ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ПРОЦЕССА КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ

Есенбаева Г.А., Есбаев А.Н., Сажинова Ж. Р.

Карагандинский государственный университет им. академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан
Назарбаев Интеллектуальная школа, Астана, Казахстан
E-mail: esenbaevagulsima@mail.ru

Прямоугольная мембрана со сторонами a и b, закрепленная по краям, расположена в плоскости (x, y), причем $0 < x < a$, $0 < y < b$, $t > 0$. Колебание мембраны вызывается с помощью начального отклонения и начальной скорости. Процесс колебания плоской однородной мембраны описывается уравнением [1]

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) . \tag{1}$$

Для нахождения функции $u(x, y, t)$, характеризующей отклонение мембраны от положения равновесия (прогиб), нужно решить уравнение колебаний при заданных начальных условиях

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y) , \tag{2}$$

$$u_t (x, y, 0) = \psi(x, y) \tag{3}$$

и граничных условиях

$$u_x (0, y, t) = 0 , \quad u_x (a, y, t) + hu(a, y, t) = 0 , \quad h > 0 , \tag{4}$$

$$u_y (x, 0, t) = 0 , \quad u_y (x, b, t) + gu(x, a, t) = 0 . \quad g > 0 . \tag{5}$$

Искомая функция $u(x, y, t)$ характеризует прогиб мембраны в момент времени t. Решение задачи (1) - (5) ищем в виде функции, не равной тождественно нулю, [2]

$$u(x, y, t) = v(x, y)T(t) . \tag{6}$$

Разделяя переменные, получим дифференциальное уравнение для функции $T(t)$

$$T'' - \tau a^2 T = 0 , \tag{7}$$

где τ - постоянная, а для функции $v(x, y)$ следующую краевую задачу

$$v_{xx} + v_{yy} - \tau v = 0 , \quad v_x (0, y) = v_x (a, y) + hv(a, y) = 0 , \quad v_y (x, 0) = v_y (x, b) + gv(x, b) = 0 ,$$

решение которой ищем в виде $v(x, y) = X(x)Y(y)$.

Разделение переменных, решение спектральных задач и нормирование функций $v_{kn}(x, y)$ приводят к тому, что эти функции определяются равенствами [3]

$$v_{kn}(x, y) = A_k B_n \cos\lambda_k x \cos\mu_n y , \quad A_k = \sqrt{\frac{2\left(\lambda_k^2 + h^2\right)}{a\left(\lambda_k^2 + h^2\right) + h}} , \quad B_n = \sqrt{\frac{2\left(\mu_n^2 + g^2\right)}{b\left(\mu_n^2 + g^2\right) + g}} , \quad k, n = 1,2,... ,$$

где λ_k, μ_n - корни уравнений

$$\lambda tg\lambda a = h , \quad \mu tg\mu b = g$$

соответственно.

Решение уравнения (7) и принцип суперпозиции определяют общее решение (6) задачи (1)–(5) в виде

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_k B_n \left(C_{kn} \cos a\sqrt{\lambda_k^2 + \mu_n^2}\, t + D_{kn} \sin a\sqrt{\lambda_k^2 + \mu_n^2}\, t \right) \cos\lambda_k x \cos\mu_n y . \tag{8}$$

Используя начальные условия (2), (3), получим значения постоянных C_{kn}, D_{kn}

$$C_{kn} = \int_0^a\int_0^b \varphi(x, y) v_{kn}(x, y) dxdy , \quad D_{kn} = \frac{1}{a\sqrt{\lambda_k^2 + \mu_n^2}} \int_0^a\int_0^b \psi(x, y) v_{kn}(x, y) dxdy . \tag{9}$$

Подставляя значения коэффициентов (9) в (8), получаем решение исходной задачи в аналитической форме.

Список использованных источников

1. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. - М.: Едиториал УРСС, 2003. – 416 с.
2. *Краснопевцев Е.А.* Математические методы физики. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. - 243 с.
3. *Yesbayev A.N., Yessenbayeva G.A., Ivanov I.A.* On the boundary value problem for the vibration and wave processes in two-dimensional environs /Вестник Карагандинского университета. Серия Математика, 2016. - №3(83).

Репозиторий КарГУ