УДК 338.242:[338.26.015:51:004]

А.С.Шульгина-Таращук, Л.Н.Беляева

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

# ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО С ПРИМЕНЕНИЕМ TURBO PASCAL

*Мақалада Turbo Pascal программасын қолданып анықталған интегралды есептеу үшін Монте-Карло әдісі қарастырылады. Ол әдіс кездейсоқ шамаларды модельдеу әдісі ретінде танымал. Бұл әдісті теориялық-ықтималдық сипаттау есептерінде қолданады, себебі әдістерінің дамуына ықпалын тигізеді.*

*Method Monte-Carlo is considered in article at calculation of the certain integral with use the program Turbo Pascal. The method Monte-Carlo possible to define as method of modeling of the random quantities for the reason calculations of the features of their distribution. This method has rendered and continues to render the essential influence upon development of the methods computing mathematicians and at decision of the many tasks successfully matches with other computing methods and complements them. Its using justified in the first place in that task, which allow the theorist-probabilistic description.*

Метод Монте-Карло — это статистический метод, который применяют при вычислении сложных интегралов, решении систем алгебраических уравнений высокого порядка, моделировании поведения элементарных частиц, в теориях передачи информации, при исследовании сложных экономических систем [1]. Сущность метода состоит в том, что в задачу вводят случайную величину $X$, изменяющуюся по какому-то правилу $p(X)$. Случайную величину выбирают так, чтобы искомая в задаче величина $a$ стала математическим ожиданием от $X$, т.е. $M(X)=a$.

Таким образом, искомая величина $a$ определяется лишь теоретически. Чтобы найти ее численно, нужно воспользоваться статистическими методами. Для этого необходимо взять выборку случайных чисел $X$ объемом $n$, затем необходимо вычислить выборочное среднее $\overline{x}$ случайной величины $x_i$ по формуле

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}.$$

Вычисленное выборочное среднее принимают за приближенное значение $a$: $a=a^*=\overline{x}$.

Для получения результата приемлемой точности необходимо большое количество статистических испытаний [2].

Теория метода Монте-Карло изучает способы выбора случайных величин $X$ для решения различных задач, а также способы уменьшения дисперсии случайных величин, в результате чего уменьшается ошибка, допускаемая при замене искомого математического ожидания его оценкой $a^*$.

Пусть для получения оценки $a^*$ математического ожидания $a$ случайной величины $X$ было произведено $n$ независимых испытаний (разыграно $n$ возможных значений $X$), и по ним была найдена выборочная средняя $\overline{x}$, которая принята в качестве искомой оценки: $a^*=\overline{x}$. Ясно, что если повторить опыт, то будут получены другие возможные значения $X$, следовательно, другая средняя, а значит, и другая оценка $a^*$. Уже отсюда следует, что получить точную оценку математического ожидания невозможно. Естественно, возникает вопрос о величине допускаемой ошибки. Ограничимся отысканием лишь верхней границы $\delta$ допускаемой ошибки с заданной вероятностью (надёжностью) $\gamma$:

$$P(\left|\overline{X}-a\right|\le\delta)=\gamma.$$

Интересующая нас верхняя грань ошибки $\delta$ есть не что иное, как «точность оценки» математического ожидания по выборочной средней при помощи доверительных интервалов. Рассмотрим следующие три случая.

1) Случайная величина $X$ распределена нормально, и её среднее квадратичное отклонение $\delta$ известно.

В этом случае с надёжностью $\gamma$ верхняя граница ошибки

$$\delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \tag{1}$$

где $n$ — число испытаний (разыгранных значений $X$); $t$ — значение аргумента функции Лапласа, при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$; $\sigma$ — известное среднее квадратичное отклонение $X$.

2) Случайная величина $X$ распределена нормально, причём её среднее квадратическое отклонение $\sigma$ неизвестно.

В этом случае с надёжностью $\gamma$ верхняя граница ошибки

$$\delta = \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}}, \tag{2}$$

где $n$ — число испытаний; $s$ — «исправленное» среднее квадратическое отклонение; $t_\gamma$ находят по таблице приложения.

3) Случайная величина $X$ распределена по закону, отличному от нормального.

В этом случае при достаточно большом числе испытаний $(n > 30)$ с надёжностью, приближённо равной $\gamma$, верхняя граница ошибки может быть вычислена по формуле (1), если среднее квадратическое отклонение $\sigma$ случайной величины $X$ известно; если же $\sigma$ неизвестно, то можно подставить в формулу (1) его оценку $s$ — «исправленное» среднее квадратическое отклонение либо воспользоваться формулой (2). Заметим, что чем больше $n$, тем меньше различие между результатами, которые дают обе формулы. Это объясняется тем, что при $n \to \infty$ распределение Стьюдента стремится к нормальному [3].

Из изложенного следует, что метод Монте-Карло тесно связан с задачами теории вероятностей, математической статистики и вычислительной математики. В связи с задачей моделирования случайных величин (в особенности равномерно распределённых) существенную роль играют также методы теории чисел.

Среди других вычислительных методов метод Монте-Карло выделяется своей простотой и общностью. Медленная сходимость является существенным недостатком метода, но могут быть указаны его модификации, которые обеспечивают высокий порядок сходимости при определённых предположениях. Однако вычислительная процедура при этом усложняется и приближается по своей сложности к другим процедурам вычислительной математики. Сходимость метода Монте-Карло является сходимостью по вероятности. Это обстоятельство вряд ли следует относить к числу его недостатков, так как вероятностные методы в достаточной мере оправдывают себя в практических приложениях. Что же касается задач, имеющих вероятностное описание, то сходимость по вероятности является даже в какой-то мере естественной при их исследовании.

В качестве оценки определённого интеграла $I = \int_a^b \phi(x)dx$ принимают

$$I_1^* = (b-a)\frac{\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)}{n},$$

где $n$ — число испытаний; $x_i$ — возможные значения случайной величины $X$, распределённой равномерно в интервале интегрирования $(a,b)$, их разыгрывают по формуле $x_i = a + (b-a)r_i$, где $r_i$ — случайное число.

Дисперсия усредняемой функции $\phi(X)$ равна

$$\sigma^2 = \int_a^b \phi^2(x) f(x)dx - \{M[\phi(X)]\}^2,$$

где $M[\phi(X)] = \int_a^b \phi(x) f(x)dx$, $f(x) = \frac{1}{b-a}$.

Если точное значение дисперсии вычислить трудно или невозможно, то находят выборочную дисперсию (при $n > 30$) $D_B = \sum \frac{u_i^2}{n} - [\sum \frac{u_i}{n}]^2$ или исправленную дисперсию (при $n < 30$) $s^2 = \frac{1}{n-1}[\sum u_i^2 - \frac{[\sum u_i]^2}{n}]$, где $u_i = \phi(x_i)$.

Эти формулы для вычисления дисперсии применяют и при других способах интегрирования, когда усредняемая функция не совпадает с подынтегральной функцией.

В качестве оценки интеграла $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где область интегрирования $D$ принадлежит единичному квадрату $(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$, принимают

$$I_1^* = S \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} f(x_i, y_i)}{N}, \tag{3}$$

где $S$ — площадь области интегрирования; $N$ — число случайных точек $(x_i, y_i)$, принадлежащих области интегрирования $D$.

Если вычислить площадь $S$ трудно, то в качестве её оценки можно принять $S^* = \frac{N}{n}$; в этом случае формула (3) имеет вид

$$I_1^* = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} f(x_i, y_i)}{n},$$

где $n$ — число испытаний.

В качестве оценки интеграла $I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, где область интегрирования $V$ принадлежит единичному кубу $(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1)$, принимают $I_1^* = V \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} f(x_i, y_i, z_i)}{N}$, где $V$ — объём области интегрирования; $N$ — число случайных точек $(x_i, y_i, z_i)$, принадлежащих области интегрирования $V$.

Если вычислить объём трудно, то в качестве его оценки можно принять $V^* = \frac{N}{n}$, в этом случае формула (3) имеет вид $I_1^* = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} f(x_i, y_i, z_i)}{n}$, где $n$ — число испытаний.

Рассмотрим задачу на вычисление определенного интеграла $I = \int\limits_a^b f(x)dx$ по методу Монте-Карло по формуле

$$I = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{g(x_i)},$$

где $n$ — число испытаний; $g(x)$ — плотность распределения «вспомогательной» случайной величины $X$, причем $\int\limits_a^b g(x)dx = 1$, в программе $g(x) = \frac{1}{b-a}$.

Воспользуемся программой, написанной на языке TURBO PASCAL 7.0 (см. рис.).

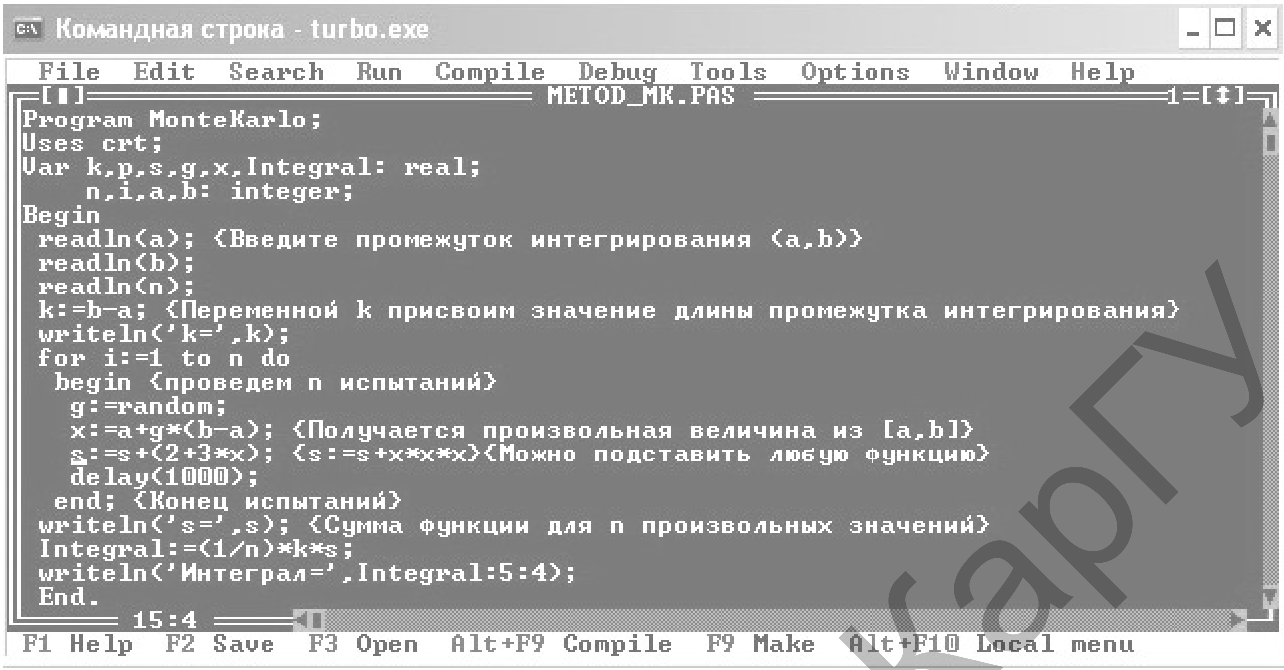


Рис. Окно Turbo Pascal

В ходе выполнения программы требуется ввести промежуток интегрирования и количество испытаний. Интегрируемая функция уже задана в программе (ее можно менять).

Для примера взяты два интеграла: $\int_1^3 (2+3x)dx = 16$, $\int_0^2 x^3 dx = 4$, значения которых можно сравнить со значениями, полученными в результате запуска программы (см. табл.).

Таблица

**Значения интегралов при различном числе испытаний**

| Функция | $k$ | $N = 10$ | $N = 100$ | $N = 500$ | $N = 1000$ | $N = 10000$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 2 + 3x$ | 2 | 13,9816 | 15,8547 | 15,8975 | 15,9282 | 15,9777 |
| $f(x) = x^3$ | 2 | 1,8166 | 3,91 | 3,9018 | 3,8905 | 3,9649 |

Таким образом, при большем количестве испытаний результат получается точнее [1].

Методы Монте-Карло — увлекательнейший раздел современной математики и статистических численных экспериментов. Они позволяют оценивать величины, о которых нам известна лишь форма распределения их вероятности. Одним из очевидных примеров таких величин может служить ценовая динамика активов на финансовых рынках, типа акций, валют, фьючерсов и опционов. Моделирование методами Монте-Карло давно и прочно вошло в научный инструментарий естественных дисциплин — математики, физики, химии, биологии, инженерии и многокритериального проектирования. Однако приложение данных инструментов к миру финансов несет в себе определенные нюансы и отличительные методики. Любой финансист знает, что означает слово «хеджирование». Знает, что для хеджирования часто используются производные инструменты — опционы, фьючерсы и т.п. Но как рассчитать стоимость этих инструментов, сберечь страховки от ценовых потрясений, когда мы не знаем, да и никто не знает, как будет меняться стоимость базового актива, или величина процентной ставки, или соотношение валютной пары? Только метод Монте-Карло может дать нам математическое ожидание и вариацию требуемых параметров [2].

Метод Монте-Карло имеет некоторые очевидные преимущества:

а) он не требует никаких предложений о регулярности, за исключением квадратичной интегрируемости. Это может быть полезным, так как часто очень сложная функция, чьи свойства регулярности трудно установить;

б) он приводит к выполнимой процедуре даже в многомерном случае, когда численное интегрирование неприменимо, например, при числе измерений, больших 10;

в) его легко применять при малых ограничениях или без предварительного анализа задачи.

## Список литературы


1. *Ермаков С.М.* Методы Монте-Карло и смежные вопросы. — М.: Наука, 1971. — 203 с.
2. *Бережная Е.В., Бережной В.И.* Математические методы моделирования экономических систем. — М.: Финансы и статистика, 2001. — 368 с.
3. *Мюллер П., Нойман П., Шторм Р.* Таблицы по математической статистике. — М.: Финансы и статистика, 1982. — 278 с.