\ &+ \int_{\Omega_2(t)} \rho^0 \frac{\varphi\theta - 1}{\sqrt{\varphi\theta - \ln \varphi\theta - 1}} \sqrt{\varphi\theta - \ln \varphi\theta - 1} \frac{u_x}{v} dx \leq \delta_2 \int \frac{1}{v} u_x^2 dx + C_{\delta_2} M_{\rho^0} + C, \quad \delta_2 < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

При оценке следующего интеграла используем интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{d}{dt} \int \rho^0 \frac{\partial \ln v}{\partial t} dx = -\frac{d}{dt} \int \rho^0 (v - \ln v - 1) dx - \int \rho_x^0 (u - f) dx - \int \rho^0 f_x dx \leq \\ &\leq -\frac{d}{dt} \int \rho^0 (v - \ln v - 1) dx + C. \end{aligned}$$

Проинтегрируем (17) по  $t$ , используя полученные оценки для  $J_i$ ,  $i = \overline{1,3}$ . В итоге имеем утверждение леммы.

*Лемма 5.* При выполнении условий теоремы имеют место оценки:

$$\|v_x(t)\|^2 \leq K_{10}, \quad \forall t \in [0, T].$$

*Доказательство.* Следует из представления (8), после дифференцирования его по  $x$ .

Проводя аналогичные рассуждения, можно получить все необходимые для доказательства существования обобщенного решения априорные оценки. Единственность решения доказывается составлением однородного уравнения относительно разности двух возможных решений [4]. Теорема доказана.

#### References

1. Bai Shi-i. The magnetic gas dynamics and dynamics of plasma. — М.: Peace, 1964.
2. Iskenderova J.A. Local solvability of the degenerating equations of magnetic gas dynamics // News of National Academy of Science of Kyrgyz Republic. — 2001. — № 1–2. — P. 11–17.
3. Antontsev S.N., Kazhikhov A.V., Monakhov V.N. Boundary Problems of Heterogeneous Fluid Mechanics. — Novosibirsk: Science, 1983. — P. 319.
4. Iskenderova J.A., Smagulov Sh. The Cauchy problem for the equations of a viscous heat-conducting gas with degenerating density // Comput. Maths. and Math. Phys. — 1993. — Vol. 33. — № 8. — P. 1109–1117.

УДК 658.512.012.12:519.24:622.333

### Применение методов теории массового обслуживания при исследовании взаимодействия смежных производственных подсистем на горнодобывающих предприятиях

#### Application of methods of the queuing theory at research of interaction of adjacent industrial subsystems at the mining enterprises

Каренов Р.С.

*Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова (E-mail: karenov\_r@inbox.ru)*

Соңғы уақытта жаппай қызмет көрсету ілімі идеялары мен тәсілдері көптеген қолданбалы салаларда кеңінен таралғаны көрсетілген. Кен өнеркәсібіндегі жаппай қызмет көрсету жүйелерінің қалыптасу шарттары, олардың негізгі элементтері және сипаттамалары қарастырылған. Жаппай қызмет көрсету ілімі тәсілдері көмегімен кен ісіндегі тәжірибелік міндеттерді шешу бойынша әдістемелік басшылық жасауға ұмтылыс жасалған. Пайдалы қазбаларды ашық әдіспен игеру ерекшеліктерінің нақты мысалында жаппай қызмет көрсетудің кейбір жүйелерінің негізгі параметрлерін қалай есептеуге болатындығы көрсетілген. Үлкен жүйелер қасиеттерінің бірі ретіндегі көмір шахтасының өндірістік құрылымын талдау барысында жаппай қызмет көрсету ілімінің математикалық аппаратын қолдана отырып, көмір өндіру кәсіпорының өндірістік бөлімшелері арасындағы өзара байланыс зерттелген. Ұсынылған тәсілдер мен есептеулер әдістері Қарағанды бассейні көмір шахталарының жұмыс тәжірибесінен алынған мысалдармен кескінделген.

It is underlined that lately ideas and methods of the queuing theory widely extend in many applied areas. Problems of mining industry which are solved by the queuing theory are revealed. Conditions of formation of queuing systems, their basic elements and characteristics are considered. Creating a methodical management under the decision of practical problems in mining by means of methods of the queuing theory is attempted. On a concrete example of specificity of extraction of a mineral by open way it is shown how to calculate key parameters of some queuing systems. Studying industrial structure of mine as one of properties of the big systems, interdependence between industrial divisions of the coal enterprise with application of mathematical apparatus of the queuing theory is investigated. Offered methods and receptions of calculations are illustrated by the examples taken from practice of work of collieries of the Karaganda pool.

Теория массового обслуживания в последние годы быстро развивается. Расширился круг вопросов, решаемых с помощью ее методов. По мере развития аналитического аппарата теории массового обслуживания выявилось, что постановки задач ее имеют весьма широкий характер, поскольку к ним