ӘОЖ 34С27

Ж.А.Сартабанов[1], З.Ж.Алеуова[2], А.Б.Арыстанова[2]

[1]*Ақтөбе мемлекеттік педагогикалық институты;*
[2]*М.Өтемісов атындағы Батыс Қазақстан мемлекеттік университеті, Орал (E-mail: zaleuova@mail.ru)*

Сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйелерінің псевдопериодты шешімдерінің орнықтылығы

Дифференциалдық теңдеулердің псевдопериодты шешімін орнықтылыққа зерттеу мәселесі жай дифференциалдық теңдеулердің квазипериодты шешімін орнықтылыққа зерттеумен байланысты. Мақалада М.Урабе ұсынған псевдопериодты функциялар әдісі қолданылды. Бұл әдістің негізінде Г.Бордың периодты көп айнымалы функциялар мен квазипериодты бір айнымалы функциялардың арасындағы байланыс туралы теорема жатқанын айта кету керек. Сондай-ақ коэффициенті бар параметр бойынша периодты сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесінің псевдопериодты шешімдерінің орнықты болуының жеткілікті шарттары алынған.

Кілтті сөздер: псевдопериодты функция, дифференциалдық теңдеулер жүйесі, шешімнің орнықтылығы, орнықтылық шарттары, шешімнің бар болуы, параметр, матрица, периодты шешім, псевдопериодты шешім, сызықты теңдеулер.

Дифференциалдық теңдеулердің сан осінде немесе шектеусіз сәуле бойында анықталған шешімдерін зерттеуде олардың бастапқы нүктелерінің жақындығына байланысты кейінгі нүктелерде де алшақ кетпейтінін, тіпті бара-бара жақындай түсетінін сипаттайтын қаситеттерін анықтау техникада, демек өмірде маңызды орын алады. Шешімдердің мұндай қасиеттері олардың орнықтылық қасиеті деп аталады. Псевдопериодты тербелістер негізінде өлшемдес емес периодты тербелістердің қосындысы жатқанын ескерген жөн. Амплитудасы шектеулі ұзақ мерзімді көпжиілікті тербелістердің бірі псевдопериодты функциялармен беріледі. Мақалада осындай сызықты тербелістердің орнықтылық қасиеттерін зерттеудің математикалық тәсілдерінің бірі — псевдопериодты функциялар әдісімен алынған нәтижелер келтірілген.

Тербелісті құбылыстарды сипаттайтын

$$\frac{dx}{d\tau}=P(\alpha)x+f(\tau,e\tau+\alpha,\alpha) \tag{1}$$

дифференциалдық теңдеулер жүйесін қарастырайық, мұндағы $\tau\in R=(-\infty;+\infty)$, $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_m)-m$ — вектор-параметр; $l=(1,...,1)$ — бірлік вектор; $P(\alpha)-n\times n$ — матрица; $f(\tau,t,\alpha)-n$ — вектор-функция. Жүйенің $P(\alpha)$ матрицасы төмендегі шарттарды қанағаттандырсын.

1^0. Коэффициенттік $P(\alpha)$ матрицасы $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_m)\in R\times...\times R=R^m$, $R=(-\infty,+\infty)$, параметрі бойынша $\omega=(\omega_1,...,\omega_m)$ периодты және үзіліссіз болсын. Демек,

$$P(\alpha+k\omega)=P(\alpha)\in C(R^m),\ k=(k_1,...,k_m)\in Z\times...\times Z=Z^m$$

периодтылық және үзіліссіздік шарты орындалсын, мұнда $k\omega=(k_1\omega_1,...,k_m\omega_m)$; Z — бүтін сандар жиыны; $(\omega_1,...,\omega_m)$ — вектор-период.

2^0. Характеристикалық

$$h(\lambda,\alpha)\equiv\det\left[P(\alpha)-\lambda E\right]=0$$

теңдеуінің $\lambda=\lambda_j(\alpha+k\omega)$ түбірлерінің n_j еселігі $\alpha\in R^m$ параметрінен және $k\in Z^m$ сандық векторынан тәуелсіз болсын, $1\le j\le\rho$, ρ — әр түрлі түбірлер саны,

$$\sum_{j=1}^{\rho}n_j=n,$$

мұндағы $E-\ n\times n$ — өлшемді бірлік матрица.

3^0. Мына

$$H_j(\alpha)\equiv P(\alpha)-\lambda_j(\alpha)E,\ 1\le j\le\rho$$

матрицасының r_j, $j=\overline{1,\rho}$ рангісі $\alpha\in R^m$ параметрінен тәуелсіз болсын.

Репозиторий КарГУ

Берілген жүйедегі $f\left(\tau, e\tau+\alpha, \alpha\right) - n$ — вектор-функциясы кез келген $k \in Z^m$ үшін

$$f\left(\tau+\theta, e\tau+\alpha+k\omega, \alpha+k\omega\right) = f\left(\tau, e\tau+\alpha, \alpha\right) \in C\left(R \times R^m \times R^m\right) \quad (2)$$

қасиеттерді қанағаттандырсын, $k\omega = \left(k_1\omega_1, ..., k_m\omega_m\right)$, $\omega_0 = \theta, \omega = \left(\omega_1, ..., \omega_m\right)$ — өлшемдес емес компонентті вектор-период, $x = (x_1, ..., x_n)$ — жүйедегі белгісіз вектор-функция.

$F(\tau, e\tau+\alpha, \alpha)$ функциясы $(\tau, e\tau+\alpha, \alpha) = (\tau, t, \alpha)$ айнымалылары бойынша (θ, ω, ω)-периодты болса, онда оны псевдопериодты функция деп атаймыз, ал $\alpha = 0$ болғанда жиілік базисі $(\nu_0, \nu) = (\nu_0, \nu_1, ..., \nu_m)$, $\nu_0 = \theta^{-1}$, $\nu_j = \omega_j^{-1}$, $j = \overline{1, m}$, болатын квазипериодты функцияға айналады [1].

Қарастырып отырған (1) жүйенің псевдопериодты шешімдер мәселесі [2] мақалада қарастырылған. Басты мақсатымыз [3] және [4] еңбектер негізінде осы шешімдердің орнықтылығын зерттеу болып табылады.

Әуелі біртекті сызықты

$$\frac{dx}{d\tau} = P\left(\alpha\right)x \quad (3)$$

дифференциалдық жүйені қарастырайық.

Егер $X(\tau, \alpha)$ (3) жүйенің матриканты болса, онда оның $x(0, \alpha) = u(\alpha)$ бастапқы шартын қанағаттандыратын шешімі

$$x(\tau, \alpha) = X\left(\tau, \alpha\right)u(\alpha)$$

түрінде өрнектеледі, мұндағы $X\left(0, \alpha\right) = E$ — бірлік матрица. Осы $X\left(\tau, \alpha\right)$ матрицанты

$$\left|X\left(\tau - s, \alpha\right)\right| \leq \Gamma e^{-\gamma(\tau - s)}, \tau \geq s, \quad (4)$$

бағамдауды қанағаттандырсын, мұндағы $\Gamma \geq 1$, $\gamma > 0$ — тұрақтылар.

$P(\alpha)$ матрицасының $\lambda_j(\alpha)$, $j = \overline{1, \rho}$ өзіндік мәндерінің нақты бөлігі үшін

$$\mathrm{Re}\lambda_j(\alpha) < 0, \ j = \overline{1, \rho} \quad (5)$$

шарты орындалсын делік.

Енді (1) және (3)-жүйелердің псевдопериодты шешімдері туралы нәтижелерді келтірейік [5].

Теорема 1. *Егер $1^0 - 3^0$ шарттар және (5) шарт орындалса, онда, (3) біртекті сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесінің нөлдік шешімінен басқа, (θ, ω, ω)-псевдопериодты шешімдері болмайды.*

Теорема 2. *Егер $1^0 - 3^0$, (2), (5) шарттар орындалса, онда (1) біртексіз сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесінің (θ, ω, ω)-псевдопериодты шешімі бар және ол жалғыз.*

Енді осы (1) жүйенің псевдопериодты шешімін орнықтылыққа зерттелік. Мақалада шешімдердің орнықтылығының негізгі ұғымдары [3] әдебиетке сәйкес екенін ескеруіміз керек.

Анықтама 1. Егер (1), (3)-жүйелердің барлық шешімі $\tau \to +\infty$ ұмтылғанда орнықты (асимптотикалық орнықты) болса, онда (1), (3) жүйелер де орнықты (асимптотикалық орнықты) деп аталады.

Теорема 3. *Егер $1^0 - 3^0$ шарттар және (5) шарт орындалсын. Онда (3) біртекті сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесінің нөлдік шешімі $\alpha \in R^m$ параметрі бойынша бірқалыпты асимптотикалық орнықты болады.*

Теорема 4. *Егер $1^0 - 3^0$, (2), (5) шарттар орындалса, онда (1) сызықты біртекті емес дифференциалдық жүйенің псевдопериодты шешімі орнықты болуы үшін (3) біртекті дифференциалдық жүйенің тривиалды шешімінің $\alpha \in R^m$ параметрі бойынша бірқалыпты орнықты болуы қажетті және жеткілікті.*

Теорема 5. *Егер $1^0 - 3^0$, (2), (5) шарттар орындалса, онда (1) жүйенің псевдопериодты шешімі асимптотикалық орнықты болуы үшін біртекті (3) дифференциалдық жүйенің тривиалды шешімінің $\tau \to +\infty$ ұмтылғанда α бойынша бірқалыпты асимтотикалық орнықты болуы қажетті және жеткілікті.*

Теоремаларды дәлелдеуде (4), (5) шарттар қолданылады. Шешімнің асимптотикалық орнықтылығы (5) шарттан шығады.

Репозиторий КарГУ

Мақаланың қорытындысы ретінде α параметріне нөлдік мән берсек, онда (1) жүйе әдеттегі жай дифференциалдық теңдеулер жүйесіне айналып, оның псевдопериодты шешімдері квазипериодты болатындығына назар аударамыз. Ал, квазипериодты жүйеден Г.Бор теоремасына сәйкес псевдопериодты жүйеге көшуге болатынын ескерген жөн.

Әдебиеттер тізімі

1 *Юраб М.* Функции псевдопериодических дифференциальных уравнений // Математика. — 1971. — С. 106–122.

2 *Сартабанов Ж.А., Алеуова З.Ж.* Псевдопериодические решения систем с матрицами, зависящими от параметра // Математический журнал МОиН РК. — Т. 10. — Алматы, 2010. — № 3 (37). — С. 11–16.

3 *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

4 *Мухамбетова А.А., Сартабанов Ж.А.* Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений с многомерным временем. — Актобе, 2007. — С. 168.

5 *Алеуова З.Ж.* Дифференциалдық теңдеулер жүйесінің псевдопериодты шешімдері: Канд. дис. автореф. — Астана, 2010. — 20 б.

Ж.А.Сартабанов, З.Ж.Алеуова, А.Б.Арыстанова

Устойчивость псевдопериодических решений линейных систем дифференциальных уравнений

Исследование устойчивости псевдопериодических решений дифференциальных уравнений связано с исследованием устойчивости квазипериодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений. В статье использован метод псевдопериодических функций, предложенный японским математиком М.Урабе. Необходимо сказать, что этот метод основывается на известной теореме Г.Бора о связи квазипериодических функций одной переменной с периодическими функциями от многих переменных. В работе получены достаточные условия устойчивости псевдопериодических решений систем дифференциальных уравнений с коэффициентами, периодическими по параметру.

Zh.A.Sartabanov, Z.Zh.Aleuova, A.B.Arystanova

Sustainability of pseudoperiodic decisions of linear systems of differential equations

The problem of investigation of stability of pseudoperiodical decisions differential equations connected with the study of the stability of the quasiperiodical decisions of ordinary differential equations. In the paper, we use the method of the pseudoperiodical functions proposed by Japanese mathematician M.Urabe.. It's necessary to say that method is based on a theorem of Bohr about connection between the quasiperiodical functions of one variable with periodic functions of a few variables. In the article sufficient conditions of sustainability of pseudoperiodic decisions of system of differential equations with periodic coefficients for the parameter are obtained.

References

1 Yurabe M. *Green functions of pseudoperiodic differential operators* // Lect. Notes. Math., 1971, p. 106–122.

2 Sartabanov Zh., Aleuova Zh. *Pseudoperiodic decisions of the system with array, depended from parameter* // Mathematical Journal. MES RK, Almaty, 2010, vol. 10, № 3 (37), p. 11–16.

3 Demidovich B. *Lectures on mathematical theory of sustainability,* Moscow: Science, 1967, p. 472.

4 Mukhambetova A., Sartabanov Zh. *Sustainability of the systems' decisions of differential quotations with multi-measured time*. — Aktobe, 2007, p. 168.

5 Aleuova Zh. *Pseudoperiodic decisions of the systems of differential quotations:* Summary of thesis, Astana, 2010, p. 20.

Репозиторий КарГУ