M. I. Ramazanov, N. K. Gulmanov, On the singular Volterra integral equation of the boundary value problem for heat conduction in a degenerating domain, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2021, Volume 31, Issue 2, 241–252

DOI: https://doi.org/10.35634/vm210206

МАТЕМАТИКА 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 241–252.

УДК 517.968

© *М. И. Рамазанов, Н. К. Гульманов*

О СИНГУЛЯРНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ВОЛЬТЕРРА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ОБЛАСТИ

В работе рассматривается сингулярное интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода, к которому методом тепловых потенциалов редуцируются некоторые граничные задачи теплопроводности в областях с границей, изменяющейся со временем. Особенность такого рода задач заключается в том, что область вырождается в точку в начальный момент времени. Соответственно, отличительной особенностью исследуемого интегрального уравнения является то, что интеграл от ядра, при стремлении верхнего предела интегрирования к нижнему не равен нулю. Данное обстоятельство не позволяет решить данное уравнение методом последовательных приближений. Построено общее решение соответствующего характеристического уравнения и методом равносильной регуляризации Карлемана–Векуа найдено решение полного интегрального уравнения. Показано, что соответствующее однородное интегральное уравнение имеет ненулевое решение.

Ключевые слова: интегральное уравнение, сингулярное интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода, метод регуляризации Карлемана–Векуа

DOI: 10.35634/vm210206

Краевые задачи теплопроводности в областях с границами, движущимися с изменением времени (нецилиндрические области) приобретают все большее значение, как в теоретических, так и в прикладных разделах математики. Количество работ, посвященных решению подобных задач, заметно увеличивается. При этом нужно отметить, что в большинстве работ область, в которой ищется решение задачи, в начальный момент времени не вырождается в точку. В работах [1–5] при решении такого рода задач применяется методика, заключающаяся в сведении нецилиндрической области к цилиндрической. Имеется целый ряд работ, посвященных численным методам решения таких задач [6–8].

Особый интерес вызывают краевые задачи для уравнения теплопроводности в областях, вырождающихся в точку в начальный момент времени. В данном случае для решения соответствующих краевых задач указанные выше методы не применимы, так как не удается согласовать решение уравнения теплопроводности с движением границы области теплопереноса. Например, при исследовании математической модели процессов, происходящих при размыкании электрических контактов, в частности, при описании теплопередачи в жидкометаллическом мосту и в электрической дуге возникает следующая задача [9–13].

Найти в области $Q = \{(r,t)\colon 0 < r < t,\ t > 0\}$ решение уравнения

$$\frac{\partial u(r,t)}{\partial t} = \frac{a^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}\right) + f(r,t), \tag{0.1}$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to t} u(r,t) = q_1(t), \quad t > 0,\\ &\lim_{r\to 0} \frac{u(r,t)}{\ln\frac{1}{r}} = q_2(t), \quad t > 0. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Метод тепловых потенциалов позволяет редуцировать подобные краевые задачи теплопроводности к сингулярным интегральным уравнениям типа Вольтерра [14]. Под сингулярным интегральным уравнением типа Вольтерра подразумевается уравнение, ядро которого обладает следующим свойством: интеграл от ядра уравнения при стремлении верхнего предела к нижнему не стремится к нулю. При этом нужно отметить, что соответствующие интегральные уравнения нельзя решить методом последовательных приближений и в большинстве случаев соответствующие однородные интегральные уравнения имеют ненулевые решения.

В данной работе исследуется сингулярное интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода, к которому редуцируется краевая задача (0.1)–(0.2).

§ 1. Постановка задачи

Исследуются вопросы разрешимости следующего особого интегрального уравнения типа Вольтерра второго рода:

$$\varphi(t) - \int_0^t N(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), \tag{1.1}$$

где

$$N(t,\tau) = \sum_{i=1}^{3} N_i(t,\tau),$$

$$N_1(t,\tau) = \frac{1}{t-\tau}\cdot\exp\left(-\frac{t^2+\tau^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\cdot I_0\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right), \tag{1.2}$$

$$N_2(t,\tau) = -\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)^2}\cdot\exp\left(-\frac{t^2+\tau^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\cdot I_{01}\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right), \tag{1.3}$$

$$N_3(t,\tau) = \frac{\tau}{2a^2(t-\tau)}\cdot\exp\left(-\frac{t^2+\tau^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\cdot I_0\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right), \tag{1.4}$$

здесь $I_{01}(z) = I_0(z) - I_1(z)$, $I_n(z)$, $n = 0, 1,$ — модифицированные функции Бесселя мнимого аргумента.

Для ядра интегрального уравнения (1.1) справедливо равенство:

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t N(t,\tau)\,d\tau = \infty.$$

При этом для (1.2)–(1.4):

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t N_1(t,\tau)\,d\tau = \infty,\quad \lim_{t\to 0}\int_0^t N_2(t,\tau)\,d\tau = 1,\quad \lim_{t\to 0}\int_0^t N_3(t,\tau)\,d\tau = 0. \tag{1.5}$$

§ 2. Решение характеристического интегрального уравнения

Интегральное уравнение

$$\varphi(t) - \int_0^t \{N_1(t,\tau) + N_2(t,\tau)\}\,\varphi(\tau)\,d\tau = g(t), \tag{2.1}$$

ввиду свойств (1.5) является характеристическим для уравнения (1.1).

Если ввести следующие обозначения:

$$t = \frac{1}{y}, \quad \tau = \frac{1}{x}; \tag{2.2}$$
$$\frac{1}{y}\exp\left(\frac{1}{4a^2 y}\right)\varphi\left(\frac{1}{y}\right) = \varphi_1(y), \quad \frac{1}{y}\exp\left(\frac{1}{4a^2 y}\right) g\left(\frac{1}{y}\right) = g_1(y),$$

то уравнение (2.1) сведется к следующему интегральному уравнению относительно неизвестной функции $\varphi_1(y)$:

$$\varphi_1(y) - \int_y^\infty M_-(y-x)\,\varphi_1(x)\,dx = g_1(y), \tag{2.3}$$

где

$$\begin{aligned} M_-(y-x) = \frac{1}{x-y}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2a^2(x-y)}\right)\cdot I_0\left(\frac{1}{2a^2(x-y)}\right) - \\ - \frac{1}{2a^2(x-y)^2}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2a^2(x-y)}\right)\cdot I_{01}\left(\frac{1}{2a^2(x-y)}\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Замечание 1. Если будет найдено решение уравнения (2.3), то решение уравнения (1.1) получим методом регуляризации Карлемана–Векуа.

§ 3. Решение однородного уравнения

Уравнение (2.3) принципиальным образом отличается от уравнений Вольтерра второго рода, для которых решение существует и единственно. Решение соответствующего однородного уравнения

$$\varphi_1(y) - \int_y^\infty M_-(y-x)\,\varphi_1(x)\,dx = 0, \tag{3.1}$$

в общем случае, может быть и нетривиальным. Собственные функции интегрального уравнения (3.1) определяются корнями следующего трансцендентного уравнения [15, с. 569] относительно параметра p:

$$M_-(-p) = \int_0^\infty M_-(z)\cdot e^{pz}\,dz = 1, \quad \operatorname{Re} p < 0. \tag{3.2}$$

В нашем случае уравнение (3.2) примет вид [16, (29.169), с. 350]:

$$\begin{aligned} 2K_0\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) I_0\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) - \\ - \frac{\sqrt{-p}}{a}\left[I_1\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) K_0\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) - I_0\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) K_1\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right)\right] = 1, \quad \operatorname{Re} p < 0, \end{aligned}$$

где $K_n\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right)$, $n = 0, 1,$ — функции Макдональда.

Используя свойство бесселевых функций мнимого аргумента

$$z\left[I_1(z)\cdot K_0(z) + I_0(z)\cdot K_1(z)\right] = 1,$$

запишем это уравнение в следующем виде [17, (8.477.2), с. 927]:

$$I_0\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right)\cdot\left[\frac{\sqrt{-p}}{a}K_1\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right)-2K_0\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right)\right]=0,\quad \operatorname{Re}p<0.$$

Предположим, что $I_0\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right)=0$. Согласно определению функции Бесселя мнимого аргумента $I_0\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right)=J_0\left(\frac{i\sqrt{-p}}{a}\right)$, где $J_0\left(\frac{i\sqrt{-p}}{a}\right)$ — функции Бесселя. Известно, что $J_0\left(\frac{i\sqrt{-p}}{a}\right)$ имеет бесчисленное множество корней и все ее корни действительны, т. е. $\frac{i\sqrt{-p_k}}{a}=\alpha_k$, где $\alpha_k\in\mathbb{R}$. Отсюда $p_k=a^2\alpha_k^2$, что противоречит условию $\operatorname{Re}p<0$.

Значит, необходимо найти корни уравнения

$$\frac{\sqrt{-p}}{a}K_1\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right)-2K_0\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right)=0,\quad \operatorname{Re}p<0. \tag{3.3}$$

Данное уравнение имеет единственный действительный корень $p_0<0$, причем $p_0\approx$ $\approx -0,595^2a^2$, это означает, что уравнение (3.1) имеет ненулевое решение $\varphi_1(y)=C\cdot e^{p_0y}$. Тогда, возвращаясь к старым переменным (2.2), получим, что однородное интегральное уравнение, соответствующее уравнению (2.1), имеет собственную функцию:

$$\varphi^{(0)}(t)=C\cdot\frac{1}{t}\cdot e^{\frac{p_0}{t}-\frac{t}{4a^2}},\quad p_0<0,\quad C=\text{const}.$$

§ 4. Решение неоднородного характеристического уравнения. Построение резольвенты

Уравнение (2.3) — уравнение с разностным ядром, но его нельзя решить непосредственным применением преобразования Лапласа, так как здесь теорема о свертке неприменима. Применим метод модельных решений [15, с. 561]. В соответствии с этим методом рассмотрим вспомогательное уравнение с экспоненциальной правой частью:

$$\varphi_1(y)-\int_y^{\infty}M_-(y-x)\,\varphi_1(x)\,dx=e^{py},$$

где $M_-(y-x)$ определяется равенством (2.4). Его решение определяется формулой:

$$\widehat{\varphi}_1(p)=\frac{1}{1-\widehat{M}_-(-p)}\cdot e^{py},\quad \text{где}\ \widehat{M}_-(-p)=\int_0^{\infty}K(-z)\,e^{pz}\,dz,\quad \operatorname{Re}p<0.$$

Тогда решение уравнения (2.3) будет иметь вид:

$$\varphi_1(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\widehat{g}_1(p)}{1-\widehat{M}_-(-p)}\cdot e^{py}\,dp=g_1(y)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\widehat{R}_-(-p)\,\widehat{g}_1(p)\cdot e^{py}\,dp,$$

где

$$\widehat{g}_1(p)=\int_0^{\infty}g_1(y)\cdot e^{-py}\,dy,\quad \widehat{R}_-(-p)=\frac{\widehat{M}_-(-p)}{1-\widehat{M}_-(-p)},\quad \operatorname{Re}p<0,$$

$$\widehat{M}_-(-p)=1-2\left[\frac{\sqrt{-p}}{a}I_0\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right)K_1\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right)-K_0\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right)I_0\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right)\right],\quad \operatorname{Re}p<0.$$

Если $\widehat{R}_{-}(-p) \risingdotseq R_{-}(y)$, тогда решение уравнения (2.3) имеет вид:

$$\varphi_1(y) = g_1(y) + \int_y^{\infty} R_{-}(y-x)\, g_1(x)\, dx. \tag{4.1}$$

Для нахождения резольвенты $R_{-}(y)$ уравнения (4.1), запишем ее изображение в следующем виде:

$$\widehat{R}_{-}\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) = \frac{1-2\left[\frac{\sqrt{-p}}{a} I_0\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) K_1\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) - K_0\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) I_0\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right)\right]}{2\left[\frac{\sqrt{-p}}{a} I_0\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) K_1\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) - K_0\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) I_0\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right)\right]}, \quad \operatorname{Re} p < 0$$

и воспользуемся свойствами [16, с. 191]:

(1) Если $\varphi(t) \risingdotseq \varphi(p)$, тогда $\varphi(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha}\varphi\left(\frac{p}{\alpha}\right), \ \ \alpha > 0$.

(2) Если $\varphi(p) \risingdotseq \varphi(t)$, тогда $\varphi\left(\sqrt{p}\right) \risingdotseq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} \tau \cdot e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \varphi(\tau)\, d\tau$.

Для удобства введем обозначение $\frac{\sqrt{-p}}{a} = z$ и найдем оригинал выражения

$$\widehat{R}^*(z) = \frac{1-2I_0(z)\left[zK_1(z) - K_0(z)\right]}{2I_0(z)\left[zK_1(z) - K_0(z)\right]}.$$

Согласно [18, с. 519]:

$$R^*(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \risingdotseq \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(z_k)}{B'(z_k)} \cdot e^{-z_k y},$$

где z_k — нули функции $B(z) = 2I_0(z)\left[zK_1(z) - K_0(z)\right]$.

1) Пусть $zK_1(z) - K_0(z) = 0$. Данное уравнение, как отмечено ранее, имеет один корень z_0, причем $z_0 \approx 0,595$.

2) Пусть $I_0(z) = J_0(iz)$. Следовательно, $iz_k = \alpha_k$ или $z_k = -i\alpha_k$, где $\alpha_k \in \mathbb{R}$.

Тогда:

$$R^*(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \risingdotseq \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(z_k)}{B'(z_k)} \cdot e^{-z_k y} = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{A(z_k)}{B'(z_k)} \cdot e^{-z_k y} + \frac{A(z_0)}{B'(z_0)} \cdot e^{-z_0 y} = R_{-}^*(y),$$

где

$$B'(z_0) = 2\left(1-z_0^2\right) I_0(z_0) K_1(z_0), \quad B'(z_k) = 2I_1(z_k)\left[z_k \cdot K_1(z_k) - K_0(z_k)\right], \quad k \neq 0.$$

Таким образом получили, что:

$$R_{-}^*(y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{e^{-z_k y}}{2I_1(z_k)\left[z_k \cdot K_1(z_k) - K_0(z_k)\right]} + \frac{e^{-z_0 y}}{2\left(1-z_0^2\right) I_0(z_0) K_1(z_0)}. \tag{4.2}$$

Из равенства (4.2) и свойств изображения (1) и (2) имеем:

$$\widehat{R}_{-}\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) \risingdotseq R_{-}(y) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{2\sqrt{\pi} y^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{a^2}{2I_1(z_k)\left[z_k \cdot K_1(z_k) - K_0(z_k)\right]} \int_0^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{4y} - z_k a^2 y}\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi} y^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{a^2}{2\left(1-z_0^2\right) I_0(z_0) K_1(z_0)} \int_0^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{4y} - z_0 a^2 y}\, dx.$$

Для резольвенты $R_{-}(x-y)$ справедлива оценка:

$$R_{-}(x-y) \leqslant \frac{A}{\sqrt{x-y}}.$$

§ 5. Решение характеристического уравнения

Представим характеристическое уравнение (2.1) в следующем виде:

$$\begin{gathered}\varphi_2(t)-\int_0^t\left\{\frac{1}{t-\tau}\cdot\exp\left(-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\cdot I_0\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)-\right.\\ \left.-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)^2}\cdot\exp\left(-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\cdot I_{01}\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\right\}\cdot\varphi_2(\tau)\,d\tau=g_2(t),\end{gathered}\tag{5.1}$$

где использованы следующие обозначения:

$$\varphi_2(t)=\exp\left(\frac{t}{4a^2}\right)\varphi(t),\quad g_2(t)=\exp\left(\frac{t}{4a^2}\right)g(t).$$

Тогда решение уравнения (5.1) запишется в виде:

$$\varphi_2(t)=g_2(t)+\int_0^t R(t,\tau)\,g_2(\tau)\,d\tau+C\cdot\varphi_2^{(0)}(t),\tag{5.2}$$

где $C=\text{const}$, $\varphi_2^{(0)}(t)=\frac{1}{t}\cdot e^{\frac{p_0}{t}}$, p_0 — корень уравнения (3.3), $p_0\approx-0,595^2a^2$. Для резольвенты $R(t,\tau)$ справедлива оценка

$$R(t,\tau)\leqslant\frac{D}{\sqrt{t\tau(t-\tau)}}.$$

§ 6. Решение исходного интегрального уравнения. Регуляризация Карлемана–Векуа

Исходное интегральное уравнение (1.1) перепишем в виде:

$$\begin{gathered}\varphi_2(t)-\int_0^t\left\{\frac{1}{t-\tau}\cdot\exp\left(-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\cdot I_0\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)-\right.\\ \left.-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)^2}\cdot\exp\left(-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\cdot I_{01}\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\right\}\cdot\varphi_2(\tau)\,d\tau=\\ =\int_0^t\frac{\tau}{2a^2(t-\tau)}\cdot\exp\left(-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\cdot I_0\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\varphi_2(\tau)\,d\tau+f_2(t),\end{gathered}\tag{6.1}$$

где

$$\varphi_2(t)=\exp\left(\frac{t}{4a^2}\right)\varphi(t),\quad f_2(t)=\exp\left(\frac{t}{4a^2}\right)f(t).$$

Применим метод регуляризации решением характеристического уравнения — метод регуляризации Карлемана–Векуа. Считая правую часть уравнения (6.1) временно известной, запишем его решение согласно формуле (5.2):

$$\begin{gathered}\varphi_2(t)-\int_0^t\frac{\tau}{2a^2(t-\tau)}\cdot\exp\left(-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\cdot I_0\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\varphi_2(\tau)\,d\tau-\\ -\int_0^t R(t-\tau)\left\{\int_0^\tau\frac{\xi}{2a^2(\tau-\xi)}\cdot\exp\left(-\frac{\tau\xi}{2a^2(\tau-\xi)}\right)\cdot I_0\left(\frac{\tau\xi}{2a^2(\tau-\xi)}\right)\varphi_2(\xi)\,d\xi\right\}d\tau=\\ =f_2(t)+\int_0^t R(t-\tau)\,f_2(\tau)\,d\tau+C\cdot\int_0^t R(t-\tau)\,\varphi_2^{(0)}(\tau)\,d\tau+C\cdot\varphi_2^{(0)}(t).\end{gathered}$$

Данное уравнение можно записать следующим образом:

$$\varphi_2(t) - \int_0^t N(t,\tau)\,\varphi_2(\tau)\,d\tau = F(t), \tag{6.2}$$

где

$$N(t,\tau) = \frac{\tau}{2a^2(t-\tau)} \cdot \exp\left(-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) \cdot I_0\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) + \tag{6.3}$$

$$+ \frac{\tau}{2a^2}\int_\tau^t \frac{\sqrt{t\xi}}{\sqrt{t-\xi}} \cdot \frac{1}{\xi^2} \cdot \frac{1}{\xi-\tau} \cdot \exp\left(-\frac{\xi\tau}{2a^2(\xi-\tau)}\right) \cdot I_0\left(\frac{\xi\tau}{2a^2(\xi-\tau)}\right) d\xi,$$

$$F(t) = f_2(t) + \int_0^t R(t-\tau)\,f_2(\tau)\,d\tau + C\cdot\int_0^t R(t-\tau)\,\varphi_2^{(0)}(\tau)\,d\tau + C\cdot\varphi_2^{(0)}(t).$$

Теорема 1. *Если $t^{-\frac{1}{2}}f_2(t) \in M(0;\infty) = L_\infty(0;\infty)\cap C(0;\infty)$, то интегральное уравнение (6.1) имеет единственное решение $\varphi_2(t) \in M(0;\infty) = L_\infty(0;\infty)\cap C(0;\infty)$, которое может быть найдено методом последовательных приближений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим каждое слагаемое ядра $N(t,\tau)$

$$\text{I.}\quad \left|\int_0^t \frac{\tau}{2a^2(t-\tau)} \cdot \exp\left(-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) \cdot I_0\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\varphi_2(\tau)\,d\tau\right| \leqslant$$

$$\left\| e^{-z}\cdot I_0(z) \leqslant \frac{D_1}{\sqrt{z}} \right\|$$

$$\leqslant \frac{D_1}{2a^2}\int_0^t \frac{\tau}{t-\tau}\cdot\frac{\sqrt{t-\tau}}{\sqrt{t}\cdot\sqrt{\tau}}d\tau = \frac{D_1}{2a^2}\cdot\int_0^t \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}d\tau \leqslant \frac{D_1}{2a^2}\cdot\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \frac{D_1}{2a^2}\cdot\sqrt{t}.$$

Оценим второе слагаемое ядра $N(t,\tau)$.

$$\text{II.}\quad \frac{\tau}{2a^2}\int_\tau^t \frac{\sqrt{t\xi}}{\sqrt{t-\xi}}\cdot\frac{1}{\xi^2}\cdot\frac{1}{\xi-\tau}\cdot\exp\left(-\frac{\xi\tau}{2a^2(\xi-\tau)}\right)\cdot I_0\left(\frac{\xi\tau}{2a^2(\xi-\tau)}\right)d\xi =$$

$$= \left\|\frac{\tau}{2a^2}\cdot\frac{\xi}{\xi-\tau} = z\right\| =$$

$$= \frac{\tau}{2a^2}\int_{\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}}^{\infty} \frac{\sqrt{2a^2zt\tau}}{\sqrt{2a^2tz - t\tau - 2a^2z\tau}}\cdot\frac{2a^2z-\tau}{2a^2z^2\tau^2}\cdot e^{-z}\cdot I_0(z)\,dz =$$

$$= \frac{\tau}{2a^2}\cdot\frac{\sqrt{2a^2t\tau}}{2a^2\tau^2\sqrt{2a^2(t-\tau)}}\int_{\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}}^{\infty}\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}}}\cdot\frac{2a^2z-\tau}{z^2}\cdot e^{-z}I_0(z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{4a^4}\cdot\int_{\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}}^{\infty}\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}}}\cdot\frac{1}{z^{2-\alpha}}\cdot\left[\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\tau(t-\tau)}}\cdot\frac{2a^2z-\tau}{z^\alpha}\right]\cdot e^{-z}I_0(z)\,dz.$$

Рассмотрим функцию $y_\alpha(z) = \frac{2a^2z-\tau}{z^\alpha}$ при $1<\alpha<\frac{3}{2}$, $z\in\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)};+\infty\right)$ и $0<\tau<t$. Данная функция монотонно убывает и максимума достигает в точке $z_{\max} = \frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}$.

$$y_\alpha(z_{\max}) = \left(\frac{2a^2}{\alpha}\right)^\alpha\cdot\left(\frac{\alpha-1}{\tau}\right)^{\alpha-1}.$$

Значит,

$$\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\tau\,(t-\tau)}}\cdot\frac{2a^2z-\tau}{z^{\alpha}}\leqslant\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\tau\,(t-\tau)}}\cdot\left(\frac{2a^2}{\alpha}\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{\alpha-1}{\tau}\right)^{\alpha-1}=D_2\,(\alpha)\cdot\frac{\sqrt{t}}{\tau^{\alpha-\frac{1}{2}}\cdot(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}.$$

Таким образом получим:

$$\int_{\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}}^{\infty}\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}}}\cdot\frac{1}{z^{2-\alpha}}\cdot\left[\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\tau\,(t-\tau)}}\cdot\frac{2a^2z-\tau}{z^{\alpha}}\right]\cdot e^{-z}I_0\,(z)\,dz\leqslant$$

$$\leqslant D_2\,(\alpha)\int_{\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}}^{\infty}\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}}}\cdot\frac{1}{z^{2-\alpha}}\cdot\frac{D_3}{(1+z)^{\frac{1}{2}}}dz=\left\|z-\frac{t\tau}{2a^2\,(t-\tau)}=y\right\|=$$

$$=D_4\int_0^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}+y\right)^{\frac{3}{2}-\alpha}}\cdot\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{\left[\left(1+\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)+y\right]^{\frac{1}{2}}}dy\leqslant$$

$$\leqslant D_4\int_0^{\infty}\frac{y^{\alpha-2}}{(1+y)^{\frac{1}{2}}}dy=B\left(\alpha-1,\frac{3}{2}-\alpha\right),$$

где $B\,(\cdot,\cdot)$ — бета-функция. Из полученных оценок следует справедливость теоремы. □

Тем самым доказано, что для интегрального уравнения (1.1) также справедлива

Теорема 2. *Если* $t^{-\frac{1}{2}}\cdot\exp\left(\frac{t}{4a^2}\right)f\,(t)\in M\,(0;\infty)=L_{\infty}\,(0;\infty)\cap C\,(0;\infty)$, *то интегральное уравнение* (1.1) *имеет единственное решение* $\exp\left(\frac{t}{4a^2}\right)\varphi\,(t)\in M\,(0;\infty)=L_{\infty}\,(0;\infty)\cap$ $\cap\,C\,(0;\infty)$, *которое может быть найдено методом последовательных приближений.*

Замечание 2. Из соотношений (6.2)–(6.3) следует, что однородное уравнение, соответствующее (6.1), равносильно неоднородному уравнению

$$\varphi_2\,(t)-\int_0^t N\,(t,\tau)\,\varphi_2\,(\tau)\,d\tau=C\cdot\left\{\int_0^t R\,(t-\tau)\,\varphi_2^{(0)}\,(\tau)\,d\tau+\varphi_2^{(0)}\,(t)\right\},\quad C=\mathrm{const},$$

это означает, что интегральное уравнение (6.1), а вместе с ним и уравнение (1.1) имеют общее решение, состоящее из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного.

§ 7. Заключение

В работе найдено общее решение особого интегрального уравнения типа Вольтерра второго рода, к которому редуцируются двумерные задачи теплопроводности в областях вырождающихся в точку в начальный момент времени. Показано, что соответствующее однородное уравнение имеет ненулевое решение в классе ограниченных функций. Исследование такого рода особых интегральных уравнений Вольтерра представляет самостоятельный интерес.

Финансирование. Работа выполнена по грантам Министерства образования и науки Республики Казахстан: AP08956033, 2020-2021 и AP0885372, 2020-2022.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kheloufi A., Sadallah B.-K. On the regularity of the heat equation solution in non-cylindrical domains: Two approaches // Applied Mathematics and Computation. 2011. Vol. 218. Issue 5. P. 1623–1633. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.06.042

2. Kheloufi A. Existence and uniqueness results for parabolic equations with Robin type boundary conditions in a non-regular domain of $\mathbb{R}^3$ // Applied Mathematics and Computation. 2013. Vol. 220. P. 756–769. https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.07.027
3. Cherfaoui S., Kessab A., Kheloufi A. Well-posedness and regularity results for a $2m$-th order parabolic equation in symmetric conical domains of $\mathbb{R}^{N+1}$ // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2017. Vol. 40. Issue 16. P. 6035–6047. https://doi.org/10.1002/mma.4451
4. Kheloufi A. On a fourth order parabolic equation in a nonregular domain of $\mathbb{R}^3$ // Mediterranean Journal of Mathematics. 2014. Vol. 12. Issue 3. P. 803–820. https://doi.org/10.1007/s00009-014-0429-7
5. Kheloufi A., Sadallah B.-K. Study of the heat equation in a symmetric conical type domain of $\mathbb{R}^{N+1}$ // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2014. Vol. 37. Issue 12. P. 1807–1818. https://doi.org/10.1002/mma.2936
6. Chapko R., Johansson B. T., Vavrychuk V. Numerical solution of parabolic Cauchy problems in planar corner domains // Mathematics and Computers in Simulation. 2014. Vol. 101. P. 1–12. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2014.03.001
7. Wang Y., Huang J., Wen X. Two-dimensional Euler polynomials solutions of two-dimensional Volterra integral equations of fractional order // Applied Numerical Mathematics. 2021. Vol. 163. P. 77–95. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2021.01.007
8. Dehbozorgi R., Nedaiasl K. Numerical solution of nonlinear weakly singular Volterra integral equations of the first kind: An hp-version collocation approach // Applied Numerical Mathematics. 2021. Vol. 161. P. 111–135. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.10.030
9. Kavokin A. A., Kulakhmetova A. T., Shpadi Y. R. Application of thermal potentials to the solution of the problem of heat conduction in a region degenerates at the initial moment // Filomat. 2018. Vol. 32. Issue 3. P. 825–836. https://doi.org/10.2298/FIL1803825K
10. Amangalieva M. M., Akhmanova D. M., Dzhenaliev M. T., Ramazanov M. I. Boundary value problems for a spectrally loaded heat operator with load line approaching the time axis at zero or infinity // Differential Equations. 2011. Vol. 47. Issue 2. P. 231–243. https://doi.org/10.1134/S0012266111020091
11. Jenaliyev M., Amangaliyeva M., Kosmakova M., Ramazanov M. On a Volterra equation of the second kind with “incompressible” kernel // Advances in Difference Equations. 2015. Vol. 2015. Issue 1. Article number 71. https://doi.org/10.1186/s13662-015-0418-6
12. Amangalieva M. M., Dzhenaliev M. T., Kosmakova M. T., Ramazanov M. I. On one homogeneous problem for the heat equation in an infinite angular domain // Siberian Mathematical Journal. 2015. Vol. 56. Issue 6. P. 982–995. https://doi.org/10.1134/S0037446615060038
13. Jenaliyev M., Ramazanov M. On a homogeneous parabolic problem in an infinite corner domain // Filomat. 2018. Vol. 32. Issue 3. P. 965–974. https://doi.org/10.2298/FIL1803965J
14. Baderko E. A. Parabolic problems and boundary integral equations // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 1997. Vol. 20. Issue 5. P. 449–459. https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1476(19970325)20:5<449::AID-MMA818>3.0.CO;2-E
15. Polyanin A. D., Manzhirov A. V. Handbook of integral equations. Boca Raton: CRC Press, 2008.
16. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965.
17. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. Table of integrals, series, and products. Academic Press, 2014.
18. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 20.04.2021

Рамазанов Мурат Ибраевич, д. ф.-м. н., профессор, Карагандинский университет им. Е. А. Букетова, 100028, Казахстан, г. Караганда, ул. Университетская, 28.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2297-5488
E-mail: ramamur@mail.ru

Гульманов Нуртай Кудайбергенович, докторант, Карагандинский университет им. Е. А. Букетова, 100028, Казахстан, г. Караганда, ул. Университетская, 28.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4159-1551
E-mail: gulmanov.nurtay@gmail.com

Цитирование: М. И. Рамазанов, Н. К. Гульманов. О сингулярном интегральном уравнении Вольтерра краевой задачи теплопроводности в вырождающейся области // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 241–252.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2021. Vol. 31. Issue 2. Pp. 241–252.

M. I. Ramazanov, N. K. Gulmanov

On the singular Volterra integral equation of the boundary value problem for heat conduction in a degenerating domain

Keywords: integral equation, a singular Volterra type integral equation of the second kind, Carleman–Vekua regularization method.

MSC2020: 45D05, 45E10

DOI: 10.35634/vm210206

In this paper, we consider a singular Volterra type integral equation of the second kind, to which some boundary value problems of heat conduction in domains with a boundary varying with time are reduced by the method of thermal potentials. The peculiarity of such problems is that the domain degenerates into a point at the initial moment of time. Accordingly, a distinctive feature of the integral equation under study is that the integral of the kernel, as the upper limit of integration tends to the lower one, is not equal to zero. This circumstance does not allow solving this equation by the method of successive approximations. We constructed the general solution of the corresponding characteristic equation and found the solution of the complete integral equation by the Carleman–Vekua method of equivalent regularization. It is shown that the corresponding homogeneous integral equation has a nonzero solution.

Funding. Supported by the grant projects AP08956033, 2020-2021 and AP08855372, 2020-2022 from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan.

REFERENCES

1. Kheloufi A., Sadallah B.-K. On the regularity of the heat equation solution in non-cylindrical domains: Two approaches, *Applied Mathematics and Computation*, 2011, vol. 218, issue 5, pp. 1623–1633. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.06.042
2. Kheloufi A. Existence and uniqueness results for parabolic equations with Robin type boundary conditions in a non-regular domain of $\mathbb{R}^3$, *Applied Mathematics and Computation*, 2013, vol. 220, pp. 756–769. https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.07.027
3. Cherfaoui S., Kessab A., Kheloufi A. Well-posedness and regularity results for a $2m$-th order parabolic equation in symmetric conical domains of $\mathbb{R}^{N+1}$, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2017, vol. 40, issue 16, pp. 6035–6047. https://doi.org/10.1002/mma.4451
4. Kheloufi A. On a fourth order parabolic equation in a nonregular domain of $\mathbb{R}^3$, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2014, vol. 12, issue 3, pp. 803–820. https://doi.org/10.1007/s00009-014-0429-7
5. Kheloufi A., Sadallah B.-K. Study of the heat equation in a symmetric conical type domain of $\mathbb{R}^{N+1}$, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2014, vol. 37, issue 12, pp. 1807–1818. https://doi.org/10.1002/mma.2936
6. Chapko R., Johansson B. T., Vavrychuk V. Numerical solution of parabolic Cauchy problems in planar corner domains, *Mathematics and Computers in Simulation*, 2014, vol. 101, pp. 1–12. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2014.03.001
7. Wang Y., Huang J., Wen X. Two-dimensional Euler polynomials solutions of two-dimensional Volterra integral equations of fractional order, *Applied Numerical Mathematics*, 2021, vol. 163, pp. 77–95. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2021.01.007
8. Dehbozorgi R., Nedaiasl K. Numerical solution of nonlinear weakly singular Volterra integral equations of the first kind: An hp-version collocation approach, *Applied Numerical Mathematics*, 2021, vol. 161, pp. 111–135. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.10.030
9. Kavokin A. A., Kulakhmetova A. T., Shpadi Y. R. Application of thermal potentials to the solution of the problem of heat conduction in a region degenerates at the initial moment, *Filomat*, 2018, vol. 32, issue 3, pp. 825–836. https://doi.org/10.2298/FIL1803825K

10. Amangalieva M. M., Akhmanova D. M., Dzhenaliev M. T., Ramazanov M. I. Boundary value problems for a spectrally loaded heat operator with load line approaching the time axis at zero or infinity, *Differential Equations*, 2011, vol. 47, issue 2, pp. 231–243.
https://doi.org/10.1134/S0012266111020091
11. Jenaliyev M., Amangaliyeva M., Kosmakova M., Ramazanov M. On a Volterra equation of the second kind with “incompressible” kernel, *Advances in Difference Equations*, 2015, vol. 2015, issue 1, article number 71. https://doi.org/10.1186/s13662-015-0418-6
12. Amangaliyeva M. M., Dzhenaliev M. T., Kosmakova M. T., Ramazanov M. I. On one homogeneous problem for the heat equation in an infinite angular domain, *Siberian Mathematical Journal*, 2015, vol. 56, issue 6, pp. 982–995. https://doi.org/10.1134/S0037446615060038
13. Jenaliyev M., Ramazanov M. On a homogeneous parabolic problem in an infinite corner domain, *Filomat*, 2018, vol. 32, issue 3, pp. 965–974. https://doi.org/10.2298/FIL1803965J
14. Baderko E. A. Parabolic problems and boundary integral equations, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 1997, vol. 20, issue 5, pp. 449–459.
https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1476(19970325)20:5<449::AID-MMA818>3.0.CO;2-E
15. Polyanin A. D., Manzhirov A. V. *Handbook of integral equations*, Boca Raton: CRC Press, 2008.
16. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu* (Operational calculus handbook), Moscow: Vysshaya shkola, 1965.
17. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, 2014.
18. Lavrent’ev M. A., Shabat B. V. *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* (Methods of the theory of function of complex variable), Moscow: Nauka, 1973.

Received 20.04.2021

Ramazanov Murat Ibraevich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Academician E. A. Buketov Karaganda University, ul. Universitetskaya, 28, Karaganda, 100028, Kazakhstan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2297-5488
E-mail: ramamur@mail.ru

Gulmanov Nurtay Kudaibergenovich, PhD candidate, Academician E. A. Buketov Karaganda University, ul. Universitetskaya, 28, Karaganda, 100028, Kazakhstan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4159-1551
E-mail: gulmanov.nurtay@gmail.com

Citation: M. I. Ramazanov, N. K. Gulmanov. On the singular Volterra integral equation of the boundary value problem for heat conduction in a degenerating domain, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp’yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 2, pp. 241–252.