УДК 517.95

Б.С.Кошкарова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В ДРОБНОМ ПРОСТРАНСТВЕ О.В.БЕСОВА $B^{\alpha}_{p,1}(G)$

Мақалада кейбір сызықтық емес интегралдық теңдеуінің О.В.Бесов бөлшекті кеңістікте қысып бейнелеу әдісі көмегімен шешімі бар және жалғыз болатыны туралы теорема дәлелденген. Сондай-ақ оның ішіне кіретін операторлардың қасиеттері қарастырылған.

In given article by means of principle of the compressed images the solubility of one nonlinear integral equation in O.V.Besov's fractional space is proved. For this are researched the characteristic all operator, falling into given equation.

1. Предварительные сведения

Пусть в области $G = G\{w : |w| < 1\}$ комплекснозначной переменной $z = x + iy$ задано интегральное уравнение

$$\rho(w) = S\rho(w), \tag{1.1}$$

с нелинейным оператором

$$S\rho(w) = q(w)\left(\Pi\rho - \Pi_1\rho\right) + \mathrm{T}_1\rho - 2\overline{\mathrm{T}_1\rho} + \Phi_0'(w), \tag{1.2}$$

где

$$q(w) = \frac{\overline{\Pi\rho} - \overline{\Pi_1\rho}}{D\rho + \sqrt{\left(D\rho\right)^2 + \left(\overline{\Pi\rho} - \overline{\Pi_1\rho}\right)^2}},\ |q(w)| \le q < \frac{1}{2}, \tag{1.3}$$

$$\Pi\rho = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\rho(\zeta)}{(\zeta - w)^2} d\xi d\eta,\ \zeta = \xi + i\eta, \tag{1.4}$$

$$\Pi_1\rho = -\frac{w}{\pi}\iint_G \frac{\overline{\zeta}\overline{\rho(\zeta)}}{(1 - \overline{\zeta}w)^2} d\xi d\eta, \tag{1.5}$$

$$D\rho = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\rho(\zeta)}{(\zeta - w)(\zeta - \overline{w})} d\xi d\eta - \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\rho(\zeta)(1 - \zeta w - \zeta\overline{w})}{(1 - \zeta w)(1 - \zeta\overline{w})} d\xi d\eta + \\ + \frac{2}{w - \overline{w}}\int_w^{\overline{w}} \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\rho(\zeta)}{1 - \zeta\overline{t}} d\xi d\eta d\overline{t} + \frac{\overline{\Phi_0(w)} - \Phi_0(w)}{w - \overline{w}}, \tag{1.6}$$

$$\mathrm{T}_1\rho = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\overline{\rho(\zeta)}}{1 - \overline{\zeta}w} d\xi d\eta, \tag{1.7}$$

$$\Phi_0(w) = \pi r_0^2 \ln(1 - w) - \pi r_1^2 \ln(1 + w) - \frac{\pi}{2}(r_0^2 + r_1^2)t_0 \ln(1 - wt_0) - \frac{\pi}{2}(r_0^2 + r_1^2)t_0 \ln(1 - w\overline{t_0}), \tag{1.8}$$

а r_0, r_1 — положительные постоянные, такие что

$$r_0^2 + r_1^2 < \varepsilon, \tag{1.9}$$

здесь ε достаточно малая величина.

Уравнение (1.1) было получено при исследовании краевой задачи со свободной границей, возникающей при соударении осесимметрических струй идеальной несжимаемой жидкости гидродинамики. Рассмотрим разрешимость данного уравнения в дробных пространствах О.В.Бесова $B^{\alpha}_{p,1}(G)$, $1 < p < \infty,\ 0 < \alpha < 1$.

Определение 1. [1] Функция f принадлежит (изотропному) пространству О.В.Бесова $B^{\alpha}_{p,\theta}(G)$, $1 \le p \le \infty,\ 1 \le \theta \le \infty$, $0 < \alpha < 1$, если $f \in L_p(G)$ и конечна полунорма

$$\|f\|_{b^{\alpha}_{p,\theta}(G)} = \left(\iint |h|^{-2-\alpha\theta} \left\|\Delta_h f(w)\right\|^{\theta}_{L_p(G)} dS^0_h \right)^{\frac{1}{\theta}},$$

где S^0 — круг $|h| < \delta$ ($\delta > 0$ — фиксированное число, которое можно считать достаточно малым).

При этом полагаем

$$\|f\|_{B^{\alpha}_{p,\theta}(G)} = \|f\|_{L_p(G)} + \|f\|_{b^{\alpha}_{p,\theta}(G)},$$

что является нормой элемента $f \in B^{\alpha}_{p,\theta}(G)$.

Лемма 1 [2]. Пусть $\bar{G}$ замыкание ограниченной области G взаимно отображается на замыкание $\bar{G}^*$ области $\bar{G}$ при помощи отображения $u = \phi(w)$, где $\phi \in C^l = C^{(l_\alpha)}(\bar{G})$, $l_\alpha = \max(1, \alpha + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, с якобианом $\dfrac{D(u)}{D(w)} > K > 0$, где K не зависит от $w \in G$.

Пусть еще $f(u) \in B^{\alpha}_{p,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$. Тогда

1) функция $F(w) = f(\phi(w))$ интегрируема в p-й степени на G (при $p = \infty$ ограничена). При этом

$$\|F(w)\|_{L_p(G)} \le \frac{1}{k^{1/p}} \|f\|_{L_p(G^*)};$$

2) функция $F(w) \in B^{\alpha}_{p,\theta}(G)$ и

$$\|F(w)\|_{B^{\alpha}_{p,\theta}(G)} \le c\|f(u)\|_{B^{\alpha}_{p,\theta}(G)},$$

где c — константа, зависящая от α, полунормы $\|\phi\|_{C^l}$ и K, а $l = l_\alpha$.

Лемма 2 [1]. Пусть $B_i \equiv B^{\alpha_i}_{p_i,\theta_i}(G)$, $i = 1,2$, где $1 \le p_i < \infty$, $0 < \alpha_i$, $\alpha_i p_i \le 2$, а $\theta_i = 1$, если $\alpha_i p_i = 2$ и $\dfrac{1}{p_i} - \dfrac{\alpha_i}{2} \le \dfrac{1}{\theta_i} \le 1$, если $\alpha_i p_i < 2$.

Пусть (для определенности) $\alpha_1 \le \alpha_2$ и имеет место $\dfrac{1}{r} \equiv \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} - \dfrac{\alpha_2}{2} \le 1$. Тогда произведение $f_1(w) \cdot f_2(w)$ произвольных функций $f_i(w) \in B_i$, $i = 1,2$ принадлежит $B^{\alpha_1}_{r,\theta}(G)$, $\theta = \max \theta_i$ и

$$\|f_1(w) \cdot f_2(w)\|_{B^{\alpha_1}_{r,\theta}(G)} \le c\|f_1\|_{B_1} \cdot \|f_2\|_{B_2}.$$

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1 [1]. Если функция $\rho(w) \in B^{\alpha}_{p,\theta}(G)$, $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $0 < \alpha < 1$, то сингулярный оператор (1.4) существует в смысле главного значения по Коши и является ограниченным оператором $B^{\alpha}_{p,\theta}(G)$ в себя, причем

$$\|\Pi\rho\|_{B^{\alpha}_{p,\theta}(G)} \le C_1 \|\rho\|_{B^{\alpha}_{p,\theta}(G)}. \tag{1.10}$$

Здесь и далее через C_i, $i \in \mathrm{N}$ будут обозначены различные константы, не зависящие от функции $\rho(w)$.

Теорема 2. [1] Если $\rho(w) \in B^{\alpha}_{p,\theta}(G)$, $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $0 < \alpha < 1$, то функция $g(w) = \mathrm{T}_1\rho(w)$ принадлежит пространству $B^{1+\alpha}_{p,\theta}(G)$ и

$$\|\mathrm{T}_1\rho\|_{B^{1+\alpha}_{p,\theta}(G)} \le C_2 \|\rho\|_{B^{\alpha}_{p,\theta}(G)}. \tag{1.11}$$

2. Свойства операторов (1.5), (1.6) и функции $\Phi_0(w)$ в B-классах

Теорема 3. Если $\rho \in B^{\alpha}_{p,\theta}(G)$, $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $0 < \alpha < 1$, то сингулярный оператор (1.5) является ограниченным оператором, отображающим пространство $B^{\alpha}_{p,\theta}(G)$ в себя, причем

$$\|\Pi_1\rho\|_{B^{\alpha}_{p,\theta}(G)} \le C_3 \|\rho\|_{B^{\alpha}_{p,\theta}(G)}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть $g_1(w)=\Pi_1\rho$, тогда

$$g_1(w)=-\frac{\overline{w}}{\pi}\iint\limits_G\frac{\overline{\zeta}\overline{\rho(\zeta)}}{\left(1-\overline{\zeta}w\right)^2}d\xi d\eta=-\frac{\overline{w}}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|\le\frac{1}{2}}\frac{\overline{\zeta}\overline{\rho(\zeta)}}{\left(1-\overline{\zeta}w\right)^2}d\xi d\eta-\frac{\overline{w}}{\pi}\iint\limits_{\frac{1}{2}<|\zeta|<1}\frac{\overline{\zeta}\overline{\rho(\zeta)}}{\left(1-\overline{\zeta}w\right)^2}d\xi d\eta=g_1^1(w)+g_1^2(w). \quad (2.2)$$

Оценим каждое слагаемое по норме $B^{\alpha}_{p,\theta}(G)$. При $w, w_1\in K$, $w\neq w_1$, обозначив через $w_1=w+h$, получим:

$$\Delta_h g_1^1(w)=-\frac{h}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|\le\frac{1}{2}}\frac{\overline{\zeta}\overline{\rho(\zeta)}}{\left(1-\overline{\zeta}w\right)^2\left(1-\overline{\zeta}(w+h)\right)}d\xi d\eta+$$

$$+\frac{h}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|\le\frac{1}{2}}\frac{\overline{\zeta}\overline{\rho(\zeta)}}{\left(1-\overline{\zeta}(w+h)\right)^2\left(1-\zeta w\right)}d\xi d\eta+\frac{\overline{h}}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|\le\frac{1}{2}}\frac{\overline{\zeta}\overline{\rho(\zeta)}}{\left(1-\overline{\zeta}w\right)\left(1-\overline{\zeta}(w+h)\right)}d\xi d\eta.$$

Отсюда

$$\left|\Delta_h g_1^1(w)\right|\le\frac{\left(2^{\frac{3}{p}}+2^{\frac{2}{p}-1}\right)|h|}{\pi^{\frac{1}{p}}}\|\rho\|_{L_p(G)},$$

тогда

$$\left\|g_1^1\right\|_{B^{\alpha}_{p,\theta}(G)}\le N_1\|\rho\|_{B^{\alpha}_{p,\theta}(G)}, \quad (2.3)$$

где N_1 — константа, не зависящая от функции $\rho(w)$. Далее через N_i, $i\in\mathrm{N}$ будут обозначены различные константы, не зависящие от функции $\rho(w)$.

Рассмотрим теперь функцию $g_1^2(w)$:

$$g_1^2(w)=-\frac{\overline{w}}{\pi}\iint\limits_{\frac{1}{2}<|\zeta|<1}\frac{\overline{\zeta}\overline{\rho(\zeta)}}{\left(1-\overline{\zeta}w\right)^2}d\xi d\eta=-\frac{\overline{w}}{\pi}\iint\limits_{\frac{1}{2}<|\zeta|<1}\frac{\frac{1}{\overline{\zeta}}\overline{\rho(\zeta)}}{\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}-w\right)^2}d\xi d\eta=-\frac{\overline{w}}{\pi}\iint\limits_{1<|\zeta|<2}\frac{\frac{1}{\zeta\overline{\zeta}^2}\overline{\rho\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)}}{(\zeta-w)^2}d\xi d\eta. \quad (2.4)$$

Обозначим через G_2 круговое кольцо $1<|\zeta|<2$. Функции $\frac{1}{\overline{\zeta}}$, $\frac{1}{\zeta\overline{\zeta}^2}$ достаточно гладкие в области G_2, следовательно, в силу леммы 1 имеем $\rho\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)\equiv\rho_1(\zeta)\in B^{\alpha}_{p,\theta}(G_2)$, при этом

$$\|\rho_1(\zeta)\|_{B^{\alpha}_{p,\theta}(G_2)}\le N_2\|\rho\|_{B^{\alpha}_{p,\theta}(G)}. \quad (2.5)$$

Кроме того, согласно лемме 2 и неравенству (2.5), получим, что

$$\rho_2(\zeta)=\frac{1}{\zeta\overline{\zeta}^2}\rho\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)\in B^{\alpha}_{p,\theta}(G_2), \quad (2.6)$$

$$\left\|\rho_2(\zeta)\right\|_{B^{\alpha}_{p,\theta}(G_2)}\le N_3\|\rho\|_{B^{\alpha}_{p,\theta}(G)}. \quad (2.7)$$

Пусть теперь $\rho^*(\zeta)$ — продолжение $\rho_2(\zeta)$ в круг $|\zeta|<1$ с сохранением класса, т.е.

$$\rho^*(\zeta)\in B^{\alpha}_{p,\theta}(S),\ ,1<p<\infty,\ \ 1\le\theta\le\infty\quad 0<\alpha<1,$$

$$\left\|\rho^*(\zeta)\right\|_{B^{\alpha}_{p,\theta}(S)}\le N\|\rho\|_{B^{\alpha}_{p,\theta}(G)}, \quad (2.8)$$

где S обозначает круг $|\zeta|<2$.

Тогда из равенства (2.4) имеем

$$g_1^2(w)=\overline{w}\Pi_S\rho_2,$$

$$\overline{w}\Pi_G\rho^*+K\rho=\overline{w}\Pi_S\rho^*,\quad K\rho=g_1^2(w). \quad (2.9)$$

Согласно теореме 1 и неравенству (2.8) из равенства (2.9) получим

$$\left\|g_1^2(w)\right\|_{B^\alpha_{p,\theta}(G)} \le \left\|\Pi_G\rho^*\right\|_{B^\alpha_{p,\theta}(G)} + \left\|\Pi_S\rho^*\right\|_{B^\alpha_{p,\theta}(G)} \le N_4\left\|\rho^*\right\|_{B^\alpha_{p,\theta}(S)} \le N_5\left\|\rho\right\|_{B^\alpha_{p,\theta}(G)}. \tag{2.10}$$

Из равенства (2.2) на основании оценок (2.3), (2.10) следует оценка (2.1).

Таким образом, $\Pi_1\rho$ — ограниченный оператор из $B^\alpha_{p,\theta}(G)$ в $B^\alpha_{p,\theta}(G)$. Теорема полностью доказана.

Рассмотрим функцию

$$\overline{\Phi_0'(w)} = \frac{\pi r_0^2}{\overline{w}-1} + \frac{\pi r_1^2}{\overline{w}+1} + \frac{\pi\left(r_0^2+r_1^2\right)t_0}{2(\overline{w}-t_0)} + \frac{\pi\left(r_0^2+r_1^2\right)\overline{t_0}}{2(\overline{w}-\overline{t_0})}.$$

Лемма 3. Функция $\overline{\Phi_0'(w)}$ принадлежит классу $B^\alpha_{p,1}(G)$, $1<p<2$, $0<\alpha<\dfrac{2}{p}-1$, причем

$$\left\|\Phi_0'(w)\right\|_{B^\alpha_{p,1}(G)} \le 2N_6\pi\left(r_0^2+r_1^2\right). \tag{2.11}$$

Доказательство. Поскольку для любой точки t_i множества $t_* = \{1, t_0, -1, \overline{t_0}\}$

$$\left(\iint_K \left|\frac{1}{\overline{w}-t_i}\right|^p dG_w\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\iint |w|^{-p}\, dS_w\right)^{\frac{1}{p}},$$

где S, как и прежде круг $|w|<2$, то при $p<2$

$$\left\|\frac{1}{\overline{w}-t_i}\right\|_{L_p(G)} \le \frac{2^{\frac{5}{p}-1}\pi^{\frac{1}{p}}}{(2-p)^{\frac{1}{p}}}. \tag{2.12}$$

Далее

$$\left\|\frac{1}{\overline{w}-t_i}\right\|_{b^\alpha_{p,1}(G)} = \iint_{S^0} \frac{\left\|\Delta_{h^{\frac{1}{\overline{w}-t_i}}}\right\|_{L_p(G)}}{|h|^{2+\alpha}} dS_h^0 = \iint_{S^0}\frac{1}{|h|^{2+\alpha}}\left(\iint_G\left|\frac{1}{\overline{w}-t_i} - \frac{1}{\overline{w}+\overline{h}-t_i}\right|^p dG_w\right)^{\frac{1}{p}} dS_h^0 \le$$

$$\le \iint_{S^0}\frac{1}{|h|^{1+\alpha}}\left(\iint_G \left(|w-1||w+h-1|\right)^{-p} dG_w\right)^{\frac{1}{p}} dS_h^0 \le \iint_{S^0}\frac{1}{|h|^{1+\alpha}}\left(\iint_S\left(|w||w+h|\right)^{-p} dS_w\right)^{\frac{1}{p}} dS_h^0.$$

Так как при $1<p<2$ [3]

$$\iint_S \left(|w||w+h|\right)^{-p} dS_w \le M_p|h|^{2-2p},$$

где

$$M_p = \left(\frac{8}{2p-2} + \frac{2^{2p-1}+2^{p+1}3^{2-p}}{2-p}\right)\pi,$$

тогда при постоянной α, удовлетворяющей неравенству

$$0<\alpha<\frac{2-p}{p},$$

имеем

$$\left\|\frac{1}{\overline{w}-t_i}\right\|_{b^\alpha_{p,1}(G)} \le M_p^{\frac{1}{p}}\iint_{S_0}\frac{dS_h^0}{|h|^{3+\alpha-\frac{2}{p}}} \le \frac{2^{\frac{2}{p}-\alpha}M_p^{\frac{1}{p}}}{\frac{2}{p}-1-\alpha}|\delta|^{\frac{2}{p}-1-\alpha}. \tag{2.13}$$

Тогда, учитывая неравенства (2.12), (2.13), для любой точки множества t_* получаем:

$$\left\|\frac{1}{\overline{w}-t_i}\right\|_{B^\alpha_{p,1}(G)} \le \left\|\frac{1}{\overline{w}-t_i}\right\|_{b^\alpha_{p,1}(G)} + \left\|\frac{1}{\overline{w}-t_i}\right\|_{L_p(G)} \le \frac{2^{\frac{5}{p}-1}\pi^{\frac{1}{p}}}{(2-p)^{\frac{1}{p}}} + \frac{2^{\frac{2}{p}-\alpha}M_p^{\frac{1}{p}}}{\frac{2}{p}-1-\alpha}|\delta|^{\frac{2}{p}-1-\alpha} = N_6. \tag{2.14}$$

Следовательно, функция $\Phi_0'(w)$ будет принадлежать классу $B_{p,1}^{\alpha}(G)$, если $1<p<2$, $0<\alpha<\dfrac{2}{p}-1$, и на основании (2.14) имеет место неравенство (2.11), что и требовалось доказать.

Следует отметить, что

$$N_6>\frac{1}{2}, \tag{2.15}$$

так как для $\forall w\in G$ и $t_i\in t_*$ выполняется неравенство

$$0<|w-t_i|<2.$$

Теорема 4. Пусть функция $\rho\in B_{p,1}^{\alpha}(G),\ 1<p<2,\ 0<\alpha<\dfrac{2}{p}-1$, тогда сингулярный оператор D_ρ, определяемый равенством (1.6), является ограниченным в $B_{p,1}^{\alpha}(G)$ и действует из $B_{p,1}^{\alpha}(G)$ в $B_{p,1}^{\alpha}(G)$.

Доказательство. Обозначим через d_i, $i=\overline{1,4}$, слагаемые, входящие в состав оператора D_ρ, т.е.

$$D\rho=d_1(w)+d_2(w)+d_3(w)+d_4(w). \tag{2.16}$$

Оценим L_p-норму слагаемого $d_1(w)$. Для этого запишем его так:

$$d_1(w)=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\rho(\zeta)-\rho(w)}{(\zeta-w)(\zeta-\overline{w})}d\xi d\eta-\frac{\rho(w)}{\pi}\iint_G\frac{1}{(\zeta-w)(\zeta-\overline{w})}d\xi d\eta. \tag{2.17}$$

Пусть S — круг $|\zeta|<2$ с центром в нуле. Тогда для первого члена (2.17) имеем

$$\left(\iint_G\left|-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{\rho(\zeta)-\rho(w)}{(\zeta-w)(\zeta-\overline{w})}dG_\zeta\right|^p dG_w\right)^{\frac{1}{p}}\le\frac{1}{\pi}\left(\iint_G\left|\iint_S\left|\frac{\rho(\zeta+w)-\rho(w)}{\zeta(w-\overline{w})}\right|dS_\zeta\right|^p dG_w\right)^{\frac{1}{p}}\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\iint_S\frac{\left\|\Delta_\zeta\rho(w)\right\|_{L_p(E)}}{|\zeta|}\left(\iint_G\frac{dG_w}{|w-\overline{w}|}\right)dS_\zeta\le 4M_\rho\iint_S\frac{dS_\zeta}{|\zeta|^{1-\alpha}}\le M_\alpha\|\rho\|_{B_{p,1}^{\alpha}(G)}, \tag{2.18}$$

где индекс у M_α указывает на зависимость постоянной M от α,

$$M_\rho=\sup\frac{\left\|\Delta_\zeta\rho(w)\right\|_{L_p(E)}}{|\zeta|^\alpha}. \tag{2.19}$$

Заметим, что $M_\rho<\infty$ в силу вложения [4]

$$B_{p,1}^{\alpha}(G)\to B_{p,1}^{\alpha}(E). \tag{2.20}$$

Далее, воспользовавшись формулой Грина и равенством

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\overline{\zeta}d\zeta}{\zeta-w}=0,\ \forall w\in G,\ \Gamma=\partial G,$$

вычислим последний интеграл в (2.17):

$$\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{d\xi d\eta}{(\zeta-w)(\zeta-\overline{w})}=\frac{1}{\pi(w-\overline{w})}\left(\iint_G\frac{d\xi d\eta}{\zeta-w}-\iint_G\frac{d\xi d\eta}{\zeta-\overline{w}}\right)=$$

$$=\frac{1}{w-\overline{w}}\left(w-\overline{w}+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\overline{\zeta}d\zeta}{\zeta-w}-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\overline{\zeta}d\zeta}{\zeta-\overline{w}}\right)=1. \tag{2.21}$$

Тогда для второго члена в (2.17) имеем

$$\|\rho(w)\|_{L_p(G)}\le M\|\rho(w)\|_{B_{p,1}^{\alpha}(G)}. \tag{2.22}$$

Следовательно, для слагаемого $d_1(w)$ из (2.17) в силу неравенства Минковского и оценок (2.18), (2.22) получим

$$\|d_1(w)\|_{L_p(G)}\le N_7\|\rho(w)\|_{B_{p,1}^{\alpha}(G)}. \tag{2.23}$$

Перейдем к оценке полунормы функции $d_1(w)$ в $B^{\alpha}_{p,1}(G)$. Для $\forall w \in G$ и $h \neq 0$ имеем

$$\Delta_h d_1(w) = -\frac{\overline{h}}{\pi}\iint_G \frac{\rho(\zeta)-\rho(w)}{(\zeta-w)(\zeta-\overline{w})(\zeta-(\overline{w}+\overline{h}))}d\xi d\eta - \frac{h}{\pi}\iint_G \frac{(\rho(\zeta)-\rho(w+h))}{(\zeta-w)(\zeta-(w+h))(\zeta-(\overline{w}+\overline{h}))}d\xi d\eta -$$
$$-\frac{\overline{h}\rho(w)}{\pi}\iint_G \frac{d\xi d\eta}{(\zeta-w)(\zeta-\overline{w})(\zeta-(\overline{w}+\overline{h}))} - \frac{h\rho(w+h)}{\pi}\iint_G \frac{d\xi d\eta}{(\zeta-w)(\zeta-(w+h))(\zeta-(\overline{w}+\overline{h}))}. \qquad (2.24)$$

Для первого слагаемого находим

$$\iint_{S^0}\frac{1}{|h|^{2+\alpha}}\left(\iint_G \left|\frac{\overline{h}}{\pi}\iint_G \frac{\rho(\zeta)-\rho(w)}{(\zeta-w)(\zeta-\overline{w})(\zeta-(\overline{w}+\overline{h}))}d\xi d\eta\right|^p dG_w\right)^{\frac{1}{p}} dS^0_h \leq$$
$$\leq \frac{1}{\pi}\iint_{S^0}\frac{1}{|h|^{1+\alpha}}\left(\iint_G \left|\iint_S \frac{\rho(\zeta+w)-\rho(w)}{|\zeta||\zeta-(\overline{w}-w)||\zeta-(\overline{w}+\overline{h}-w)|}d\xi d\eta\right|^p dG_w\right)^{\frac{1}{p}} dS^0_h \leq$$
$$\leq \frac{1}{\pi}\iint_{S^0}\frac{1}{|h|^{1+\alpha}}\left(\iint_S \frac{\left\|\Delta_\zeta \rho(w)\right\|_{L_p(E)}}{|\zeta||\zeta-(\overline{w}-w)||\zeta-(\overline{w}+\overline{h}-w)|}dS_\zeta\right)dS^0_h \leq$$
$$\leq \frac{1}{\pi}\iint_S \frac{\left\|\Delta_\zeta \rho(w)\right\|_{L_p(E)}}{|\zeta||\zeta-(\overline{w}-w)|}\left(\iint_{S^0}\frac{dS^0_h}{|h|^{1+\alpha}\,|h-(\zeta+w-\overline{w})|}\right)dS_\zeta \leq \frac{M'_\alpha}{\pi}\iint_S \frac{\left\|\Delta_\zeta \rho(w)\right\|_{L_p(E)}}{|\zeta||\zeta-(\overline{w}-w)|^{1+\alpha}}dS_\zeta \leq$$
$$\leq M'_\alpha \|\rho\|_{b^{\alpha}_{p,1}(E)}\iint_S \frac{|\zeta|}{|\zeta-(\overline{w}-w)|^{1+\alpha}}dS_\zeta \leq \frac{2^{3-2\alpha}}{1-\alpha}M'_\alpha\|\rho\|_{b^{\alpha}_{p,1}(G)} \leq N_8\|\rho\|_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}. \qquad (2.25)$$

Здесь мы воспользовались обобщенным неравенством Минковского и вложением (2.20).

Аналогично оценивается второе слагаемое в (2.24).

Перейдем к оценке полунормы в $B^{\alpha}_{p,1}(G)$ двух последних слагаемых. Для этого вначале, воспользовавшись равенством (2.21), вычислим интегралы:

$$\frac{\overline{h}}{\pi}\iint_G \frac{d\xi d\eta}{(\zeta-w)(\zeta-\overline{w})(\zeta-(\overline{w}+\overline{h}))} = \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{d\xi d\eta}{(\zeta-w)(\zeta-\overline{w})} - \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{d\xi d\eta}{(\zeta-w)(\zeta-(\overline{w}+\overline{h}))} = -1 + \frac{w+h-\overline{w}}{w-\overline{w}-\overline{h}},$$
$$-\frac{h}{\pi}\iint_G \frac{d\xi d\eta}{(\zeta-w)(\zeta-(w+h))(\zeta-(\overline{w}+\overline{h}))} =$$
$$\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{d\xi d\eta}{(\zeta-w)(\zeta-(\overline{w}+\overline{h}))} - \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{d\xi d\eta}{(\zeta-(w+h))(\zeta-(\overline{w}+\overline{h}))} = \frac{w+h-\overline{w}}{w-\overline{w}-\overline{h}} - 1,$$

тогда

$$\iint_{S^0}\frac{1}{|h|^{2+\alpha}}\left(\iint_G \left|\Delta_h\rho(w)\left(1-\frac{w+h-\overline{w}}{w-\overline{w}-\overline{h}}\right)\right|^p dG_w\right)^{\frac{1}{p}} dS^0_h \leq 2\iint_{S^0}\frac{\left\|\Delta_h\rho(w)\right\|_{L_p(G)}1}{|h|^{1+\alpha}}dS^0_h = 2\|\rho\|_{b^{\alpha}_{p,1}(G)}. \qquad (2.26)$$

Следовательно, на основании оценок (2.25), (2.26) в силу (2.24) имеем

$$\left\|d_1(w)\right\|_{b^{\alpha}_{p,1}(G)} \leq 2(N_8+1)\|\rho\|_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}. \qquad (2.27)$$

Таким образом, для $1<p<2,\ 0<\alpha<1$, используя оценки (2.23), (2.27), находим:

$$\left\|d_1(w)\right\|_{B^{\alpha}_{p,1}(G)} = \left\|d_1(w)\right\|_{L_p(G)} + \left\|d_1(w)\right\|_{b^{\alpha}_{p,1}(G)} \leq N_9\left\|\rho(w)\right\|_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}. \qquad (2.28)$$

Перейдем к функции $d_2(w)$ из (2.17) и запишем ее следующим образом:

$$d_2(w) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\rho(\zeta)(1-\zeta w-\zeta\overline{w})}{(1-\zeta w)(1-\zeta\overline{w})}d\xi d\eta =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|\leq\frac{1}{2}} \frac{\rho(\zeta)(1-\zeta w-\zeta\overline{w})}{(1-\zeta w)(1-\zeta\overline{w})}d\xi d\eta - \frac{1}{\pi}\iint_{\frac{1}{2}<|\zeta|<1} \frac{\rho(\zeta)(1-\zeta w-\zeta\overline{w})}{(1-\zeta w)(1-\zeta\overline{w})}d\xi d\eta = d^1_2(w) + d^2_2(w). \qquad (2.29)$$

При исследовании свойств данной функции рассуждения будем вести аналогично доказательству теоремы 3. Поскольку для $\forall w \in G$ и $h \neq 0$

$$\Delta_h d_2(w) = \frac{w\overline{h}}{\pi}\iint\limits_G \frac{\zeta^2\rho(\zeta)}{(1-\zeta w)(1-\zeta\overline{w})(1-\zeta(\overline{w}+\overline{h}))}d\xi d\eta +$$

$$+\frac{h}{\pi}\iint\limits_G \frac{\zeta\rho(\zeta)}{(1-\zeta w)(1-\zeta(w+h))(1-\zeta(\overline{w}+\overline{h}))}d\xi d\eta - \frac{h}{\pi}\iint\limits_G \frac{\zeta\rho(\zeta)}{(1-\zeta w)(1-\zeta(w+h))}d\xi d\eta, \qquad (2.30)$$

то для функции $d_2^1(w)$, очевидно, что

$$\left|\Delta_h d_2^1(w)\right| \le \frac{|h|}{\pi^{1/p}}(2^{1/p}+4^{1/p})\|\rho\|_{L_p(G)},$$

значит,

$$\left\|d_2^1(w)\right\|_{B^\alpha_{p,1}(G)} \le N_{10}\left\|\rho(w)\right\|_{B^\alpha_{p,1}(G)}. \qquad (2.31)$$

Функцию $d_2^2(w)$ перепишем в виде:

$$d_2^2(w) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\frac{1}{2}<|\zeta|<1}\frac{\rho(\zeta)(1-\zeta w-\zeta\overline{w})}{(1-\zeta w)(1-\zeta\overline{w})}d\xi d\eta = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\frac{1}{2}<|\zeta|<1}\frac{\frac{\rho(\zeta)}{\zeta}\left(\frac{1}{\zeta}-w-\overline{w}\right)}{\left(\frac{1}{\zeta}-w\right)\left(\frac{1}{\zeta}-\overline{w}\right)}d\xi d\eta =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_2}\frac{\rho\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta\overline{\zeta}^2}(\zeta-w-\overline{w})}{(\zeta-w)(\zeta-\overline{w})}d\xi d\eta = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_2}\frac{\rho_2(\zeta)}{(\zeta-w)(\zeta-\overline{w})}d\xi d\eta,$$

где G_2 — круговое кольцо $1<|\zeta|<2$, а для данной функции $\rho_2(\zeta)$ выполняются условия, аналогичные условиям (2.6), (2.7). Тогда для функции $\rho^*(\zeta)$, являющейся продолжением $\rho_2(\zeta)$ в круг $|\zeta|<1$ с сохранением класса будет выполняться неравенство (2.8).

Таким образом,

$$d_2^2(w) = d_{1S}(\rho_2, w),$$

$$d_{1G}(\rho^*, w) + d_2^2(w) = d_{1S}(\rho^*, w).$$

Отсюда, согласно неравенствам (2.28), (2.8), получим

$$\left\|d_2^2(w)\right\|_{B^\alpha_{p,1}(G)} \le \left\|d_{1K_2}(\rho^*, w)\right\|_{B^\alpha_{p,1}(G)} + \left\|d_{1G}\rho^*\right\|_{B^\alpha_{p,\theta}(G)} \le \tilde{N}\left\|\rho^*\right\|_{B^\alpha_{p,1}(S)} \le N_{11}\|\rho\|_{B^\alpha_{p,1}(G)}. \qquad (2.33)$$

Далее рассмотрим функцию $d_3(w)$ из (2.16). Поскольку

$$|d_3(w)| \le \frac{2}{|w-\overline{w}|}\left|\int\limits_w^{\overline{w}}\left(\frac{1}{\pi}\iint\limits_G\frac{\rho(\zeta)}{1-\overline{t}\zeta}d\xi d\eta\right)d\overline{t}\right| \le 2\max_{w\in G}\left|\frac{1}{\pi}\iint\limits_G\frac{\rho(\zeta)}{1-\overline{w}\zeta}d\xi d\eta\right| = 2\max_{w\in G}\left|\mathrm{T}_1\rho(w)\right|,$$

тогда согласно теореме 2 функция $d_3(w)$ будет принадлежать пространству $B^{1+\alpha}_{p,1}(G)$, и

$$\left\|d_3(w)\right\|_{B^{1+\alpha}_{p,\theta}(G)} \le N_{12}\|\rho\|_{B^\alpha_{p,1}(G)}. \qquad (2.34)$$

Осталось оценить по норме $B^\alpha_{p,1}(G)$ слагаемое $d_4(w)$, имеющее вид:

$$d_4(w) = \frac{\overline{\Phi_0(w)}-\Phi(w)}{w-\overline{w}} = \frac{\int\limits_w^{\overline{w}}\left(\frac{\pi r_0^2}{w-1}-\frac{\pi r_1^2}{w+1}-\frac{\pi(r_0^2+r_1^2)}{w-t_0}-\frac{\pi(r_0^2+r_1^2)}{w-\overline{t}_0}\right)dw}{w-\overline{w}} = \frac{1}{w-\overline{w}}\int\limits_w^{\overline{w}}\Phi_0'(w)dw.$$

Так как

$$|d_4(w)| \le \frac{1}{|w-\overline{w}|}\left|\int\limits_w^{\overline{w}}\Phi_0'(w)dw\right| \le \max_{w\in G}\left|\Phi_0'(w)\right|,$$

то в силу леммы 3 функция $d_4(w)$ будет принадлежать пространству $B^\alpha_{p,1}(G)$, $1<p<2$, $0<\alpha<\frac{2}{p}-1$, и

$$\left\|d_4(w)\right\|_{B^\alpha_{p,1}(G)} \le \left\|\Phi_0'(w)\right\|_{B^\alpha_{p,1}(G)} \le 2N_6\pi\left(r_0^2+r_1^2\right). \qquad (2.35)$$

Используя полученные оценки (2.28), (2.31), (2.33), (2.34), (2.35) и компактное вложение $B_{p,1}^{1+\alpha}(G) \to B_{p,1}^{\alpha}(G)$, из (2.16) имеем:

$$\|D\rho\|_{B_{p,1}^{\alpha}(G)} \le \|d_1(w)\|_{B_{p,1}^{\alpha}(G)} + \|d_{24}(w)\|_{B_{p,1}^{\alpha}(G)} + \|d_3(w)\|_{B_{p,1}^{\alpha}(G)} + \|d_4(w)\|_{B_{p,1}^{\alpha}(G)} \le$$

$$\le (N_9 + N_{10} + N_{11} + N_{12})\|\rho\|_{B_{p,1}^{\alpha}(G)} + 2N_6\pi\left(r_0^2 + r_1^2\right) = N_{13}\|\rho\|_{B_{p,1}^{\alpha}(G)} + 2N_6\pi\left(r_0^2 + r_1^2\right), \qquad (2.36)$$

что и требовалось доказать.

3. Эквивалентные нормы

Введем в классе $B_{p,1}^{\alpha}(G)$ специальную норму

$$\|f\|^*_{B_{p,1}^{\alpha}(G)} = \|f\|^*_{L_p(G)} + \|f\|^*_{b_{p,1}^{\alpha}(G)}, \qquad (3.1)$$

где

$$\|f\|^*_{L_p(G)} = \left(\iint_G |f(w)|^p e^{-pR|w|^2} dG_w\right)^{1/p},$$

$$\|f\|^*_{b_{p,1}^{\alpha}(G)} = \iint_{S^0} |h|^{-2-\alpha} \|\Delta_h f(w)\|^*_{L_p(G)} dS_h^0 .$$

Лемма 4. Нормы $\|\bullet\|_{B_{p,1}^{\alpha}(G)}$ и $\|\bullet\|^*_{B_{p,1}^{\alpha}(G)}$ эквивалентны.

Доказательство. Действительно, в силу того, что выполняются неравенства

$$e^{-R} \le e^{-R|w|^2} \le 1,$$

имеем

$$\|f\|^*_{B_{p,1}^{\alpha}(G)} \le \|f\|_{B_{p,1}^{\alpha}(G)},$$

$$\|f\|^*_{B_{p,1}^{\alpha}(G)} \ge e^{-R}\|f\|_{B_{p,1}^{\alpha}(G)},$$

т.е. согласно определению эквивалентности норм [5] данные нормы эквивалентны.

Лемма 5. Для линейного, вполне непрерывного оператора $T_1\rho(w)$, принадлежащего пространству $B_{p,1}^{\alpha+1}(G)$, условие ограниченности по норме $\|\bullet\|^*_{B_{p,1}^{\alpha}(G)}$ имеет вид

$$\|T_1\rho\|^*_{B_{p,1}^{\alpha+1}(G)} \le \frac{M}{(R_1 p')^{1/p'}}\|\rho\|^*_{B_{p,1}^{\alpha}(G)}, \qquad (3.2)$$

где M — константа, не зависящая от функции $\rho(w)$.

Доказательство. Пусть S — круг радиуса $l = 2$ с центром в начале координат. Поскольку согласно принципа максимума модуля [6]

$$|T_1\rho(w)| = \left|-\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\overline{\rho(\zeta)}}{1-\zeta w} d\xi d\eta\right| \le \max_{w\in\Gamma}\left|-\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\rho(\zeta)}{\zeta - w} d\xi d\eta\right| \le |w||T\rho(w)|,$$

то

$$\|T_1\rho\|^*_{L_p(G)} \le \|T\rho\|^*_{L_p(G)} \le \|T\rho\|_{L_p(G)} \le \frac{1}{\pi}\left(\iint_G \left|\iint_G \frac{\rho(\zeta)}{\zeta - w} d\xi d\eta\right|^p dG_w\right)^{1/p} \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\left(\iint_G \left|\iint_S \frac{\rho(\zeta + w)}{\zeta} dS_\zeta\right|^p dG_w\right)^{1/p} \le \frac{1}{\pi}\iint_S \frac{\|\rho\|^*_{L_p(E)}}{|\zeta|} e^{R_1|\zeta|^2} d\xi d\eta \le$$

$$\le \frac{\|\rho\|^*_{L_p(E)}}{\pi}\left(\iint_S \frac{dS_\zeta}{|\zeta|^p}\right)^{1/p}\left(\iint_S e^{R_1 p'|\zeta|^2} dS_\zeta\right)^{1/p'}. \qquad (3.3)$$

Здесь для получения третьего неравенства использовалось обобщенное неравенство Минковского [4], а затем неравенство Гельдера и вложение (2.20). Далее вычислим с помощью формулы Грина [3] и Коши [6] второй интеграл в (3.3)

$$\iint_S e^{R_1 p'|\zeta|^2} dS_\zeta = \iint_S e^{R_1 p'\zeta\overline{\zeta}} dS_\zeta = \frac{1}{p'R_1}\iint_S \frac{\partial\left(\dfrac{1}{\zeta}e^{R_1 p'\zeta\overline{\zeta}}\right)}{\partial\overline{\zeta}} dS_\zeta = \frac{1}{2ip'R_1}\int \frac{e^{R_1 p'\zeta\overline{\zeta}}}{\zeta} d\zeta = \frac{\pi}{p'R_1}.$$

Тогда, учитывая ограниченность первого интеграла в (3.3) при $p<2$, получим:

$$\| \mathrm{T}_1\rho \|^*_{L_p(G)} \le \frac{M_1 \|\rho\|^*_{B^\alpha_{p,1}(G)}}{(R_1 p')^{1/p'}}, \tag{3.4}$$

где через M_i будем обозначать константы, не зависящие от функции $\rho(w)$.

Перейдем к оценке полунормы $\|\bullet\|^*_{b^\alpha_{p,1}(G)}$. Для $\forall w \in G$ и $h \ne 0$ имеем

$$\mathrm{T}_1\rho(w+h) - \mathrm{T}_1\rho(w) = -\frac{h}{\pi}\iint_G \frac{\overline{\zeta}\overline{\rho(\zeta)}}{(1-\overline{\zeta}w)(1-\overline{\zeta}(w+h))} d\xi d\eta = -\frac{h}{\pi}\iint_{|\zeta|\le\frac{1}{2}} \frac{\overline{\zeta}\overline{\rho(\zeta)}}{(1-\overline{\zeta}w)(1-\overline{\zeta}(w+h))} d\xi d\eta -$$

$$-\frac{h}{\pi}\iint_{\frac{1}{2}<|\zeta|<1} \frac{\overline{\zeta}\overline{\rho(\zeta)}}{(1-\overline{\zeta}w)(1-\overline{\zeta}(w+h))} d\xi d\eta = \Delta_h B_1 + \Delta_h B_2. \tag{3.5}$$

При $|\zeta| \le \frac{1}{2}$ выполняются неравенства $\left|1-\overline{\zeta}w\right| \ge \frac{1}{2}$, $\left|1-\overline{\zeta}(w+h)\right| \ge \frac{1}{2}$, тогда

$$\left|\Delta_h B_1\right| \le \frac{h}{\pi}\iint_{|\zeta|\le\frac{1}{2}} \frac{|\zeta||\rho(\zeta)|}{\left|1-\overline{\zeta}w\right|\left|1-\overline{\zeta}(w+h)\right|} d\xi d\eta \le \frac{2h}{\pi}\left[\iint_G |\rho(\zeta)|^p e^{-R_1 p|\zeta|^2} d\xi d\eta\right]^{\frac{1}{p}} \left[\iint_G e^{R_1 p'|\zeta|^2} d\xi d\eta\right]^{\frac{1}{p'}} \le \frac{2h\|\rho\|^*_{L_p(G)}}{(R_1 p')^{1/p'}}.$$

Отсюда следует, что

$$\| B_1 \|^*_{b^\alpha_{p,1}(G)} \le \frac{M_2}{(R_1 p')^{1/p'}} \| \rho \|^*_{b^\alpha_{p,1}(G)}. \tag{3.6}$$

Рассмотрим теперь B_2:

$$B_2 = -\frac{h}{\pi}\iint_{\frac{1}{2}<|\zeta|<1} \frac{\overline{\zeta}\overline{\rho(\zeta)}}{(1-\overline{\zeta}w)(1-\overline{\zeta}(w+h))} d\xi d\eta = -\frac{h}{\pi}\iint_{1<|\zeta|<2} \frac{\overline{\dfrac{1}{\zeta\overline{\zeta}^2}\rho\left(\dfrac{1}{\overline{\zeta}}\right)}}{(\zeta-w)(\zeta-(w+h))} d\xi d\eta,$$

Учитывая неравенства (2.5)–(2.7), находим:

$$\| B_2 \|^*_{b^\alpha_{p,1}(G)} \le \frac{1}{\pi}\iint_{S^0} \frac{1}{h^{1+\alpha}} \left[\iint_G \left|\iint_{G_2} \frac{\rho_2(\zeta) d\xi d\eta}{(\zeta-w)(\zeta-(w+h))}\right|^p e^{-R_1|w|^2} dG_w\right]^{\frac{1}{p}} dS^0_h \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\iint_{S^0} \frac{1}{h^{1+\alpha}} \left[\iint_G \left|\iint_{G_2^*} \frac{|\rho_2(\zeta+w)| d\xi d\eta}{|\zeta||\zeta-h|}\right|^p e^{-R_1|w|^2} dG_w\right]^{\frac{1}{p}} dS^0_h \le \frac{1}{\pi}\iint_{S^0} \frac{1}{h^{1+\alpha}} \iint_{G_2^*} \frac{\|\rho_2\|^*_{L_p(E)} e^{-R_1(|\zeta+w|^2-|w|^2)}}{|\zeta||\zeta-h|} d\xi d\eta dS^0_h \le$$

$$\le \frac{\|\rho_2\|^*_{L_p(E)}}{\pi}\iint_{S^0} \frac{1}{h^{1+\alpha}} \left(\iint_{G_2^*} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta|^p|\zeta-h|^p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\iint_{G_2^*} e^{8R_1 p'|\zeta|^2} d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{p'}} dS^0_h \le$$

$$\le \frac{\|\rho_2\|^*_{B^\alpha_{p,1}(G_2)}}{(8R_1 p')^{1/p'}}\iint_{S^0} \frac{dS^0_h}{h^{3+\alpha-\frac{2}{p}}} \le \frac{M_3\|\rho_2\|^*_{B^\alpha_{p,1}(G)}}{(R_1 p')^{1/p'}}. \tag{3.7}$$

На основании полученных оценок (3.4), (3.6), (3.7) следует, что

$$\| \mathrm{T}_1\rho \|^*_{B^{\alpha+1}_{p,1}(G)} \le \frac{M_1+M_2+M_3}{(R_1 p')^{1/p'}} \| \rho \|^*_{B^\alpha_{p,1}(G)} = \frac{M}{(R_1 p')^{1/p'}} \| \rho \|^*_{B^\alpha_{p,1}(G)},$$

что и требовалось доказать.

4. Теоремы существования в пространствах $B^{\alpha}_{p,1}(G)$

Перейдем к исследованию разрешимости заданного уравнения (1.1) в дробных пространствах О.В.Бесова $B^{\alpha}_{p,1}(G)$, $1<p<\infty$, $0<\alpha<\dfrac{2}{p}-1$.

Очевидно, что функция $q(w)$ вида (1.3) принадлежит пространству $B^{\alpha}_{p,1}(G)$, $1<p<\infty$, $0<\alpha<\dfrac{2}{p}-1$, причем, используя представление

$$\Delta_h q(w)=\frac{-\Delta_h(\Pi\rho(w)-\Pi_1\rho(w))+q(w+h)\Delta_h B\rho(w)}{B\rho(w)}, \qquad (4.1)$$

где

$$B\rho(w)=D\rho(w)+\sqrt{D\rho(w)^2+\left(\Pi\rho(w)-\Pi_1\rho(w)\right)^2},$$

$$\left|\Delta_h B\rho(w)\right|\le\left|\Delta_h D\rho(w)\right|+\frac{\left(\left|D\rho(w+h)\right|+\left|D\rho(w)\right|\right)\left|\Delta_h D\rho\right|}{\sqrt{D\rho(w)^2+\left(\Pi\rho(w)-\Pi_1\rho(w)\right)^2}+\sqrt{D\rho(w+h)^2+\left(\Pi\rho(w+h)-\Pi_1\rho(w+h)\right)^2}}+$$

$$+\frac{\left(\left|\Pi\rho(w+h)\right|+\left|\Pi\rho(w)\right|+\left|\Pi_1\rho(w+h)\right|+\left|\Pi\rho(w)\right|\right)}{\sqrt{D\rho(w)^2+\left(\Pi\rho(w)-\Pi_1\rho(w)\right)^2}+\sqrt{D\rho(w+h)^2+\left(\Pi\rho(w+h)-\Pi_1\rho(w+h)\right)^2}}\left|\Delta_h\left(\Pi\rho-\Pi_1\rho\right)\right|$$

и неравенства (1.10), (2.1), (2.36), найдем:

$$\left\|q(w)\right\|_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}\le N_{14}\left\|\rho\right\|_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}+2N_6\pi\left(r_0^2+r_1^2\right), \qquad (4.2)$$

здесь

$$N_{14}=2(C_1+C_3+N_{13}). \qquad (4.3)$$

Тогда на основании теорем 1–4 и леммы 3 следует, что оператор $S\rho(w)$ вида (1.2) также принадлежит пространству $B^{\alpha}_{p,1}(G)$, $1<p<\infty$, $0<\alpha<\dfrac{2}{p}-1$, если функция $\rho(w)\in B^{\alpha}_{p,1}(G)$.

Проверим выполнимость условия Липшица. Используя равенство (4.1) и однородность операторов $D\rho$, $\Pi\rho$, $\Pi_1\rho$, $\mathrm{T}_1\rho$ относительно ρ, имеем:

$$\left\|S\rho_1-S\rho_2\right\|_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}\le\left(\left|q(w,\rho_1)\right|+\left|q(w,\rho_1)\right|\left|q(w,\rho_2)\right|\right)\left(\left\|\Pi\rho_1-\Pi\rho_2\right\|_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}+\left\|\Pi_1\rho_1-\Pi_1\rho_2\right\|_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}\right)+$$

$$+3\left\|\mathrm{T}_1\rho_1-\mathrm{T}_1\rho_2\right\|_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}+\left|q(w,\rho_2)\right|\left(\left\|\overline{\Pi\rho_1}-\overline{\Pi\rho_2}\right\|_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}+\left\|\overline{\Pi_1\rho_1}-\overline{\Pi_1\rho_2}\right\|_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}\right)+$$

$$+2\left|q(w,\rho_1)\right|\left|q(w,\rho_2)\right|\left\|D\rho_1-D\rho_2\right\|_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}.$$

Следовательно, используя результаты теорем 1–4, а также вложение $B^{\alpha+1}_{p,\theta}\to B^{\alpha}_{p,\theta}$, находим:

$$\left\|S\rho_1-S\rho_2\right\|_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}\le\left(\frac{5}{4}\left(C_1+C_3\right)+3C_2+\frac{1}{2}N_{13}\right)\left\|\rho_1-\rho_2\right\|_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}. \qquad (4.4)$$

Теперь оценим коэффициент Липшица оператора $S\rho$ по норме $\left\|\bullet\right\|^{*}_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}$. Согласно лемме 2 и условию эквивалентности норм, для разности $S\rho_1-S\rho_2$ имеем

$$\left\|S\rho_1-S\rho_2\right\|^{*}_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}\le\left\|q(w,\rho_1)-q(w,\rho_2)\right\|^{*}_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}\left(\left\|\Pi\rho_1\right\|^{*}_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}+\left\|\Pi_1\rho_2\right\|^{*}_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}\right)+$$

$$+3\left\|\mathrm{T}_1(\rho_1-\rho_2)\right\|^{*}_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}+\left\|q(w,\rho_2)\right\|^{*}_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}\left(\left\|\Pi(\rho_1-\rho_2)\right\|^{*}_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}+\left\|\Pi_1(\rho_1-\rho_2)\right\|^{*}_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}\right)\le$$

$$\le e^{8R_1}\left\|q(w,\rho_1)-q(w,\rho_2)\right\|_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}\left(\left\|\Pi\rho_1\right\|_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}+\left\|\Pi_1\rho_2\right\|_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}\right)+3\left\|\mathrm{T}_1(\rho_1-\rho_2)\right\|^{*}_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}+$$

$$+e^{8R_1}\left\|q(w,\rho_2)\right\|_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}\left(\left\|\Pi(\rho_1-\rho_2)\right\|_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}+\left\|\Pi_1(\rho_1-\rho_2)\right\|_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}\right).$$

Поскольку разность $q(w,\rho_1)-q(w,\rho_2)$ всегда можно представить в виде суммы $\Pi(\rho_1-\rho_2)$, $\Pi_1(\rho_1-\rho_2)$, $D(\rho_1-\rho_2)$, то в силу теорем 1, 3, 4 получим

$$\left\|q(w,\rho_1)-q(w,\rho_2)\right\|_{B^{\alpha}_{p,1}(G)} \le N_{15}\left\|\rho_1-\rho_2\right\|_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}. \tag{4.5}$$

Тогда в шаре $\|\rho\|^{*}_{B^{\alpha}_{p,1}(G)} \le R$ пространства $B^{\alpha}_{p,1}(G)$ на основании оценок (4.2), (4.5), леммы 5 и теорем 1, 3 находим

$$\left\|S\rho_1-S\rho_2\right\|^{*}_{B^{\alpha}_{p,1}(G)} \le \left(\frac{3M}{(R_1p')^{1/p'}}+M_4R\right)\left\|\rho_1-\rho_2\right\|^{*}_{B^{\alpha}_{p,1}(G)},$$

где

$$M_4=\left(N_{14}(C_1+C_3)+N_{13}+N_{15}\right)e^{8R_1}.$$

Кроме этого, учитывая, что для нулевого элемента θ

$$S\theta=-\overline{\Phi_0'(w)},$$

имеем:

$$\left\|S\rho\right\|^{*}_{B^{\alpha}_{p,1}(G)} \le \left\|S\rho-S\theta\right\|^{*}_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}+\left\|S\theta\right\|^{*}_{B^{\alpha}_{p,1}(G)} \le \left(\frac{3M}{(R_1p')^{1/p'}}+M_4R\right)\left\|\rho\right\|^{*}_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}+\left\|\Phi_0'(w)\right\|^{*}_{B^{\alpha}_{p,1}(G)},$$

тогда, взяв R_1 и R из условий

$$R_1 \ge \frac{(6M)^{p'}}{\beta^{p'}p'},\ p'>2,\ \beta\in(0,1),$$

$$R=\frac{\left\|\Phi_0'\right\|^{*}_{B^{\alpha}_{p,1}(G)}}{1-\beta} \le \frac{2N_6\pi\left(r_0^2+r_1^2\right)}{1-\beta},$$

где радиусы струй r_0^2, r_1^2 такие, что

$$\frac{2N_6\pi\left(r_0^2+r_1^2\right)}{1-\beta} \le \frac{\beta}{2M_4},\ \beta\in(0,1),$$

получим:

$$\left\|S\rho_1-S\rho_2\right\|^{*}_{B^{\alpha}_{p,1}(G)} \le \beta\left\|\rho_1-\rho_2\right\|^{*}_{B^{\alpha}_{p,1}(G)},\ \beta\in(0,1).$$

Отсюда видим, что оператор $S\rho$ является сжимающим и отображает шар $\|\rho\|^{*}_{B^{\alpha}_{p,1}(G)} \le R$ в себя, тогда существует последовательность элементов, сходящаяся к ρ, решению заданного интегрального уравнения $S\rho=\rho$.

Таким образом, доказана

Теорема 5. Пусть r_0 и r_1 такие, что

$$r_0^2+r_1^2<\varepsilon,$$

тогда нелинейное интегральное уравнение (1.1) в шаре $\|\rho\|^{*}_{B^{\alpha}_{p,1}(G)} \le R$ пространства $B^{\alpha}_{p,1}(G)$, $1<p<2$, $0<\alpha<\frac{2}{p}-1$ имеет единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Список литературы

1. *Блиев Н.К.* Обобщенные аналитические функции в дробных пространствах. — Алма-Ата: Наука, 1985. — 160 с.
2. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975. — 480 с.
3. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. — М.: Наука, 1988. — 512 с.
4. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969. — 480 с.
5. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 456 с.
6. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного. — М.: Наука, 1973. — 688 с.