УДК 510.67

О счетно-атомных моделях Δ–*PM*-теорий в обогащенной сигнатуре

On coutable-atomic models of Δ–*PM* theories in enriched signature

Бегетаева Г.С., Ешкеев А.Р.

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (e-mail: GBC85@mail.ru, modth1705@mail.ru)

Мақала өзінің мазмұны бойынша модельдер теориясына жатады, тақырыбы толық емес индуктивті теориялармен байланысты. Дербес жағдайда индуктивті теориялардың кәдімгі табиғи ішкі кластарын жасайтын йонсондық теориялардың теориялық-модельді қасиеттері қарастырылады. Сондай-ақ байытылған сигнатурадағы Δ–*PM*-теориялардың атомдық және жай модельдерінің кейбір қасиеттері зерттеледі.

The work under the maintenance concerns to the model theory.The theme of the given article is connected with studying incomplete inductive theories. In particula, it is considered model-theoretical properties of jonsson's theories which form a natural subclass of inductive theories. In the work some properties of atomic and prime models of Δ–*PM*-theories in the enriched signature are considered.

Данная работа является продолжением исследований, проведенных в [1], где изучались связи между некоторыми видами простых и атомных счетных моделей Δ–*PM*-теорий. Эта проблематика хорошо известна и относится к классическим вопросам общей теории моделей. Например, в работе [2] Воотом было доказано, что модель проста тогда и только тогда, когда она счетна и атомна. Напомним, что модель теории называется простой, если она элементарно вкладывается в любую модель рассматриваемой теории. В рамках изучения неполных теорий в работе [3] были исследованы связи между алгебраической простотой и различными видами атомности. Эта тематика появилась в связи с интересом к обобщению понятия простой модели, которое играет важную роль в различных фундаментальных аспектах теории моделей и алгебры. Алгебраическая простота является естественным обобщением понятия простоты. Рассмотрим для этого разницу этих определений.

Модель теории называется алгебраически простой, если она изоморфно вкладывается в любую модель данной теории. Под вложением понимается инъективное отображение. Как мы видим, простая модель сохраняет все формулы языка в своем образе, а алгебраически простая — только лишь булевые комбинации атомарных формул. В работе [3] также были рассмотрены новые понятия атомности модели. Вместо классического определения атомности (модель атомна, если любой ее кортеж реализует главный тип) были рассмотрены понятия атомности для определенного вида формул, и эти виды, как правило, либо экзистенциональные формулы, либо универсальные, либо их пересечение.

Основным результатом работы [3] является серия утверждений, показывающая, что теоремы, аналогичной указанной выше теореме Воота из [2], в рамках введенных определений [3] нет. При этом рассмотренные примеры в работе [3] имели отношение к индуктивным теориям. Естественным подклассом индуктивных теорий является класс йонсоновских теорий. Дадим следующее определение.

Рассмотрим теорию T счетного языка первого порядка L.

Определение. Теория T языка L называется йонсоновской, если

T имеет бесконечную модель;

T индуктивна;

T обладает свойством совместного вложения (JEP);

T обладает свойством амальгамы (AP).

Т.Г.Мустафиным в [4] были определены обобщенно-йонсоновские теории. Дадим их определение.

Определение. Теория T называется α-йонсоновской ($0 \le \alpha \le \omega$), если:

T имеет бесконечную модель;

T α-индуктивна;

T обладает свойством совместного вложения $\alpha - JEP$;

T обладает свойством амальгамы $\alpha - AP$.

Если сравнить эти два определения, то они отличаются с точностью до α. Причем при $\alpha = 0$ получаются йонсоновские теории, при $\alpha = \omega$ — полные йонсоновские теории. Заметим, что йонсоновские теории, вообще говоря, неполны.

В работах [5, 6] Бен-Яаковым были введены понятия позитивной логики, вообще говоря, не первого порядка, им были определены основные понятия позитивной теории модели. Дадим некоторые из них.

Определение [5, 6]. Пусть M и N — структуры языка, $\Delta \subseteq B(L^+)$. Отображение $h: M \to N$ называется Δ-гомоморфизмом (символически $h: M \underset{\Delta}{\to} N$), если для любого $\varphi(\bar{x}) \in \Delta, \forall \bar{a} \in M$ из того, что $M \models \varphi(\bar{a})$, следует, что $N \models \varphi(h(\bar{a}))$. Модель M называется началом в *N,* и мы говорим, что M продолжается в N, при этом $h(M)$ называется продолжением M. Если при этом верно и обратное, т.е. для любого $\varphi(\bar{x}) \in \Delta$ $\forall \bar{a} \in M$ $M \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \models \varphi(h(\bar{a}))$, то говорят, что отображение h погружает M в N (символически $h: M \underset{\Delta}{\leftrightarrow} N$). В дальнейшем мы будем использовать термин Δ-продолжение и Δ-погружение.

Вторым автором в работах [7, 8] были рассмотрены позитивные обобщения йонсоновских теорий и обобщенно-йонсоновских теорий соответственно. Напомним основные определения.

Пусть L — язык первого порядка. At есть множество атомарных формул данного языка. $B^+(At)$ — замкнутое множество относительно позитивных булевых комбинаций (конъюнкция и дизъюнкция) всех атомарных формул, их подформул и замены переменных. $Q(B^+(At))$ есть множество формул в пренексном нормальном виде, полученное с помощью применения кванторов ($\forall$ и $\exists$) к $B^+(At)$. Назовем формулу позитивной, если она принадлежит множеству $Q(B^+(At)) = L^+$. Теория называется позитивно аксиоматизируемой, если ее аксиомы позитивны. $B(L^+)$ — это произвольная булева комбинация формул из L^+. В рамках определения Δ-гомоморфизма легко заметить, что изоморфное вложение и элементарное вложение являются Δ-погружениями, когда $\Delta = B(At)$ и $\Delta = L$ соответственно.

В связи с этим в [7] были определены $\Delta - PJ$ (Δ-позитивные йонсоновские теории). Напомним необходимые определения.

Определение [7]. Говорим, что теория T допускает $\Delta - JEP$, если для любых двух $A, B \in ModT$ существует $C \in ModT$ и Δ-гомоморфизмы $h_1: A \underset{\Delta}{\to} C, h_2: B \underset{\Delta}{\to} C$.

Определение [7]. Говорим, что теория T допускает $\Delta - AP$, если для любых $A, B, C \in ModT$ таких, что $h_1: A \underset{\Delta}{\to} C, g_1: A \underset{\Delta}{\to} B$, где h_1, g_1 — Δ-гомоморфизмы, существует $D \in ModT$ и $h_2: C \underset{\Delta}{\to} D, g_2: B \underset{\Delta}{\to} D$, где h_2, g_2 — Δ-гомоморфизмы такие, что $h_2 \circ h_1 = g_2 \circ g_1$.

Определение [7]. Теория *T* называется $\Delta - PJ$ теорией, если она удовлетворяет следующим условиям:

T имеет бесконечную модель;

T позитивно $\forall\exists$-аксиоматизируема;

T допускает $\Delta - JEP$;

T допускает $\Delta - AP$.

Естественным обобщением $\Delta - PJ$ теорий является понятие $\Delta - PM$ (Δ-позитивно-мустафинских) теорий, введенных в [8].

Пусть $0 \leq n \leq \omega$. Пусть Π_n^+ — множество всех формул языка L^+ вида $\forall\exists...\phi$ (т.е. формулы из L^+ с n переменами кванторов, начинающихся с $\forall$). Пусть $\Delta \subseteq \Pi_n^+ \subseteq L^+$. Определим новый класс теорий, который является обобщением теорий, рассмотренных в [3]. В частности, если $n = 0$, то мы получим частный случай $\Delta - PJ$-теорий, рассмотренных в [5]. И в [3], и в [5] рассматриваемые теории являются обобщением йонсоновских теорий, при этом в [5] надо требовать, чтобы они таковыми были, так как существуют $\Delta - PJ$-теории, которые нейонсоновские.

Определение. Теория *T* называется Δ-позитивно мустафинской ($\Delta - PM$)-теорией, если:

1) теория *T* имеет бесконечные модели;

2) теория *T* является Π^+_{n+2}-аксиоматизируемой;

3) теория *T* допускает $\Delta - JEP$;

4) теория *T* допускает $\Delta - AP$.

В связи с тем, что (напр., см. 2.8.12 из [9]) любая модель индуктивной теории вкладывается в некоторую экзистенциально замкнутую модель, нам важно будет работать в классе экзистенциально замкнутых моделей фиксированной теории. Напомним это определение. Модель A теории *T* называют экзистенциально замкнутой, если всякий раз, когда $A \subseteq B$, $B \models T$, из любой экзистенциальной формулы $\varphi(\overline{x})$ с константами из A при $B \models \exists\overline{x}\ \varphi(\overline{x})$, следует, что $A \models \exists\overline{x}\ \varphi(\overline{x})$. К сожалению, этот класс не всегда элементарный, но, тем не менее, Бен-Яаковым в [5] найдены синтаксические описания этого класса в позитивном смысле.

В работе [6] было определено обобщение понятия экзистенциально замкнутой модели.

Модель M теории *T* называется Δ-позитивно экзистенциально замкнутой, если для каждого Δ-гомоморфизма $h: M \underset{\Delta}{\to} N$, $N \in ModT$ и $\forall\overline{a} \in M$ и $\varphi(\overline{x},\overline{y}) \in \Delta$: $N \models \exists\overline{y}\varphi(f(\overline{a}),\overline{y}) \Rightarrow M \models \exists\overline{y}\varphi(\overline{a},\overline{y})$.

Класс всех Δ-позитивно экзистенциально замкнутых моделей теории *T* обозначим через E^+_T; под E_T мы понимаем класс экзистенциально замкнутых моделей теории *T*.

В данной работе рассматриваются некоторые виды счетных атомных моделей $\Delta - PM$-теорий. В частности, в классе $(n+1) - \Delta$-позитивно предмодельно-полных $\Delta - PM$-теорий рассматривается связь атомных моделей с $h - \Delta$-алгебраически простыми из $E^+_{n+1}(T)$.

Пусть L — язык первого порядка, как и выше $L^+ = Q(B^+(At))$. Пусть $0 \le n \le \omega$. Пусть $\Delta \subseteq \Sigma^+_{n+1} \subseteq L^+$. Пусть *T* — $\Delta - PM$-теория. Модель A теории *T* называется $h - \Delta$-алгебраически простой, если для любой модели B теории *T* существует $h - \Delta$-погружение модели A в B. Обозначим через $E^+_{n+1}(T)$ множество всех $(n+1)$-Δ-позитивно экзистенциально замкнутых моделей теории *T*. Класс всех $h - \Delta$-алгебраически простых моделей теории T обозначим $AP^{h-\Delta}_T$. Пусть $E^+_{n+1}AP^{h-\Delta}_T = E^+_{n+1}(T) \cap AP^{h-\Delta}_T$. Теорию T назовем $(n+1)$-позитивно предмодельно полной, если $E^+_{n+1}AP^{h-\Delta}_T \ne \varnothing$. Получены следующие результаты.

В связи с указанной выше тематикой в [3] были доказаны следующие теоремы.

Теорема 2.5 [3]. Пусть *T* — полная теория для экзистенциальных предложений. Тогда любые две счетные (Σ, Σ)-атомные модели *T* являются изоморфными.

Теорема 3.2 [3]. Пусть *T* — $\forall\exists$-теория полна для экзистенциальных предложений, пусть A — счетная модель *T*.

a) Тогда (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) и (ii) $\Rightarrow$ (ii)*, где:

(i) $A - (\Sigma, \Sigma)$-атомная,

(ii) $A - \Sigma^*$-nice,

(ii)* A — экзистенциально замкнутая и Σ-nice,

(iii) A – слабо (Σ, Π)-атомная;

b) Если *T* полна для $\forall\exists$-предложений, тогда условия (i), (ii), (ii)* и (iii) эквивалентны.

В классе обобщенных йонсоновских теорий, аналогично с указанной выше тематикой, в [4] были доказаны следующие теоремы.

Теорема 5.6 [4]. Пусть *T* обладает $\alpha - JEP$ и A, B — счетные $(\Sigma_{\alpha+1}, \Sigma_{\alpha+1})$- атомные модели *T*. Тогда модели A и B изоморфны.

Теорема 5.7 [4]. Пусть *T* обладает $\alpha - JEP$, $A \models T$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) A — счетная $(\Sigma_{\alpha+1}, \Sigma_{\alpha+1})$-атомная модель T;

2) теория T является $(\Sigma_{\alpha+1}, \Sigma_{\alpha+1})$-атомной, и A — α-простая модель $E_{\alpha+1}(T)$.

Рассмотрим следующие результаты. Эти результаты будут касаться последнего введенного класса теорий, а именно Δ-позитивно мустафинских теорий.

Следующий результат из [1] обобщает теоремы 2.5 из [3] и 5.6 из [4].

Теорема 1. Пусть T — $\Delta - PM$ -теория, и A, B — счетные $(\Sigma_{n+1}^{+}, \Sigma_{n+1}^{+})$ -атомные модели теории T. Тогда модели A и B изоморфны.

Следующий результат из [1] обобщает теоремы 3.2 из [2] и 5.7 из [3].

Теорема 2. Пусть T — $(n+1)$ -позитивно предмодельно-полная $\Delta - PM$ -теория, A — модель теории T. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) A — счетная $(\Sigma_{n+1}^{+}, \Sigma_{n+1}^{+})$ -атомная модель теории T ;

2) теория T является $(\Sigma_{n+1}^{+}, \Sigma_{n+1}^{+})$ -атомной, и A — $h - \Delta$ -алгебраически простая в $E_{n+1}^{+}(T)$.

Классическим вопросом теории моделей является описание счетных моделей полных теорий. Как было замечено, Воотом в [2] было доказано, что модель счетной полной теории атомна тогда и только тогда, когда она счетно-простая. В данной статье мы даем некоторые сведения о поведении специальных счетных и простых моделей $\Delta - PM$ -теорий в обогащенной сигнатуре. То есть мы рассматриваем обобщение результатов из [1] (теорема 1, теорема 2) в некотором обогащении.

Дадим необходимые определения, связанные с обогащением рассматриваемой сигнатуры. Пусть T есть произвольная Δ–PM-теория в языке первого порядка сигнатуры σ. Пусть C является семантической моделью теории T. $A \subseteq C$. Let $\sigma_{\Gamma}(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$, где $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$. Пусть $T_{\Gamma}^{PM}(A) = Th_{\Pi_{\alpha+2}^{+}}(C,a)_{a\in A} \cup \{P(c_a) | a \in A\} \cup \{P(c)\} \cup \{"P \subseteq"\}$, где $\{"P \subseteq"\}$ есть бесконечное множество предложений, выражающих тот факт, что интерпретация символа P есть экзистенциально замкнутая подмодель в языке сигнатуры σ. Мы будем рассматривать некоторое обобщение связи между счётными моделями различных видов в связи с позитивизацией теории в указанном выше обогащении.

Получены следующие результаты.

Теорема 3. Пусть T^{*} — центр Δ–PM-теории T в обогащенной сигнатуре $\sigma_{\Gamma}(A)$, A, B — счетные $(\Sigma_{n+1}^{+}, \Sigma_{n+1}^{+})$ -атомные модели теории T с одинаковой реализацией обогащения. Тогда модели A и B изоморфны.

Доказательство. В связи с тем, что счетные модели теории T, как и счетные модели центра T^{*}, в обогащенной сигнатуре являются счетными подмоделями семантической модели теории T и при этом обогащение этих моделей предикатом есть экзистенциально замкнутая подмодель, мы можем провести следующие рассуждения, не учитывая предикат.

Пусть A, B — $(\Sigma_{n+1}^{+}, \Sigma_{n+1}^{+})$ -атомные модели T. В силу определения $\Delta - PM$ -теории, рассматриваемая теория T полна для всех предложений следующего вида Σ_{n+1}^{+}. Тогда $A \equiv_{\exists_{n+1}^{+}} B$, что означает, что $A \models \varphi \Leftrightarrow B \models \varphi$, где $\varphi \in \exists_{n+1}^{+}$.

Предположим, что $(A, a_0, ..., a_{n-1}) \equiv_{\exists_{n+1}^{+}} (B, b_0, ..., b_{n-1})$, и пусть $a_n \in A$. Так как A — $(\Sigma_{n+1}^{+}, \Sigma_{n+1}^{+})$ -атомная, то существует формула $\psi \in \exists_{n+1}^{+}$, которая является полной для всех формул из $\exists_{n+1}^{+}$, и такая, что $A \models \psi(a_0, ..., a_n)$. Тогда $\exists x_n \psi \in \exists_{n+1}^{+}$ и реализуется кортежем $(a_0, ..., a_{n-1})$. Тогда наше индукционное предположение дает нам, что кортеж $(b_0, ..., b_{n-1})$ реализует предложение $\exists x_n \psi$ в модели B. Отсюда следует, что $(A, a_0, ..., a_n) \equiv_{\exists_{n+1}^{+}} (B, b_0, ..., b_n)$. Так как n произвольно и в качестве A мы можем рассмотреть B, то мы получаем искомый результат.

Теорема 4. Пусть T^{*} — центр $(n+1)$ -позитивно предмодельно-полной совершенной, α -йонсоновской $\Sigma_{\alpha+1}$ -полной Δ–PM-теории в обогащенной сигнатуре $\sigma_{\Gamma}(A)$; A — модель теории T. Тогда следующие условия эквивалентны: 1) A — счетная $(\Sigma_{n+1}^{+}, \Sigma_{n+1}^{+})$ -атомная модель теории T^{*}; 2) теория T^{*} является $(\Sigma_{n+1}^{+}, \Sigma_{n+1}^{+})$ -атомной, и A — $h - \Delta$ -алгебраически простая в $E_{n+1}^{+}(T^{*})$.

Доказательство. Рассмотрим все пополнения центра T^{*} теории T в новой сигнатуре σ_{Γ}, где $\Gamma = \{c\}$. Заметим, что если теория T Δ–PM-йонсоновская, то в обогащенном языке относительно условий теоремы центр T^{*} будет таким же, т.е. Δ–PM-теорией. Это достигается следующим образом: константы будут переходить в образы констант, реализация предиката — в образ реализации. Необходимые образы получаются за счет соответствующих отображений, которые нам обеспечивают условия $\Delta - JEP$ и $\Delta - AP$ из Δ–*PM*-йонсоновости изначальной теории *T*. Далее, в силу того, что по условию T совершенна как α -йонсоновская теория, то T^* является $\Delta - PM$ -теорией.

Тогда существует ее центр, и он является одним из пополнений теории T^c в обогащенном языке. Этот центр мы обозначим как T^c .

Для доказательства будем использовать следующие два факта.

Факт 1 [10]. Пусть T — позитивно предмодельно-полная, $\exists$-полная $\Delta - PJ$ -теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) модель $A \in E^+ AP_T^{h-\Delta}$;

2) модель A — счетная почти (Σ^+, Σ^+) -атомная, где Σ^+ — множество всех позитивных экзистенциальных формул.

Факт 2. В работе [6] показано, что с помощью позитивной морализации (специальное обогащение сигнатуры) произвольный позитивный фрагмент можно ограничить до минимального позитивного фрагмента Δ_0. В терминах нашей статьи $\Delta_0 = B^+\left(At\right)$.

Легко заметить, что, применяя *факт 2* к условию теоремы 2, мы окажемся в рамках $\Delta - PJ$ - теорий. Далее остается применить *факт 1.*

Далее надо заменить T^* на T^c и *T* на T^* соответственно и применить вышеуказанное к T^* и T^c , что даст нам доказательство теоремы 4.

Все неопределенные в данной статье определения понятий и их свойства можно извлечь из [11].

References

1. *Yeshkeyev A.R., Konakpayeva S.A.* The connection of some kinds of atomosity and algebraicaly primness in Δ–*PM*-theory // Vestn. KazNU. — Seria matematika, mehanika, informatika. — 2008. — № 3. — P. 69–74.
2. *Vaught R.L.* Denumerable models of complete theories // Infinitistic Methods. — London: Pergamon, 1961. — P. 303–321.
3. *John T. Baldwin, David W. Kueker.* Algebraically prime models. Annals of Mathematical Logic. — 1981. — Vol. 20. — P. 289–330.
4. *Mustafin T.G.* Generalized Jónsson Conditions and a Description of Generalized Jónsson Theories of Boolean Algebras. Mat. tr. — 1998. — Vol. 1. — № 2. — P. 135–197.
5. *Itay Ben-Yaacov.* Positive model theory and compact abstract theories // Journal of Mathematical Logic. — 2003.— № 3. — No. 1. — P. 85–118.
6. *Itay Ben-Yaacov.* Compactness and independence in non first order frameworks // Bulletin of Symbolic Logic. — 2005. — Vol. 11. — No. 1. — P. 28–50.
7. *Yeshkeyev A.R.*, Categorical pozitive theories. — Sintaksis I semantika logicheskih sistem // Materialy rossiiskoi shkoly-seminara, posvyashennoi 100 letiyu K. Gedel. 23–27.08.2006. — Irkutsk, Institut matematiki SO RAN, Izd. gos. Ped. Univ. — 2006. — P. 28–32.
8. *Yeshkeyev A.R.,* Countable categorisity of Δ–*PM*-theories // Tesisy. 12 Mezhdunarodnaya konferencia po matematike, mehanike i informatike. — Almaty, 2008. — № 3. — P. 64–69.
9. Handbook of mathematical logic / Ed. J. Barwise. Vol. 1. Model theory. (Rus. Trans.) — M.: Nauka, 1982.
10. *Yeshkeyev A.R.*, A note to *h*–Δ-algebraicaly prime models of Δ–PJ-theories // Tesisy. Vserossiisksya konferencia po matematike i mehanike. — Tomsk, 2008.
11. *Yeshkeyev A.R.* The jonsson’s theories. — Karaganda: KarSU Publ., 2009. — 250 p.