УДК 517.956.226

Существование решений и оценки поперечников множеств, связанных с решениями нелинейных уравнений неклассического типа

The existence of solutions and evaluate widths set of solutions of nonlinear equations of non-convent

Муратбеков М.Б., Шыракбаев А.Б., Баулыбаева Б.А.

Таразский государственный педагогический институт (E-mail: abaishirak@mail.ru)

Мақалада классикалық емес типтегі сызықты емес теңдеудің бір класы үшін шешімнің бар болуы және тегістігі туралы теорема дәлелденген. Сонымен қатар сызықты емес теңдеудің шешімдерімен байланысты жиынның Колмогоров көлденеңдері бойынша екі жақты бағалаулары алынған. Жұмыс үш бөлімнен тұрады. Бірінші бөлімде классикалық емес типтегі сызықты жойылмалы теңдеу қарастырылған. Екінші бөлімде сызықты емес теңдеу қарастырылған. Ал үшінші бөлімде сызықты емес теңдеудің шешімдерімен байланысты жиындардың, Колмогоров бойынша, бағалаулары зерттелген. Ал, Колмогоров бойынша, көлденеңдер жуық шешімнің жинақталу жылдамдығын сипаттайды.

In this article the theorem about the existence and smoothness of solutions for a class of the nonlinear equations of non-classical type is proved. Two-sided estimates of the Kolmogorov widths for a sets associated with solutions of nonlinear equations is obtained. The work consists of three sections. In the first section describes the degenerate linear equations of the nonclassical type. In the second section the nonlinear equation is considered. In the third section we study estimates of the Kolmogorov widths for a sets connected with the solutions of the nonlinear problem. It is known, the Kolmogorov widths characterizes the speed of convergence of approximate solutions.

В этой статье исследованы существование, гладкость и аппроксимативные свойства решений одного класса вырождающихся нагруженных уравнений неклассического типа. Обзор литературы, посвященной уравнениям неклассического типа, то есть не являющимся эллиптическими, параболическими и гиперболическими, можно найти в $[1-6]$.

Рассмотрим задачу

$$Lu=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\sum_{k=0}^{s}(-1)^k R_k\left(y,\int_0^{2\pi}u(x,y)dx\right)\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}+$$

$$+\sum_{k=0}^{m}(-1)^k B_k\left(y,\int_0^{2\pi}u(x,y)dx\right)\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}=f\in L_2(\Omega); \qquad (0.1)$$

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right|_{x=2\pi}, \quad i=0,1,2,...,2s, \quad s\ge m; \qquad (0.2)$$

$$u(x,0)=u(x,1)=0, \qquad (0.3)$$

где $\Omega=\{(x,y): 0<x<2\pi,\quad 0<y<1\}$.

На коэффициенты уравнения (0.1) наложим следующие ограничения:

i_0) $R_k(y,z)\ge 0$ $(k=0,1,...,s)$, $B_k(y,z)\ge 0$ $(k=0,1,...,m)$ — кусочно-непрерывные и ограниченные функции по обоим аргументам и $R_0(y,z)\ge\delta_0$; $B_0(y,z)\ge\delta>0$;

i_{00}) $R_k(y,z)\ge 0$ $(k=1,...,s)$ для $y\in[0,1]$, $z\in C$ (комплексная плоскость) и при каждом $z\in C$ не убывают на отрезке [0,1]; $B_k(y,z)\ge 0$ $(k=1,...,m)$, для $y\in[0,1]$, $z\in C$ и при каждом $z\in C$ не убывают на отрезке [0,1];

i_{000}) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{R_k(2y,z)}{R_k(y,z)}<\infty$ при всех $z\in C$ $(k=1,...,s)$, $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{B_k(2y,z)}{B_k(y,z)}<\infty$ при всех $z\in C$ $(k=1,...,m)$.

Теорема 0.1. Пусть выполнены условия i_0) - i_{000}). Тогда при $\lambda\ge 0$ существует решение задачи (0.1)–(0.3) и для него справедлива оценка

$$\|u(x,y)\|_{C([0,1],L_2)}+\|u(x,y)\|_{1,2}\le C\|f\|_2,$$

где $C>0$ — постоянное число, не зависящее от $u(x,y)$.

Здесь $C\left(\left[0,1\right],L_2(0,2\pi)\right)$ — пространство, полученное пополнением множества непрерывных функций на промежутке $\left[0,1\right]$ со значениями в $L_2(0,2\pi)$ относительно нормы

$$\left\|u(x,y)\right\|_{C([0,1],L_2)}=\sup_{y\in[0,1]}\left(\int_0^{2\pi}\left|u(x,y)\right|^2dx\right)^{1/2}=\sup_{y\in[0,1]}\left\|u(x,y)\right\|_{L_2(0,2\pi)},$$

$\left\|\cdot\right\|_{1,2}$ — норма в пространстве Соболева $W_2^1(\Omega)$; $\left\|\cdot\right\|_2$ — норма пространства $L_2(\Omega)$.

Через L обозначим оператор, соответствующий задаче (0.1)–(0.3). Из теоремы 0.1 следует, что множество $M=\left\{u\in D(L):\ \left\|Lu\right\|_2+\left\|u\right\|_2\le T\right\}$ компактно в $L_2(\Omega)$. Как известно, поперечники, по Колмогорову, компактного множества M, тем более когда оно содержит решения уравнения $Lu=f$, характеризуют скорость сходимости приближенных решений.

По определению, k-поперечником, по Колмогорову, множества M в пространстве $L_2(\Omega)$ называется величина

$$d_k=\inf_{\{y_k\}}\sup_{u\in M}\inf_{v\in y_k}\left\|u-v\right\|_2,$$

где $\left\{y_k\right\}$ — множество всех подпространств $L_2(\Omega)$, размерности которых не превосходят k.

Теорема 0.2. Пусть выполнены условия теоремы 0.1. Тогда для поперечников $d_k(M)$, по Колмогорову, множества M справедливы оценки

$$C\frac{1}{k^{\frac{2s+1}{2}}}\le d_k\le C\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}},\qquad k=1,2,...,$$

где $C>0$ не зависит от k.

1. О свойствах решений задачи Дирихле для вырождающегося линейного уравнения неклассического типа

Рассмотрим задачу

$$Lu+\lambda u\equiv-\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\sum_{k=0}^{s}(-1)^kR_k(y)\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}+$$

$$+\sum_{k=0}^{m}(-1)^kB_k(y)\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}+\lambda u=f\in L_2(\Omega);\tag{1.1}$$

$$\left.\frac{\partial^iu}{\partial x^i}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial^iu}{\partial x^i}\right|_{x=2\pi},\qquad i=0,1,2,...,2s,\ s\ge m;\tag{1.2}$$

$$u(x,0)=u(x,1)=0,\tag{1.3}$$

где $\Omega=\{(x,y):0<x<2\pi,\quad 0<y<1\}$.

Определение. Функция $u\in L_2(\Omega)$ называется сильным решением задачи (1.1)–(1.3), если существует последовательность $\left\{u_n\right\}\subset C_{0,\pi}^{\infty}(\bar{\Omega})$ такая, что

$$\left\|u_n-u\right\|_2\to0,\qquad \left\|(L+\lambda E)u-f\right\|_2\to0\ \text{ при }\ n\to\infty.$$

В дальнейшем считаем, что $R_k(y)$, $(k=0,1,...,s)$, $B_k(y)$, $(k=0,1,...,m)$, — функции, непрерывные на отрезке $\left[0,1\right]$, и удовлетворяют условиям

i) $R_k(y)\ge0$, $(k=1,...,s)$, $B_k(y)\ge0$, $(k=1,2,...,m)$, $R_0(y)\ge\delta_0>0$, $B_0(y)\ge\delta>0$;

ii) $R_k(y)\ge0$ $(k=1,...,s)$, $B_k(y)\ge0$, $(k=1,...,m)$, не убывают на отрезке $[0,1]$;

iii) $\lim\limits_{y\to0}\frac{R_k(2y)}{R_k(y)}<\infty$, $(k=1,...,s)$, $\lim\limits_{y\to0}\frac{B_k(2y)}{B_k(y)}<\infty$, $(k=1,...,m)$.

Теорема 1.1. Пусть выполнено условие *i*). Тогда при $\lambda\ge0$ для любой $f\in L_2(\Omega)$ существует в $L_2(\Omega)$ единственное сильное решение задачи (1.1)–(1.3) и для него справедливая оценка

$$\left\|u\right\|_{C([0,1],L_2)}+\left\|u\right\|_{1,2}\le C\left\|f\right\|_2,$$

C>0 — положительная постоянная, не зависящая от $u(x,y)$.

Теорема 1.2. Пусть выполнены условия $i)$ - $iii)$. Тогда для любой $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение задачи (1.1)–(1.3) $u \in L_2(\Omega)$ и для него справедлива оценка а):

$$\sum_{k=0}^{s}\left\|R_k(y)\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}\right\|_2^2+\sum_{k=0}^{m}\left\|B_k(y)\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}\right\|_2^2+\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\|_2^2+\|u\|_2^2 \le C\|f\|_2,$$

$C>0$ — постоянное число, не зависящее от $u(x,y)$.

Лемма 1.1. Пусть выполнено условие $i)$. Тогда для всех $u \in D(L)$ справедлива оценка

$$\|u\|_2 \le C\|Lu\|_2,$$

$C>0$ — постоянное число, не зависящее от $u(x,y)$.

Доказательство. Для этого рассмотрим квадратичную форму $<Lu,u>$ для $u \in C_{0,\pi}^{\infty}(\bar{\Omega})$.

В силу (1.2) и (1.3)

$$<Lu,u>=\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 dxdy+\int_{\Omega}\sum_{k=0}^{c}(-1)^k R_k(y)\frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}}u\,dxdy+$$

$$+\int_{\Omega}\sum_{k=0}^{m}B_k(y)\left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|^2 dxdy. \qquad (1.4)$$

В силу условия (1.3) второе слагаемое равно нулю. В этом можно убедиться путем интегрирования по частям. Используя неравенство Коши-Буняковского и неравенство Коши с «ε«, получим:

$$C(\varepsilon,\delta)\|Lu\|_2^2 \ge \|u_y\|_2^2+\|u\|_2^2. \qquad (1.5)$$

Отсюда $\|u\|_2^2 \le C\|Lu\|_2^2$, где $C=C(\varepsilon,\delta)$. В силу непрерывности нормы последняя оценка справедлива для всех $u \in D(L)$. Лемма 1.1 доказана.

Лемма 1.2. Пусть выполнено условие $i)$. Тогда для всех функций $u \in D(L)$ справедлива оценка $\|u\|_{1,2} \le C\|Lu\|_2$, где C>0 — постоянное число.

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение $<Lu,u_x>$ для $u \in C_{0,\pi}^{\infty}(\bar{\Omega})$. Учитывая, что $u_{yy}u_x=(u_y u_x)_y-u_y u_{xy}$, имеем:

$$\int_{\Omega}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}u_x dxdy=0. \qquad (1.6)$$

Далее, интегрируя по частям, нетрудно получить, что

$$\int_{\Omega}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k R_k(y)\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2x+1}}\frac{\partial u}{\partial x}dxdy=\int_{\Omega}\sum_{k=0}^{s}R_k(y)\left|\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x^{k+1}}\right|^2 dxdy.$$

Отсюда согласно условию $i)$ имеем

$$\int_{\Omega}\sum_{k=0}^{s}R_k(y)\left|\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x^{k+1}}\right|^2 dxdy \ge \delta_0\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdy. \qquad (1.7)$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что

$$\int_{\Omega}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k B_k(y)\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}}\frac{\partial u}{\partial x}dxdy=0. \qquad (1.8)$$

Таким образом, учитывая (1.6)–(1.8), получим, что

$$\left|<Lu,u_x>\right| \ge \delta_0\|u_x\|_2^2.$$

Отсюда

$$\|Lu\|_2^2 \ge \delta_2^2\|u_x\|_2^2. \qquad (1.9)$$

Объединяя неравенства (1.5) и (1.9), получаем, что $\|u\|_{1,2} \le C\|Lu\|_2$, где $C=C(\delta_0,\delta,\varepsilon)$. Лемма 1.2 доказана. Рассмотрим оператор, определенный равенством

$$l_n u=-u''+\left(i\sum_{k=0}^{s}n^{2k+1}R_k(y)+\sum_{k=0}^{m}n^{2k}B_k(y)\right)u$$

на множестве $C_0^\infty[0,1]$, где $C_0^\infty[0,1]$ — множество функций, сколь угодно раз дифференцируемых и удовлетворяющих условию $u(0)=u(1)=0$.

Нетрудно проверить, что данный оператор при выполнении условий $i)$ допускает замыкание. Замыкание также обозначим через l_n.

Лемма 1.3. Пусть выполнено условие $i)$, тогда:

а) для всех функций $u(y)$ из $D(l_n)$ справедливы следующие оценки:

$$\|u\|_{1,2} \le C\|l_n u\|_2; \tag{1.10}$$

$$\|u\|_{C[0,1]} \le C\|l_n u\|_2;$$

где $C>0$ — постоянное число;

б) оператор l_n непрерывно обратим в $L_2(0,1)$.

Лемма 1.3 доказывается точно так же, как леммы 1.2 и 1.3 работы [7].

Доказательство теорем 1.1, 1.2. Повторяя все выкладки и рассуждения, которые использованы при доказательстве теоремы 1 работы [7], получаем доказательство теоремы 1.1.

Согласно условиям теоремы 1.2 выполняются все условия теоремы 1 работы [6], следовательно, справедлива оценка (a). Теорема 1.2 доказана.

2. О существовании и свойствах решений нелинейной задачи

Прежде чем доказать теорему 0.1, приводим несколько вспомогательных предложений.

Рассмотрим линейное уравнение

$$L_v u = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{k=0}^{s}(-1)^k R_k(y, \int_0^{2\pi} v(x,y)dx)\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}} +$$

$$+\sum_{k=0}^{m}(-1)^k B_k(y, \int_0^{2\pi} v(x,y)dx)\frac{\partial^{2k}u}{\partial x^{2k}} = f \in L_2(\Omega). \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. Пусть $v\in C([0,1],L_2(0,2\pi))$ и выполнено условие $i_0)$. Тогда для любой $f\in L_2(\Omega)$ существует единственное решение задачи (2.1), (0.2)–(0.3) и для него справедлива оценка

$$\|u(x,y)\|_{C([0,1],L_2(0,2\pi))} + \|u(x,y)\|_{1,2,\Omega} \le C\|f\|_2, \tag{2.2}$$

где $C>0$ не зависит от $u(x,y)$ и $v(x,y)$.

Доказательство. Положим $\tilde R_k(y) = R_k(y, \int_0^{2\pi} v(x,y)dx)$ $(k=0,1,...,s)$, $\tilde B_k(y) = B_k(y, \int_0^{2\pi} v(x,y)dx)$, $(k=0,1,...,m)$. Тогда задача (2.1), (0.2)–(0.3) сводится к задаче (1.1)–(1.3), где функции $R_k(y), B_k(y)$ заменены, соответственно, на $\tilde R_k(y), \tilde B_k(y)$. При этом согласно условию $i_0)$ для $\tilde R_k(y), \tilde B_k(y)$ выполняются все условия теоремы 1.1, отсюда вытекает утверждение доказываемой леммы 2.1.

Таким образом, задача (2.1), (0.2)–(0.3) имеет единственное решение $u=L_v^{-1}f$, удовлетворяющее оценке (2.2). Очевидно, если $v\in C([0,1],L_2(0,2\pi))$, то $u=L_v^{-1}f\in C([0,1],L_2(0,2\pi))$. Более того, поскольку $u=L_v^{-1}f$ — решение задачи 2.1), (0.2)–(0.3), для произвольной функции $v\in C([0,1],L_2(0,2\pi))$ имеем $L_v^{-1}f\in D(L)$. Поэтому существование решения краевой задачи (0.1)–(0.3) эквивалентно существованию неподвижной точки оператора L_v^{-1} в пространстве $C([0,1],L_2)$, т.е. существование функции $u\in C([0,1],L_2(0,2\pi))$ такой, что $u=L_v^{-1}f$. При этом $u\in D(L)$, поскольку $L_v^{-1}f\in D(L)$.

Следовательно, задача (0.1)–(0.3) имеет решение, если оператор L_v^{-1} имеет неподвижную точку. С этой целью применяем известный принцип Шаудера.

Пусть $\overline{S} = \{v\in C([0,1],L_2(0,2\pi)) : \|v\|_{C([0,1],L_2)} \le A\}$ — шар в пространстве $C([0,1],L_2)$, где A — произвольное положительное число.

Лемма 2.2. Пусть выполнено условие $i_0)$. Тогда оператор L_v^{-1} отображает множество $\overline{S}$ в себя.

Доказательство. Доказательство леммы следует из леммы 2.1, если в качестве A взять число $C\cdot\|f\|_2$ из оценки (2.2).

Пусть $K=\left\{u\in C\left([0,1],L_2(0,2\pi)\right): u=L_v^{-1}f,\ v\in\overline{S}\right\}$.

Лемма 2.3. Пусть выполнено условие i_0). Тогда для любой функции $u(x,y)\in K$ справедливо неравенство

$$\|u(x,y)\|_{C([0,1],L_2)}+\|u(x,y)\|_{1,2}\leq C\|f\|,$$

где C>0 — постоянное число.

Доказательство леммы 2.3 следует из леммы 2.1.

Лемма 2.4. Множество K компактно в пространстве $C([0,1],L_2(0,2\pi))$.

Лемма 2.5. Пусть выполнено условие i_0). Тогда оператор L_v^{-1} непрерывен.

Эти леммы доказываются точно так же, как леммы 2.2 и 2.3 работы $[7]$.

Доказательство теоремы 0.1. Согласно леммам 2.2–2.5 оператор L_v^{-1} вполне непрерывен и переводит шар $\overline{S}$ в себя. Тогда, по принципу Шаудера, оператор L_v^{-1} имеет неподвижную точку $u(x,y)$ в шаре $\overline{S}$. Это означает, что задача (0.1)-(0.3) для любой правой части $f(x)\in L_2(\Omega)$ имеет решение $u(x,y)\in\overline{S}$, причем верна оценка

$$\|u(x,y)\|_{C([0,1],L_2)}+\|u(x,y)\|_{1,2}\leq C\|f\|_2.$$

Теорема 0.1 доказана.

3. Оценки поперечников $d_k(M)$, по Колмогорову, множества $M=\left\{u\in D(L):\|L\,u\|_2+\|u\|_2\leq T\right\}$.

Для доказательства теоремы 0.2 нам необходимы некоторые леммы и оценки.

Введем множества

$$\tilde{M}_{C_1}=\left\{u\in L_2(\Omega):\|u_x\|_2^2+\|u_y\|_2^2+\|u\|_2^2\leq C_1\right\};$$

$$\dot{M}_{C_1^{-1}}=\left\{u\in L_2(\Omega):\sum_{k=1}^{2s+1}\left\|\frac{\partial^k u}{\partial y^k}\right\|_2^2+\sum_{k=1}^{2s+1}\left\|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right\|_2^2+\|u\|_2^2\leq C^{-1}\right\}.$$

Справедливы следующие леммы.

Лемма 3.1 Пусть выполнены условия i_0) - i_{000}), тогда для некоторой постоянной $C_1>1$ справедливы включения $\dot{M}_{C_1^{-1}}\subseteq M_0\subseteq\tilde{M}_{C_1}$.

Лемма 3.2. Пусть выполнены условия i_0) - i_{000}). Тогда справедливы оценки

$$C^{-1}\dot{d}_k\leq d_k(M)\leq C\tilde{d}_k\qquad k=1,2,...$$

Введем функцию $N(\lambda)=\sum\limits_{d_k>\lambda}1$, равную количеству поперечников $d_k(M)$, больших $\lambda>0$.

Лемма 3.3. Пусть выполнены условия i_0) - i_{000}), тогда справедлива оценка

$$\dot{N}(C\lambda)\leq N(\lambda)\leq\tilde{N}(C^{-1}\lambda),$$

где $\tilde{N}(\lambda)=\sum\limits_{\tilde{d}_k>\lambda}1,\ \dot{N}(\lambda)=\sum\limits_{\dot{d}_k>\lambda}1.$

Эти леммы доказываются точно так же, как леммы 4 и 5 работы $[8]$.

Доказательство теоремы 0.2. Известно $[9]$, что для функции $\tilde{N}(\lambda)$, $\dot{N}(\lambda)$ справедливы оценки

$$C^{-1}\lambda^{-2}\leq\tilde{N}(\lambda)\leq C\lambda^{-2};\tag{3.1}$$

$$C^{-1}\lambda^{-2/2s+1}\leq\dot{N}(\lambda)\leq C\lambda^{-2/2s+1}.\tag{3.2}$$

Пусть $\lambda=\tilde{d}_k$, тогда $\tilde{N}(\tilde{d}_k)=k$. Поэтому из (3.1) и (3.2) соответственно вытекают неравенства

$$C^{-1}\frac{1}{k^{1/2}}\leq\tilde{d}_k\leq C\frac{1}{k^{1/2}};\qquad C^{-1}\frac{1}{k^{\frac{2s+1}{2}}}\leq\dot{d}_k\leq C\cdot\frac{1}{k^{\frac{2s+1}{2}}}.$$

Из них с учетом оценок, полученных в лемме 3.2, получаем доказательство теоремы 0.2.

References

1. *Dubinsky U.A.* About some differential-operative equation of any order // Mathematical collection. — 1973. — Vol. 90 (132). — № 1. — P. 1–22.
2. *Dubinsky U.A.* About one abstract theorem and it's appendices to regional task for no classical equations // Mathematical collection. — 1969. — Vol. 79 (121). — № 1. — P. 91–117.
3. *Romanko V.K.* Solutions boundary tasks for differential-operative equation of high order // Differential equation. — 1978. — Vol. 14. — № 6. — P. 1081–1092.
4. *Urchuk N.I.* About boundary tasks for equation that consist in the main part operators like $\frac{d^{2m+1}}{dt^{2m+1}} + A$ // Differential equation. — 1974. — Vol. 10. — № 4. — P. 759–762.
5. *Piyatkov S.P.* About correct boundary tasks for equations of a composite type and their generalization // Abstract of candidate thesis. — Novosibirsk, 1982.
6. *Muratbekov M.B.* Coercive estimates for one differential operator of the high order // Differential equation. — 1981. — Vol. 17. — № 5. — P. 893–901.
7. *Muratbekov M.B., Muratbekov M.M., Ospanov K.N.* About approximation properties of the solutions of the nonlinear equation of mixed type // Fundamental and applied mathematics (Moscow State University). — 2006. — Vol. 12. — № 5. — P. 95–107.
8. *Muratbekov M.B., Muratbekov M.M.* Estimation of the spectrum of one class of operators of mixed type // Differential equation. — M., 2007. — Vol. 42. — № 1. — P. 135–137.
9. *Otelbaev M.* Embedding theorems spaces with a weight and their application to the study of the spectrum of the Schrodinger operator // Pr. MIAN USSR. — 1979. — Vol. 150. — P. 265–305.

УДК 519.6

Об устойчивости одной приближенной схемы для сингулярной задачи Коши

On the stability of one difference scheme for a singular Cauchy problem

Оспанова А.Б.

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана (E-mail: o.ademi111@gmail.com)

Шексіздікте сингулярлы бірінші реттік дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебінің айырымдық схемасының моделі қарастырылған. Бұл схеманы анықтайтын дискреттік A_n операторлар тізбегі құрастырылған. Бұл тізбектің орнықтылығы дәлелденген.

In the work we consider a model of difference scheme for a numeric solution of Cauchy problem for first order differential equation with the singularity at infinity. We build a sequence of discrete operators A_n for the difference scheme and prove that the sequence A_n is stable.

Пусть дана краевая задача Коши

$$\begin{cases} y' + \upsilon(t)y = z(t) \ \ (t > 0); \\ y(0) = \alpha, \end{cases} \tag{1}$$

где $\upsilon(t)$ — непрерывная в $I = [0,\infty)$ функция, такая, что $|\upsilon(t)| > 0$ для всех $t \geq 0$ и

$$\int_0^\infty |\upsilon(t)|^{-2}\, dt < \infty. \tag{2}$$

Целью настоящей работы является построение приближенной схемы для численного решения уравнения (1). Следующие определения взяты из [1].

Пусть X, F — банаховы пространства; $L(X,F)$ — пространство всех непрерывных линейных операторов, действующих из X в F. Пусть A — оператор из X в F.

Приближенной схемой уравнения

$$Ay = f \tag{3}$$