ӘОЖ 517.2

Қ.Жетпісов[1], А.С.Базылжанова[2]

[1]Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті;
[2]Қазіргі заманғы гуманитарлық техникалық институты, Қарағанды (E-mail: orumbayevan@mail.ru)

Буль құрылымдарының арасындағы сәйкестіктер және Буль алгебраларының стоундық кеңістіктері

Буль алгебраларының қолданылуларын көрсету мақсатында математиканың әр түрлі салаларынан мысалдар келтірілді. Формаль аксиоматикалық теориялар әдісінің пропедевтикалық тәжірибесін қолданып, Буль алгебралары класының абстракциялық анықтамасы негізінде мұндай ұқсастықты теоретико-жиындық, логико-алгебралық және теоретико-ықтималдық концепциялардың арасынан көруге болатындығы айқындалды. Мазмұндық деңгейде Буль алгебраларының көріністері туралы Стоун теоремасының пропедевтикасын беру арқылы мысалдарды таңдауда негізгі назарды табиғи теоретико-жиындық мазмұндағы мысалдарға аудардық. Стоун теоремасының қолданбалы мүмкіндіктері көрсетілді.

Кілтті сөздер: Буль алгебралар, стоундық кеңістіктер, гомоморфизм, изоморфизм, абстракция, конгруэнция, сигнатура, идеал, Цорн леммасы.

Буль алгебраларының гоморфизмдері мен изоморфизмдері. Алгебралық жүйелерді изоморфизмге дейінгі дәлдікпен оқып-зерттеу концепциясын Буль алгебралары класында қарастырайық. Бұл жағдайда гомоморфизмнің жалпы анықтамасының шарттары толық сақталады [1, 2].

Жалпы жағдайдағы сияқты, егер гомоморфизмнің анықтамасындағы φ биективті бейнелеу болса, онда ол изоморфты бейнелеу болады.

$$\left(\forall a \in B_1\right)\left(\varepsilon_J\left(a\right) = \left[a\right]_{\sim_J}\right)$$

ережесімен анықталған

$$\varepsilon_J : \mathrm{B} \to \mathrm{B}/\mathrm{J}$$

$\sim_J$ конгруэнциясымен каноникалық гомоморфизмін байланыстыруға болады.

Абстракциялық сипаттағы жалпы нәтижені нақты алгебраға қолдану оның мағынасын толық ашып, көрнекі қылып түсінуді жеңілдетеді. Көрнекілік пен ұғымдылық нақты алгебраның негізгі жиынының табиғатын дұрыс сезіну үшін немесе олардың құрылымдық ерекшеліктерін ажырата білу үшін өте қажетті. Осыған сәйкес, Буль алгебралары мысалында, алгебралардың гомоморфизмі туралы жалпы теореманы көрсету қызығушылық туғызады, себебі әр түрлі көзқараспен алғанда бұл алгебраның құрылымы өте жақсы оқып зерттелген.

$$\left(\forall a,b \in B_1\right)\left(aP_\varphi b \Leftrightarrow \varphi\left(a\right) = \varphi\left(b\right)\right) \tag{1}$$

ережесімен анықталған P_φ екіорынды қатынасты қарастырайық.

Лемма 1. (1) ережемен анықталған P_φ екі орынды қатынас B_1 Буль алгебрасындағы конгруэнция қатынасы болады.

Буль алгебралар үшін (1) ереже келесі түрге ие:

$$\left(\forall a,b \in B\right)\left(aP_\varphi b \Leftrightarrow a\Delta_1 b \in J_\varphi\right),$$

яғни $P_\varphi = \sim_{J_\varphi}$.

Стоун теоремасына сәйкес, ақырлы, бос емес жиынның барлық ішкі жиындарының Буль алгебраларының изоморфизм типтерін сипаттасақ жеткілікті [3].

Бос емес M жиынының бір элементі ішкі жиындары бөліктік реттелген $\left\langle M \setminus \left\{\Phi\right\}; \subseteq\right\rangle$ жиынының минималды элементтері болады.

Кез келген Буль алгебрасындағы бірэлементті ішкі жиындардың табиғатында ұқсастық бар. Ол — атом ұғымы.

$\mathrm{B} = \langle B; \vee; \wedge; C; 0; 1\rangle$ Буль алгебраларының нольдік емес a элементі атом деп аталады, егер келесі шарт орындалса:

$$\left(\forall b \in B\right)\left(\left(b \le a\right) \Rightarrow \left(\left(b = 0 \vee \left(b = a\right)\right)\right)\right),$$

яғни, Буль алгебрасының атомының алдында қатаң түрде тек ғана нольдік элемент тұрады.

$\mathbb{B}_n$ ақырлы n элементті жиынның барлық ішкі жиындарының Буль алгебрасын белгілейік.

$\mathbb{B}_n$ Буль алгебрасының тура n атомы бар және олар 1 элементті ішкі жиындармен анықталады.

Лемма 2. Бос емес M жиынының барлық ішкі жиындарының ақырлы Буль алгебрасының изоморфизм типі осы жиынның элементтерінің санымен анықталады.

$\mathbb{B}$ Буль алгебрасының барлық атомдар жиынын $Atom(B)$ арқылы белгілейік. Байқайтынымыз, егер a және b осы алгебраның әр түрлі атомдары болса, онда $a \wedge b = 0$.

Келтірілген ой талдау $\mathbb{B}$ Буль алгебрасының $\mathbb{B}_n$ Буль алгебрасына изоморфты болатындығын көрсетеді, мұндағы n саны — $\mathbb{B}_n$ алгебрасының атомдар саны.

Сонымен, келесі тұжырымды алдық: ақырлы Буль алгебраларының изоморфизм типі оның атомдар санымен анықталады.

Келесі проблемалық жағдай қызығушылық тудырады: φ изоморфты бейнелеуі бірмәнді анықталады ма?

Ал, егер олай болмаса, әр түрлі изоморфты бейнелеулердің анықталу мүмкіндіктері немен қамтамасыз етіледі және олардың саны қанша?

Алгебралық жүйелердің ішкі жүйелерінің құрылымын оқып-зерттеу осы жүйенің өзінің құрылымдық қасиеттерін анықтауға көмегін тигізеді. Осыған сәйкес және ақырлы Буль алгебрасының изоморфизм типтерінің сипаттамасын алуға байланысты Буль алгебраларының ақырлы туындаушы ішкі алгебраларының қасиеттерін оқып-зерттеген орынды.

Буль алгебралары мысалдарының әдістемелік ерекшеліктері. Буль алгебралары, өз ретінде, басқа да алгебралық жүйелер кластарының структуралық қасиеттерін ашуға мүмкіндік береді. Бұл алгебраларға реттік, топологиялық, теоретикалық-сақиналық құрылымдар тән.

Өз құрылымында алгебралық, реттік және топологиялық сипаттағы құрылымдық қасиеттерді жинаған Буль алгебраларының концепциялары көптеген ертеректерде анықталған ұғымдар, құрылымдар және жаңа технологиялар туралы жоғары деңгейде абстракциялық ой-пайымдауларды қорытындылауға таптырмайтын жаңа өріс болып табылады.

Абстракциялықтың деңгейі мен ерекшеліктердің анықтауышы дәстүрлі «группа», «сақина», «өріс», «векторлық кеңістік» ұғымдары жоғары оқу орындарындағы жалпы алгебра курсында оқып-зерттелетін болғандықтан, олар мектеп математикасының жеткілікті деңгейде бастама алады.

«Буль алгебрасы» ұғымы мектептегі теоретикалық-жиындық көріністің мейлінше шектеулі бөлігімен ғана тәжірибелік байланыс жасайды. Оған себеп, мектеп математикасы көпшілік жағдайларда нақты мысалдар мен дағдыға көбірек сүйенсе, Буль алгебрасында абстракция басымдырақ.

Буль алгебралар класының анықтамасында көбірек формаль аксиомалық теориялардың әдістері қолданылады. Буль алгебрасының көптеген мысалдарын келтіруде біз келесі мақсаттарды көздейтін боламыз.

Біріншіден, бұл мысалдарды қарастыру мен талдау «Буль алгебрасы» ұғымын тереңірек түсінуге көмектеседі. Екіншіден, математикада Буль алгебраларының «әр уақытта, барлық салаларда» бар екендігін көрсетеді.

1. Буль алгебрасының дәстүрлік мысалы ретінде бос емес жиынның бульді кәдімгі теоретикалық-жиындық «$\cup$» — бірігу; «$\cap$» — қиылысу және «_» — M жиынының $B(M)$ жиынындағы толықтаушы элементін алу.

Бұл алгебрада 0 және 1 ерекше элементтерінің рөлін сәйкесінше φ мен $\otimes$ атқарады.

Тексеру

$$\mathbb{B}(M) = < B(M), \cup, \cap, -, \emptyset, M > \tag{2}$$

жүйесінде 1)–9) [2] аксиомаларының орындалатындығын көрсетеді.

(2) жүйе M жиынының барлық ішкі жиындарының Буль алгебрасы деп аталады.

Бұл мысалдың танымдық құндылығы, $\mathbb{B}(M)$ Буль алгебрасының құрылымдық қасиеттері басқа абстрактілі берілген алгебраның қасиеттерін оқып-зерттеуге, үйренуге қарағанда, мейлінше тиімді және ұтымды [1, 2].

2. Айталық M — бос емес жиын және $N=\left\{f \mid f: M \rightarrow\{0,1\}\right\}$ жиыны M-ді екі элементті $\{0,1\}$ жиынына барлық бейнелеулердің жиыны болсын.

N жиынында кез келген $f, f_1, f_2 \in N$ бейнелеулері үшін екі орынды $\oplus$ мен $\otimes$ амалдарын және бірорынды Θ амалын келесі ережелермен анықтайық:

$$(\forall x \in M)\left[\left(f_1 \oplus f_2\right)(x)=\operatorname{sgn}\left(f_1(x)+f_2(x)\right)\right]; \quad (3)$$

$$(\forall x \in M)\left[\left(f_1 \otimes f_2\right)(x)=f_1(x) \cdot f_2(x)\right]; \quad (4)$$

$$(\forall x \in M)[(\Theta f)(x)=1-f(x)], \quad (5)$$

мұндағы $+,\cdot,-$ — нақты сандарды қосу, көбейту, алу амалдары, ал $sgn(x)$-функциясы нақты сандар жиынында келесі ережемен анықталған:

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}0, \text{ егер } x=0; \\ 1, \text{ егер } x>0.\end{cases}$$

Тікелей тексерудің көмегімен (3)–(5) ережелерімен анықталған $\oplus, \otimes, \Theta$ амалдарының M жиынында алгебралық болатындығы және $f^{(0)}, f^{(1)} \in N$ бейнелеулерінің сәйкесінше 0 мен 1 тең болып, $\oplus$ және $\otimes$ амалдарына қатысты нейтралды элементтер болатындығын көрсетуге болады.

Сонымен біз $<\vee; \wedge; C; 0,1>$ сигнатурасының

$$\mathrm{N}=<N; \oplus; \otimes; \Theta; f^{(0)}; f^{(1)}>$$

алгебралық жүйесіне көшеміз, егер бұл сигнатураның $\wedge; \vee; C$ функционалдық таңбаларына $\oplus; \otimes; \Theta$ алгебралық амалдары сәйкес қойылса, ал 0 мен 1 тұрақты таңбаларының мәндері сәйкесінше $f^{(0)}$ және $f^{(1)}$ элементтері болса, N алгебралық жүйесінде барлық 1)–9) аксиомалар орындалады. Яғни N жүйесі Буль алгебрасы болады. Қарастырылған 1) және 2) мысалдар келесі проблемалық жағдайларды (ситуация) құруға мүмкіндік береді.

M жиынының әрбір S ішкі жиынымен, яғни $\mathrm{B}(M)$ бульдің әрбір элементімен $f_S: M \rightarrow\{0,1\}$, бейнелеуін келесі түрде байланыстыруға болады:

$$f_S(x)=\begin{cases}1, & \text{егер} \quad x \in S; \\ 0, & \text{егер} \quad x \in M \setminus S.\end{cases}$$

f_S бейнелеуі M жиынындағы S ішкі жиынының характеристикалық функциясы деп аталады. Осыған сәйкес, N алгебрасын M жиынының барлық ішкі жиындарының характеристикалық функцияларының алгебрасы деп атауға болады. f_S бейнелеуінің анықтамасы $B(M)$ жиынынан N жиынына келесі ережемен Φ сәйкестігін орнатуға мүмкіндік береді:

$$(\forall S \in B(M))\left(\Phi(S)=f_S\right), \quad (6)$$

шешуін табуды қажет ететін проблемалық жағдай, (6) ережемен анықталған Φ сәйкестігінің қасиеттерін сипаттау болып табылады. Ұсынылып отырған жағдай көлеміндегі қойылымдық сұрақтар келесі түрде болуы мүмкін:

– Φ сәйкестігінің бейнелеу (биективті бейнелеу) болады ма?

– Φ сәйкестігі $\mathrm{B}(M)=<B(M); \cup; \cap; -; \emptyset; M>$ Буль алгебрасының $\mathrm{N}=<N; \oplus; \otimes; \Theta; f^{(0)}; f^{(1)}>$ Буль алгебрасына изоморфты бейнелеуі болады ма?

3. $A_1, A_2, \ldots A_n$ n айнымалылардың тұжырымдар алгебрасының барлық формулалар жиыны L_n қарастырайық.

L_n жиынында $\left(\forall A, B \in L_n\right)(APB \Leftrightarrow(A \leftrightarrow B))$ (теңбе-тең ақиқат формула) ережесімен анықталған P екіорынды қатынасының квазиреттік қатынас болады.

Енді, $L_n / \sim_P=\left\{[A]_{\sim_P} / A=A\left(A_1, A_2, \ldots, A_v\right) \in L_n\right\}$ фактор-жиынында екіорынды «$\vee$» мен «$\wedge$» амалдарын және бірорынды «–» амалын сәйкесінше келесі ережелермен анықтайық:

$$\left(\forall [A]_{\sim_P};[B]_{\sim_P}\in {L_n}/_{\sim_P}\right)\left([A]_{\sim_P}\vee[B]_{\sim_P}=[A\vee B]_{\sim_P}\right);$$

$$\left(\forall [A]_{\sim_P};[B]_{\sim_P}\in {L_n}/_{\sim_P}\right)\left([A]_{\sim_P}\wedge[B]_{\sim_P}=[A\wedge B]_{\sim_P}\right);$$

$$\left(\forall [A]_{\sim_P}\in {L_n}/_{\sim_P}\right)\left(\overline{[A]}_{\sim_P}=[\overline{A}]_{\sim_P}\right).$$

$$\mathrm{L}_n/_{\sim_P}=\left\langle {L_n}/_{\sim_P};\vee;\wedge;[0]_{\sim_P};[1]_{\sim_P}\right\rangle$$

алгебралық жүйесін стандартты сигнатурасының Буль алгебрасы, немесе Линденбаум алгебрасы, деп атайды.

4. Бұл мысал элементар (қарапайым) сандар теориясымен байланысты.

Мұнда (a,b) және $[a,b]$ өрнектері натурал сандарының ең үлкен ортақ бөлгіші мен ең кіші ортақ еселігін білдіреді.

Айталық, P жай сандардың кез келген ақырлы жиыны және M жиыны $1\cdot p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_t$ түріне келтірілетін натурал сандар жиыны болсын.

M жиынында $\oplus$ мен $\otimes$ екіорынды амалдарын және Θ бірорынды амалын келесі ережелермен анықтайық:

Айталық, $a,b\in M$, $a=1\cdot p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_{t_a}; b=1\cdot q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_{t_b}$ және $S=P\setminus\left\{1;p_1;p_2;\ldots;p_{t_a}\right\}$ болсын, онда $a\oplus b=[a,b]$, $a\otimes b=(a,b)$, $\Theta a=1\cdot\prod\limits_{p\in S}p$ деп алайық.

Сонымен, $\mathrm{M}=<M;\oplus;\otimes;\Theta;1;1\cdot\prod\limits_{p\in S}p>$. M жүйесі Буль алгебрасы болады.

5. Топологиялық құрылымдар Буль алгебраларымен тығыз байланысты. Мысалға, барлық топологиялық кеңістіктер Буль алгебрасы болады.

Айталық, $\langle A,\tau\rangle$ топологиялық кеңістік және 0_τ жиыны τ топологиясындағы A жиынының барлық ашық-тұйықталған ішкі жиындарының жиыны болсын.

$$\mathrm{O}_\tau=\langle O_\tau;\cup;\cap;-;\varphi;A\rangle$$

Буль алгебрасы болады, оны ашық-тұйықталған жиындардың топологиялық $\langle A;\tau\rangle$ кеңістігінің Буль алгебрасы деп атайды.

Буль құрылымдарының арасындағы сәйкестендіру абстракциясы. Ғылыми абстракциялардың қалыптасу әдісі адамның танымдық іс-әрекетінің жалпы бір әдісі болып табылады. Математикалық танымның өте бір кең тараған түріне сәйкестендіру абстракциясы жатады. Жалпы алғанда, интуитивті-мағыналық деңгейде, сәйкестендіру абстракциясы математикада келесі сызба бойынша іске асады.

Біртекті объектілер жиынын қарастыруда олардың әр түрлі жалпы қасиеттері айқындалады. Бұл қасиеттерді таңдау зерттеу мақсатына сәйкес жүргізіледі.

Бұл жағдайда қарастырылып отырған жиынның объектілерінің арасындағы маңызды емес қасиеттерге көңіл аудармай, олардың маңызды ортақ қасиеттері зерттеледі. Осыдан соң ерекшелеп алынған қасиеттердің көмегімен ажыратуға болмайтын жиын объектілері сәйкестендіріледі.

Өзара сәйкестендірілген объектілердің әрбір класы жаңа табиғатты объект ретінде формаль тілдің белгілі бір термині немесе таңбасы арқылы белгіленеді. Ол әріректе ерекшеленген қасиеттер жиынтығы бар осы кластың барлық объектілерінің иелік өлшемінің негізі (бейнесі) болады. Біртекті объектілер жиынын қарастырғанда ерекшеленген қасиеттер жаңа ұғымдардың мағынасының кері бейнесін кескіндейді және олар сәйкестендірілген элементтер кластарымен және олардың көлемімен одақтастырылады.

Сәйкестендіру абстракциясын қолдану нәтижесінде ерекшеленген математика ұғымдарына (объектілеріне) қатысты, «олар абстракция әдісін қолдану нәтижесінде алынған» деп айтады [2].

Буль алгебралары класында сәйкестендіру абстракциясын қолдану іс-әрекеті идеалдардың көмегімен іске асырылатын болса, ал жалпы Буль құрылымдарында — бұл Буль алгебралары, Буль торлары, Буль сақиналары арасындағы сәйкестендіру (көшу) абстракциясы [3].

Буль алгебрасы [1] — $A \neq \emptyset$ жиынындағы теоретикалық-жиындық амалдарға қатысты тұйықталған алгебралық жүйе.

Буль торы [1] $\langle A, U \rangle$ алгебралық жүйесі түрінде анықталады.

$$x \leq_A y \Leftrightarrow xUy,$$

мұнда $\leq_A$ — бөліктік-реттік қатынасы, A жиынында анықталған.

Егер $\mathbb{A} = \langle A; \cup; \cap; C \rangle$ Буль алгебрасы болса, онда $\mathbb{P}(\mathbb{A}) = \langle \mathbb{A}, \leq \rangle$ Буль торы болады.

Сөйлем 1. а) $\mathbb{A}$ Буль торынан $\mathbb{A}(\mathbb{A})$ Буль алгебрасына;

б) $\mathbb{A}$ Буль алгебрасынан $\mathbb{P}(\mathbb{A})$ Буль торына көшу орынды.

Бірлік элементті Буль сақинасы [1] деп кез келген $x \in K$ үшін $x \cdot x = x$ теңдігі орындалатын $\mathbb{K} = \langle K; +; \cdot; 0; 1 \rangle$ коммутативті және ассоциативті сақинаны айтады.

$\mathbb{K}$ Буль сақинасы бойынша

$$\mathsf{L}(\mathsf{K}) = \left\langle K; \leq_{L(K)} \right\rangle$$

жүйесін анықтайық. Мұндағы $\leq_{L(K)}$ қатынасы келесі ережемен анықталған:

$$(\forall a, b \in K)\left(a \leq_{L(K)} b \Leftrightarrow a \cdot b = a\right).$$

Сөйлем 2. $\mathbb{L}(\mathbb{K})$ алгебралық жүйесі Буль торы болады. Айталық, $\mathbb{L} = \langle L; \leq \rangle$ Буль торы болсын. Онда, $\mathsf{K}(\mathsf{L}) = \left\langle L; \bullet_{\mathsf{K}(\mathsf{L})}; +_{\mathsf{K}(\mathsf{L})}; 0_{\mathsf{K}(\mathsf{L})}; 1_{\mathsf{K}(\mathsf{L})} \right\rangle$ Буль сақинасын анықтауға болады.

Сөйлем 3. а) $\mathbb{K}$ Буль сақинасынан $\mathbb{L}(\mathbb{K})$ Буль торына;

б) $\mathbb{L}$ Буль торынан $\mathsf{K}(\mathsf{L})$ Буль сақинасына көшу орынды.

Теорема 1. Кез келген $\mathsf{K} = \langle K; +; \cdot; 0; 1 \rangle$ Буль сақинасы мен кез келген $\mathbb{L} = \langle L; \leq \rangle$ Буль торы үшін $\mathbb{K}(\mathbb{L}) = \mathbb{K}$ теңдігі орындалады сол уақытта тек ғана сол уақытта, егер $\mathsf{L}(\mathsf{K}) = \mathsf{L}$ болса.

Салдар: а) егер $\mathbb{K}$ Буль сақинасынан $\mathsf{L}(\mathsf{K})$ Буль торына көшіп, одан соң $\mathbb{L}(\mathbb{K})$ Буль торы бойынша $\mathsf{K}(\mathsf{L}(\mathsf{K}))$ Буль сақинасын құрсақ, онда қайтадан алғашқы Буль сақинасын аламыз, яғни $\mathbb{K}(\mathbb{L}(\mathbb{K})) = \mathbb{K}$;

б) егер $\mathbb{L}$ Буль торы бойынша $\mathbb{K}(\mathbb{L})$ Буль сақинасына көшіп, одан соң $\mathbb{K}(\mathbb{L})$ Буль сақинасы бойынша $\mathsf{L}(\mathsf{K}(\mathsf{L}))$ Буль торын құрсақ, онда қайтадан алғашқы Буль торын аламыз, яғни $\mathsf{L}(\mathsf{K}(\mathsf{L})) = \mathsf{L}$.

Қорытынды. Буль алгебралары, торалары және сақиналары сипаттау әдістері әр түрлі болатын бір ғана абстрактілі объектінің семантикалық баламалары деп айтуға болады.

Буль алгебраларының көріністері туралы Стоун теоремасы. Бос емес жиынның ішкі жиындарының Буль алгебрасында теоретикалық-жиындық интуицияны көріністің көрнекілігіне негіздеп, қолдану мүмкін болғандықтан, оны оқып-зерттеу анағұрлым жеңіл.

Бұл мақалада кез келген Буль алгебрасы жиындар алгебрасының көмегімен іске асады, яғни Буль алгебраларының көріністері туралы М.Стоунға тиісті негізгі теорема дәлелденеді. Мағыналық жағынан алғанда бұл теореманың тұжырымы төмендегідей:

Теорема 2. Кез келген Буль алгебрасы, изоморфизмге дейінгі дәлдікпен алғанда, кейбір бос емес жиынның барлық ішкі жиындарының Буль алгебрасының ішкі алгебрасы болады, яғни жиындар алгебрасы [3].

Бұл теореманы дәлелдеу жолындағы негізгі шешуге тиісті сұрақ изоморфизмге дейінгі дәлдікпен алғанда $\mathbb{B}$ алгебрасымен беттесетін кейбір ішкі жиындар алгебрасы бар M жиынын (берілген $\mathbb{B}$ Буль алгебрасы бойынша) құру.

Ізделініп отырған M жиынының орнына $\mathbb{B}$ Буль алгебрасының барлық максималды идеалдар жиынын алуға болатын көрінеді.

$\mathbb{B}$ Буль алгебрасының өзіндік идеалы I:

1) максималды деп аталады, егер осы алгебраның I идеалын кеңейтетін ешқандай өзіндік I' идеалы болмаса, яғни $I \in I' \subset B$;

2) жай деп аталады, егер кез келген $a \in B$ элементі үшін не $a \in I$, не $C(a) \in I$ болса.

Байқайтынымыз, $\subset$ қатынасының теоретикалық-жиындық тіліндегі «максималды идеал» ұғымы Буль алгебрасының негізгі де, туынды да қатынасы емес. Осыған байланысты, «жай идеал» ұғымы максималды идеалдардың «ішкі» сипаттамасы үшін енгізіледі. Себебі келесі теорема орынды:

Теорема 3. $\mathbb{B}$ Буль алебрасының идеалы I максималды болады, сонда тек қана сонда, егер ол жай идеал болса [3].

Баяндау толық болуы үшін осы теореманың дәлелдеуін келтірейік.

Жеткіліктілігі түсінікті, себебі кез келген жай идеал максималды болады. Шындығында, айталық, $\mathbb{B}$ алгебрасының жай идеалы I берілсін. Бірақ осыған қарамастан, I' өзіндік идеалы табылып, $I \subset I'$ қамтылуы өзіндік болғандықтан, онда a элементі табылып, $a \in I' \setminus I$ болады, яғни $a \in I'$ және $a \notin I$.

I идеалының жай болуына байланысты бұдан шығатын салдар $C(a) \in I$, яғни, $I \subset I'$ қамтылуын ескере отырып, $C(a) \in I'$. Бірақ $1 = a \vee C(a) \in I',$ себебі I' жиыны $\vee$ амалына қатысты тұйықталған.

Кез келген $a \in B$ элементі үшін $a \leq 1$ болуы себепті, онда $I' = B$. Сонымен, I' өзіндік идеал болмай шықты, ал бұл біздің жасаған жорамалымызға қарама-қайшы.

Теореманың қажетті шартын дәлелдеу үшін де кері жору әдісін қолданамыз. Айталық, $\mathbb{B}$ алгебрасының максималды I идеалы бар болсын және ол жай идеал болмасын. Онда $a \in B$ элементі табылып, $a \notin I$ және $C(a) \notin I$ болады.

B жиынының келесі ішкі жиындарын қарастырайық:

$$I_a = \{ b \mid (b \in B) \text{ және } (\exists c \in I)(b \leq a \vee c) \}; \tag{7}$$

$$I_{C(a)} = \{ b \mid (b \in B) \text{ және } (\exists c \in I)(b \leq C(a) \vee c) \}. \tag{8}$$

I_a және $I_{C(a)}$ ішкі жиындарының B Буль алгебрасының идеалдары болатындығын оңай тексеруге болады.

(7) және (8) анықтамалар $I \subseteq I_a$ және $I \subseteq I_{C(a)}$ болатынын көрсетеді. Шын мәнісінде бұл қамтылу өзіндік, себебі $a \in I_a \setminus I$ және $C(a) \in I_{C(a)} \setminus I$. Бұдан I идеалының максималдығынан шығатын салдар: $I_a = B$ және $I_{C(a)} = B$. Сондықтан $1 \in I_a$ және $1 \in I_{C(a)}$. I_a және $I_{C(a)}$ жиындарының (7) және (8) анықтамаларына сәйкес, онда $c_1, c_2 \in I$ элементтері табылып, $a \vee c_1 = 1$ және $C(a) \vee c_2 = 1$ болады. Ал бірақ негізгі анықтама бойынша

$$(c_1 \vee c_2) \vee (a \wedge C(a)) = (c_1 \vee c_2) \vee 0 = c_1 \vee c_2. \tag{9}$$

Біздің тұжырымымыз бойынша

$$\begin{aligned}(c_1 \vee c_2) \vee (a \wedge C(a)) &= ((c_1 \vee c_2) \vee a) \wedge ((c_1 \vee c_2) \vee C(a)) = \\ &= ((a \vee c_1) \vee c_2) \wedge ((C(a) \vee c_2) \vee c_1) = (1 \vee c_2) \wedge (1 \vee c_1) = 1 \wedge 1 = 1.\end{aligned} \tag{10}$$

(9) және (10) теңдіктер тізбегінің сол жақтары бірдей болғандықтан, шығатын қорытынды $c_1 \vee c_2 = 1$. Бірақ $c_1, c_2 \in I$, сол себепті $c_1 \vee c_2 \in I$, яғни $1 \in I$, ал онда $I = B$ болар еді. Бұл I — өзіндік идеал деген тұжырымға қарама-қайшы. B Буль алгебрасының барлық максималды идеалдар жиынын $I(B)$ арқылы

$$\mathbb{B}(I(B)) = < B(I(B)) : \cup; \cap; -; \emptyset; I(B) >$$

Буль алгебрасын қарастырайық ($I(B)$ жиынының барлық ішкі жиындарының жиыны).

Дәлелдеудің келесі кезеңі алғашқы $\mathbb{B}$ алгебрасымен изоморфизмге дейінгі дәлдікпен беттесетін осы алгебраның ішкі алгебрасын табу.

Басқаша айтқанда, $\mathbb{B}$ алгебрасының $\mathbb{B}\left(I\left(B\right)\right)$ алгебрасына изоморфты қамтылуы болатын ең болмағанда бір φ бейнелеуін анықтау. Бұл жағдайда $\mathbb{B}$ алгебрасының негізгі B жиынының әрбір a элементінің бейнесі $B\left(I\left(B\right)\right)$ алгебрасының негізгі жиынының элементі болатын оның кейбір максималды идеалдар жиыны болуы керек және бұл жиын a элементімен бірмәнді анықталуға тиісті. Бұл талапты әрбір a элементіне $\mathbb{B}$ алгебрасының φ бейнесі ретінде осы элементті қамтымайтын барлық максималды идеалдар жиынын алу арқылы қамтамасыз етуге болады.

Осыған байланысты алдын ала келесі тұжырымды дәлелдеу керек. Кез келген 0-ден өзгеше $a \in B$ элементі үшін мұндай идеалдар жиыны бос емес.

Сонымен, B алгебрасының кез келген нольден өзгеше $a \in B$ элементі үшін осы элементті қамтымайтын максималды I идеалының бар болатындығын дәлелдейік. Бұл фактіні дәлелдеуде, математикада белгілі «максимум принципі» деп аталатын Цорн леммасын пайдаланамыз. *Цорн леммасы* келесі түрде тұжырымдалады. Егер бөліктік реттелген $\mathbb{M} = < M; P >$ жиынында әрбір тізбектің жоғарғы шекарасы болса, онда M жиынында ең болмағанда бір максималды элемент табылады [1].

Бұл жағдайда, тізбек деп бөліктік реттелген M жиынының осы P қатынасы бойынша сызықтық реттелген кез келген ішкі жиынын түсінеміз.

Біздің жағдайымызда, бөліктік реттелген жиынның ролін $C\left(a\right)$ элементін қамтитын $\mathbb{B}$ Буль алгебрасының барлық өзіндік U_a идеалдар жиыны атқарады, яғни a элементін қамтитын кәдімгі теоретикалық-жиындық қамтылудың көмегімен реттелген бөліктік реттелген $< U_a; \subseteq >$ жиыны. Алдымен, кез келген нольден өзгеше $a \in B$ элементі үшін U_a жиынының бос болмайтындығын дәлелдейік. Байқайтынымыз, a элементінің толықтаушы $C\left(a\right)$ элементімен туындаған $I_{C(a)}$ бас идеалы — өзіндік.

Керісінше жағдайда, $1 \in I_{C(a)}$, яғни $1 \le C\left(a\right)$ болар еді. ($I_{C(a)}$ бас идеалының анықтамасына сәйкес). Бұдан $C\left(a\right) = 1$, яғни $a = 0$, бірақ бұл «B жиынының тек қана нольден өзгеше a элементтері қарастырылады» деген шартқа қарама-қайшы. Сондықтан $C\left(a\right) \in I_{C(a)}$, яғни $I_{C(a)} \in U_a$.

Енді әрбір бағытталған U_a жиынындағы L идеалдар жиынтығының тізбегінің жоғарғы шекарасының болатындығын көрсетейік.

$$I^* = \bigcup_{I' \in L} I' \tag{11}$$

жиынының $\mathbb{B}$ Буль алгебрасының өзіндік идеалы болатынын тексеру қиын емес. Мысал, үшін I^* жиынының $\vee$ амалына қатысты тұйықталғандығын көрсетейік.

Айталық, $a, b \in I^*$ болсын. Онда $a \vee b \in I^*$ болатынын көрсетейік. I^* бағытталған идеалдар жиынтығының бірігуі болғандықтан, кейбір $I_1', I_2' \in L$ үшін $a \in I_1'$ және $b \in I_2'$ болады. Онда не $I_1' \subseteq I_2'$, не $I_2' \subseteq I_1'$. Бұл мүмкіндіктердің симметриялығынан $I_1' \subseteq I_2'$ болсын деп санайық. Онда $a, b \in I_2$, ал I_2' идеал болғандықтан, $a \vee b \in I_2'$. (11) анықтама бойынша бұдан алатынымыз, $a \vee b \in I^*$. (11) анықтамадан шығатын тағы бір салдар: $C\left(a\right) \in I^*$, яғни $I^* \in U_a$. Әрине, I^* жиыны — L идеалдар тізбегінің жоғарғы шекарасы. Сонымен, бөліктік реттелген $< U_a; \subseteq >$ жиыны үшін Цорн леммасының шарты орындалады, онда оның қорытындысы да орынды, ал ол бойынша бұл бөліктік реттелген жиынның максималды элементі I бар. Енді осы I идеалының B Буль алгебрасының максималды идеалы болатынын дәлелдеу.

Дәлелдеу үшін кері жору әдісін пайдаланамыз. Яғни I идеалын кеңейтетін B жиынына тең емес өзіндік I_1 идеалы табылып, $I \subset I_1 \subset B$ болсын. Бірақ онда $C\left(a\right) \in I_1$, себебі $C\left(a\right) \in I$. Сонымен, I_1 өзіндік идеалы $C\left(a\right)$ элементін қамтиды, сондықтан $I_1 \in U_a$. Ал бұл I идеалының бөліктік реттелген $< U_a; \subseteq >$ жиынының максималды элементі болу шартына қарама-қайшы.

Келтірілген дәлелдеу Цорн леммасы пайдаланып дәлелденетін тұжырымдардың барлығына тән. Ал, бұл бізге Цорн леммасын қолданудың жалпы жобасын алуға пайдасын тигізеді.

Дәлелдеудің екінші кезеңіне көшейік. $\varphi:\mathrm{B}\to\mathrm{B}\big(I(B)\big)$ бейнелеуін

$$(\forall a\in B)\,(\varphi(a)=\{I' \mid I'\in I(B) \text{ және } a\in I'\}) \qquad (12)$$

ережесімен анықтайық.

φ бейнелеуінің:

а) инъективтілігін;

б) амалдарды сақтайтындығын дәлелдейік.

а) Айталық, $a,b\in B$ және $a\neq b$ болсын. $\varphi(a)\neq\varphi(b)$ болатынын дәлелдейік. $a\neq b$ болғандықтан, не $a<b$ не $b<a$, яғни $b\nless a$, немесе $a\nless b$. Бұл мүмкіндіктердің симметриялығынан «$a\nless b$ болсын» деп жориық. Онда $a\wedge C(b)\neq 0$, себебі, керісінше жағдайда, (яғни $a\wedge C(b)=0$ болғанда) алатынымыз:

$$a=a\wedge 1=a\wedge\big(b\vee C(b)\big)=(a\wedge b)\vee\big(a\wedge C(b)\big)=(a\wedge b)\vee 0=a\wedge b.$$

Ал, бұл $a\neq b$ болатынын ескерсек, $a<b$. $a\wedge C(b)$ элементінің 0-ден өзгеше болуы себепті, онда жоғарыда дәлелдегеніміз бойынша, B алгебрасының максималды I идеалы бар болады $a\wedge C(b)\notin I$. Бұдан алатынамыз $a\notin I$ және $C(a)\notin I$. Кез келген максималды I идеалының жай болуы себепті, онда $C(b)\notin I$, яғни $b\in I$.

Сонымен, $I\in\varphi(a)$ және $I\notin\varphi(b)$, ал бұл $\varphi(a)\neq\varphi(b)$ тұжырымының дәлелдеуін береді.

б) 1. φ бейнелеуінің $\vee$ амалын сақтайтынын, яғни

$$\varphi(a\vee b)=\varphi(a)\cup\varphi(b)$$

болатынын, көрсетейік. Ол үшін φ бейнелеуінің (6) анықтамасына сәйкес

$$\{I' / I'\in I(B) \text{ және } a\vee b\notin I'\}=\{I' / I'\in I(B) \text{ және } a\notin I'\}\cup\{I' / I'\in I(B) \text{ және } b\notin I'\} \qquad (13)$$

теоретикалық-жиындық теңдігін дәлелдеу керек. (13) теңдікті қамтылу әдісімен дәлелдейміз, яғни

$$\varphi(a\vee b)\subseteq\varphi(a)\cup\varphi(b) \text{ және } \varphi(a)\cup\varphi(b)\subseteq\varphi(a\vee b)$$

болатынын дәлелдейміз.

Бірінші қамтылуды дәлелдейік. $I\in\varphi(a\vee b)$ деп жориық. Онда $a\vee b\notin I$, яғни $C(a\vee b)\in I$, себебі максималды идеал жай болады. $C(a\vee b)=C(a)\wedge C(b)$ болуы себепті, онда алатынымыз $C(a)\wedge C(b)\in I$. Бұдан шығатыны не $C(a)\in I$, не $C(b)\in I$. Шындығында, егер кері тұжырым орындалса, яғни $C(a)\notin I$ және $C(b)\notin I$ болса, онда I максималды идеал болуы себепті, біз $a\in I$ және $b\in I$ қатынастарын алған болар едік, ал бұл идеалдың қамтылу қасиетіне сәйкес $a\vee b\in I$. Ал бұл мүмкін емес. Енді егер $C(a)\in I$ болса, онда $a\notin I$, яғни $I\in\varphi(a)$. Осыған ұқсас, егер $C(b)\in I$ болса, онда $b\notin I$, яғни $I\in\varphi(b)$. Сонымен, кез келген жағдайда $I\in\varphi(a)\cup\varphi(b)$. Бірінші қамтылу толық дәлелденді.

Екінші қамтылуды дәлелдейік. Айталық, $I\in\varphi(a)\cup\varphi(b)$, яғни $I\in\varphi(a)$ немесе $I\in\varphi(b)$ болсын. Бұл екі мүмкіндіктің симметриялығынан «$I\in\varphi(a)$, яғни $a\notin I$», деп жориық. Онда $a\vee b\notin I$.

Кері жориық. Айталық, $a\vee b\in I$ болсын. Бұдан біздің алатынымыз, $a\in I$, себебі $a\leq a\vee b$. Сонымен, $I\in\varphi(a)\cup\varphi(b)$.

$\varphi(a\wedge b)=\varphi(a)\cap\varphi(b)$ теңдігін, яғни φ бейнелеуінің $\wedge$ амалын сақтайтындығын

$$\varphi\big(C(a)\big)=\overline{\varphi(a)}$$

дәлелдейік. Ол үшін φ бейнелеуінің анықтамасына сәйкес

$$\{I' / I'\in I(B) \text{ және } C(a)\notin I'\}=I(B)\setminus\{I' / I'\in I(B) \text{ және } a\notin I'\} \qquad (14)$$

теоретикалық-жиындық теңдігін табу керек.

(14) теңдікті дәлелдеу үшін қайтадан қамтылу әдісін қолданамыз. Яғни $\varphi\left(C(a)\right)\subseteq\overline{\varphi(a)}$ және $\overline{\varphi(a)}\subseteq\varphi\left(C(a)\right)$ қатынастарын дәлелдейміз.

Айталық, $I\in\varphi\left(C(a)\right)$, яғни $C(a)\notin I$ болсын. Онда бұдан алатынымыз, $a\in I$, себебі I — жай идеал. Бірақ онда $I\notin\varphi(a)$, яғни $I\in I(B)\setminus\varphi(a)=\overline{\varphi(a)}$. Бірінші қамтылу дәлелденді. Айталық, енді $I\in\overline{\varphi(a)}$, яғни $I\notin\varphi(a)$ болсын, онда $a\in I$. I идеалы максималды және анықтама бойынша өзіндік болғандықтан, онда $C(a)\in I$. Онда $I\in\varphi\left(C(a)\right)$. Екінші қамтылу дәлелденді.

$\varphi(0)=\emptyset$ және $\varphi(1)=I(B)$ теңдіктерін тексеру қиын емес. Шындығында егер $I\in I(B)$ болса, онда $0\in I$ және $1\notin I$. Сонымен, сәйкесінше $I\notin\varphi(0)$ және $I\in\varphi(1)$. Бұл жоғарыда келтірілген теңдіктердің дұрыстығын көрсетеді.

Стоун теоремасын толық дәлелдеу үшін бізге енді келесі тұжырымды дәлелдеу керек: егер $\mathbb{B}_1$ Буль алгебрасы $\mathbb{B}_2$ Буль алгебрасына изоморфты қамтылатын болса, онда $\mathbb{B}_1$ алгебрасы $\mathbb{B}_2$ алгебрасының ішкі алгебрасымен изоморфты.

Шындығында, егер φ бейнелеуі $\mathbb{B}_1$ алгебрасының $\mathbb{B}_2$ алгебрасына изоморфты қамтылуы болса, онда әріректе келтірілгендей,

$$\mathrm{Im}\,\varphi=<\mathrm{Im}\,\varphi;\vee_2;\wedge_2;C_2;0_2;1_2>$$

алгебралық жүйесі $\mathbb{B}_2$ буль алгебрасының ішкі алгебрасы болады. Әрине, онда φ бейнелеуі $\mathbb{B}_1$ алгебрасының осы ішкі алгебраға изоморфты бейнелеуі болады. Яғни $\mathbb{B}_1=\mathrm{Im}\,\varphi$.

Буль алгебрасының көріністері туралы *Стоун теоремасы* келесі түрде тұжырымдалады: әрбір Буль алгебрасы кейбір жиындар алгебрасымен изоморфты [1].

Жоғарыда келтірілген ой-талдау кез келген $\mathbb{B}=<B;\vee;\wedge;C;0;1>$ Буль алгебрасының $\mathbb{B}\left(I(B)\right)=<B\left(I(B)\right);\cup;\cap;-;\emptyset;I(B)>$ Буль алгебрасының ішкі алгебрасына, яғни кейбір жиындар алгебрасына, изоморфты екендігін көрсетеді.

Буль алгебрасының Стоундық кеңістіктері. T топологиялық құрылымдарды жалпы математикалық құрылымдарды классификациялаудың негізі ретінде Н.Бурбаки ерекше дараланып алынған болатын. Буль алгебраларының мысалында, бір қарағанда, топологиялық кеңістіктен тым алыс, алгебралық жүйелердің топологиялық қасиеттерін анықтауға тамаша мүмкіндік туып отыр.

$F(B)$ арқылы $\mathbb{B}=<B;\vee;\wedge;C;0;1>$ Буль алгебрасының ультрафильтрлер жиынын белгілейік. Бұл алгебраның кез келген $a\in B$ элементі үшін осы элементті қамтымайтын максималды идеалының бар болатындығын негізге ала отырып алатынымыз, кез келген $a\in B$ элементін қамтитын ультрафильтрдің табылатындығы. Базис ретінде келесі

$$\left\{U_a\mid a\in B\right\},\ \text{мұндағы}\ U_a=\left\{F\mid F\in F(B)\ \text{және}\ a\in F\right\} \tag{15}$$

ашық жиындар жиынтығын таңдап алып, $F(B)$ жиынында τ_B топологиясын анықтайық. Яғни U_a a элементін қамтитын $\mathbb{B}$ алгебрасындағы барлық ультрафильтрлер жиыны.

Осыған байланысты, максималды идеал және ультрафильтр ұғымдары бір-біріне қатысты қосалқы болып табылады және ультрафильтрлердің көптеген қасиеттері максималды идеалдар жағдайында келтірілген дәлелдеулерге ұқсас жүргізіледі.

Төменде осындай қасиеттердің бірнешеулері дәлелдеусіз келтіріледі:

1) $\mathbb{B}=<B;\vee;\wedge;C;0;1>$ Буль алгебрасының фильтрі F ультрафильтр болады сол уақытта тек қана сол уақытта, егер $C(F)=\left\{C(a)\mid a\in F\right\}$ жиыны максималды идеал болса.

2) $(\forall a,b\in B)\left(U_a\cup U_b=U_{a\vee b}\right)$;

3) $(\forall a,b\in B)\left(U_a\cap U_b=U_{a\wedge b}\right)$;

4) $(\forall a\in B)\left(U_{C(a)}=\overline{U}_a\right)$;

5) $U_0=\emptyset$;

6) $U_1=F(B)$.

$1^{/}$) қасиет кез келген базистік ашық U_a жиынының тұйықталған болатындығын көрсетеді. Элементтердің саны бойынша индукция әдісін қолдана отырып, 2) және 3) қасиеттерді кез келген ақырлы санды қосылғыштарға оңай таратуға болады. Яғни

$2^{/}$) $(\forall a_1, a_2, \ldots, a_t \in B)\left(U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup \ldots \cup U_{a_t} = U_{a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_t}\right)$;

$3^{/}$) $(\forall a_1, a_2, \ldots, a_t \in B)\left(U_{a_1} \cap U_{a_2} \cap \ldots \cap U_{a_t} = U_{a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_t}\right)$;

$\{U_a \mid a \in B\}$ ашық-тұйықталған жиындар жиынтығы базаны анықтаушы қасиеттерді қанағаттандырады, сондықтан ол ашық ішкі жиындары кез келген $\{U_a \mid a \in B\}$ жиынтығының ішкі жиынтықтарының бірігуі болатын $F(B)$ жиыныңдағы кейбір топологияны береді.

Бұл мақаланың негізгі мақсаты топологиялық кеңістіктердің кейбір маңызды сипаттамаларын айқындауды қамтамасыз етуде технологиялық тұрғылар мен құрылымдарды негіздеп көрсету. Жеке жағдайда компактілікпен бөлініп алынуда. Бұл жерде «бөлініп алыну» деп топологиялық кеңістікте T_2 аксиомасының орындалуын айтамыз.

Аксиома T_2. X топологиялық кеңістігі T_2*-кеңістік,* немесе *хаусдорфтық* кеңістік, деп аталады, егер әрбір әр түрлі $x_1, x_2 \in X$ пар нүктелер үшін U_1 және U_2 ашық жиындар табылып,

$$x_1 \in U_1, \quad x_2 \in U_2 \text{ және } U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

болса [2].

τ_B топологиялық кеңістігі үшін «бөлініп алыну» қасиетін дәлелдеу өте оңай. Айталық, F_1 және F_2 жиындары $F(B)$-дан алынған әр түрлі ультрафильтрлер болсын. Онда $a \in B$ элементі табылады және $a \in F_1 / F_2$, яғни $C(a) \in F_2 / F_1$ болады.

(15) анықтамаға сәйкес $F_1 = U_a$; $F_2 = U_{C(a)}$ деп алсақ, онда $U_a \cap U_{C(a)} = \emptyset$, себебі, керісінше жағдайда, кез келген $F = U_a \cap U_{C(a)}$ ультрафильтрі өзіндік емес болар еді. τ_B топологиялық кеңістігінің компактілігін дәлелдеу үшін бірнеше қосымша ұғымдар мен нәтижелер қажет болады. Алдымен байқайтынымыз, B алгебрасының F өзіндік фильтрі ноль нольдік элементті қамти алмайды, себебі, кері жағдайда, $F = B$ болар еді. Сондықтан кез келген $a_1, a_2, \ldots, a_t \in F \quad (t \in N)$ элементтері үшін элемент $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_t \neq 0$.

Бұл қасиетті B Буль алгебрасының өзіндік фильтріне енгізуге болатын B-дан алынған S сияқты ішкі жиындарының сипаттамаларының негізіне жатқызуға болады. Осыған байланысты келесі ұғымды енгіземіз: B Буль алгебрасының негізгі жиыны B-ның ішкі жиыны S центрленген деп аталады, егер кез келген ақырлы $a_1, a_2, \ldots, a_t \in B$ элементтер жиыны үшін

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_t \in B$$

болса. Осы ұғымға негіздеп, келесі сәйкес белгіні тұжырымдаймыз: B Буль алгебрасының негізгі жиыны B-ның ішкі жиыны S-ті кейбір ультрафильтрге дейін кеңейтуге мүмкін болу үшін S ішкі жиынының центрленген болуы қажетті және жеткілікті.

Тұжырымдалған шарттың қажеттілігі жоғарыда атап өтілген. Жеткіліктілігін дәлелдейік. Ол үшін бізге S ішкі жиынын кейбір өзіндік $F = F(B)$ фильтріне қамтылту керек. Оны құруды бізге фильтрдің анықтамасының өзі көрсетіп тұр. Анықтамаға сәйкес, фильтр ақырлы қиылысуға қатысты тұйықталған болуы керек және өзінің әрбір элементімен бірге одан үлкен барлық элементтерді қамтуға тиісті. Осыған сәйкес ізделініп отырған фильтр

$$[S] = \{b \mid b \in B \text{ және } (\exists a_1, a_2, \ldots, a_n \in B)(a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n \leq b),\ n \in N\} \tag{16}$$

ішкі жиынын қамтуға тиісті.

Басқаша жағынан, $[S]$ ішкі жиынының өзіндік фильтр болатынын тексеру қиын емес. Мысал үшін, $[S]$ жиынының $\wedge$ амалына қатысты тұйықталғандығын тексерейік.

Айталық, $b, b' \in [S]$ болсын. $b \wedge b' \in [S]$ болатынын көрсетейік. (16) анықтамадан $a_1, a_2, \ldots a_t \in B$ элементтері табылып,

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_t \leq b \tag{17}$$

шығады. Осыған ұқсас, $a_1', a_2', \ldots a_s' \in B$ элементтері табылып,

$$a_1' \wedge a_2' \wedge \ldots \wedge a_s' \le b' \tag{18}$$

шығады. (17) пен (18) алатынымыз

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_t \wedge a_1' \wedge a_2' \wedge \ldots \wedge a_s' \le b \wedge b'. \tag{19}$$

(19) қатынастан (16) анықтамаға сәйкес $b \wedge b' \in [S]$ қатынасы алынады.

Сонымен, ізделініп отырған өзіндік F фильтрі ретінде $[S]$ фильтрін алуға болады екен.

Енді максимум принципін пайдаланып, келесі тұжырымды дәлелдейік:

В Буль алгебрасының әрбір өзіндік фильтрін осы алгебраның ультрафильтріне дейін кеңейтуге болады. Осы тұжырымды дәлелдеудегі негізгі кезеңдерді атап өтейік:

1) B алгебрасының берілген өзіндік F фильтрі үшін оны кеңейтетін осы алгебраның өзіндік фильтрлер жиынтығы V қарастырамыз;

2) $< V; \subseteq >$ жүйесінің бөліктік реттелген жиын болатынын және ондағы әрбір өспелі тізбектің жоғарғы шекарасының болатынын дәлелдейміз;

3) Цорн леммасының негізінде алатынымыз, бөліктік реттелген $< V; \subseteq >$ жиынының максималды элементі бар;

4) $< V; \subseteq >$ жиынының кез келген максималды элементінің F-ті қамтитын ультрафильтр болатынын дәлелдейміз.

Енді τ_B топологиялық кеңістігінің компактілі болатынын дәлелдеуге көшейік. Еске сала кетейік: X топологиялық кеңістігі компактілі деп аталады, егер оның әрбір құрсауы ақырлы ішкі құрсауларды қамтитын болса, яғни егер X кеңістігінің әрбір ашық құрсауы $\{U_s \mid s \in S\}$ үшін ақырлы $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \subset S$ жиыны табылып,

$$X = U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \ldots \cup U_{s_k}$$

орындалса, мұнда S индекстік жиынның рөлін атқарады. Сонымен, топологиялық τ_B кеңістігінің әрбір ашық жиыны U базистік $\{U_a \mid a \in B\}$ жиындарының жиынтығының кейбір ішкі жиынтығының бірігуі болса, онда біз келесі тұжырымды дәлелдейтін боламыз:

Айталық,

$$\pi = \{U_{a_\alpha} \mid a_\alpha \in B, \quad \alpha \in S\}.$$

$F(B)$ жиынының ашық-тұйықталған жиындар бірігуімен құрсалануы болсын, яғни

$$F(B) = \bigcup_{\alpha \in S} U_{a_\alpha},$$

онда $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots, a_{\alpha_t} \in B$ элементтерінің ақырлы жиыны табылып,

$$F(B) = U_{a_{\alpha_1}} \cup U_{a_{\alpha_2}} \cup \ldots \cup U_{a_{\alpha_t}} \subseteq S$$

болады.

Істелінген жұмыстарды қорытындылай келе, оның негізгі нәтижелерін айқындап өтейік:

1) Формаль аксиоматикалық теориялар әдісінің пропедевтиктік тәжірибесін қолданып, Буль алгебралары класының абстракциялық анықтамасы берілді. Бұл анықтама оның аксиомалары арқылы берілгендіктен, бұдан ұқсастықты теоретикалық-жиынтық, логикалық-алгебралық және теоретикалық-ықтималдық концепциялардың арасынан көруге болады.

2) Буль алгебраларының құрылымдық қасиеттерінің көрінуінің универсалдылығын көрсету мақсатында әр түрлі математикалық ғылымдарға тән ұғымдар жүйелерін негізге алып, біршама көп мысалдар қарастырылды.

3) Буль алгебралары аксиоматикасының мазмұндылығын көрсете отырып, Буль алгебраларынан Буль торлары мен Буль сақиналарына өзара көшуге мүмкіндік беретін, оның аксиомаларын қолдану арқылы канондық құралдар сипатталады.

4) Мазмұндық деңгейде Буль алгебраларының көріністері туралы Стоун теоремасының пропедевтикасын беру арқылы мысалдарды таңдауда негізгі назарды табиғи теоретикалық-жиындық мазмұндағы мысалдарға аудардық.

5) Стоун теоремасының қолданбалы мүмкіндіктерін көрсету және айқындау мақсатында ақырлы Буль алгебраларының изоморфизм типтерінің характеризациясы және ақырлы-жасаушылық Буль алгебраларының сипаттамасы беріледі.

6) Сәйкес бөліктік реттелген жиындардың максималды элементтері сияқты, кейбір шарттарды қанағаттандыратын максималды идеалдар мен ультрафильтрлерді құру мысалдары арқылы берілген объектінің максималды ішкі объектісінің бар болатындығын дәлелдеуге максимум принципін қолдануға негізделген әдістік тұрғының қалай іске асатындығы көрсетілді.

References

1 *Aleksandrov P.S.* Introduction to set theory and general topology. — M.: Science, 1977. — 367 p.

2 *Goncharov S.E., Drobotun B.N., Nikitin A.A.* Methodological aspects of the study of algebraic systems in higher education: Monograph. — Novosibirsk: NSU, 2007. — P. 251.

3 *Kusarev A.G., Kutatmeladze S.S.* Introduction to Boolean Valued Analysis. — M.: Science, 2005. — 526 p.

К.Жетписов, А.С.Базылжанова

Соответствия между булевыми структурами и стоуновские пространства булевых алгебр

С целью демонстрации универсальности проявления структурных свойств булевых алгебр рассмотрено большое количество примеров, свойственных различным математическим наукам. Используя опыт пропедевтики метода формальных аксиоматических теорий, введено абстрактное определение класса булевых алгебр, позволяющее отразить посредством его аксиом, аналогию между теоретико-множественными, логико-алгебраическими и теоретико-вероятностными концепциями. Осуществляя на содержательном уровне пропедевтику теоремы Стоуна о представлении булевых алгебр, рассматривались примеры, которые допускали естественную теоретико-множественную трактовку.

K.Zhetpisov, A.S.Bazylzhanova

The correspondence between boolean structures and stones spaces of boolean algebras

In order to demonstrate the universality of the manifestation of the structural properties of Boolean algebras a number of examples which characteristic of different mathematical sciences is considered. Using the experience of Propaedeutic of method of formal axiomatic theories, an abstract definition of the class of Boolean algebras, which allows reflected by its axioms, the analogy between set-theoretic, logical, algebraic and probability-theoretic concepts is introduced. Exercising at a substantial level propaedeutic of Stone's theorem on the representation of Boolean algebras examples of which admits a natural set-theoretic interpretation were considered.