МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

Г.Акишев[1], С.Битимхан[2]

[1]*Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова;*
[2]*Карагандинский экономический университет Казпотребсоюза*
(E-mail: bsamat10@mail.ru)

Условия принадлежности тригонометрических рядов с положительными коэффициентами к весовым пространствам

В статье получено необходимое и достаточное условие принадлежности синус-рядов с положительными коэффициентами к весовым пространствам. Доказаны необходимые условия принадлежности тригонометрических рядов к весовым пространствам. Получено обобщение теоремы Хард-Литтлвуда о тригонометрических рядах с монотонными коэффициентами для класса числовых последовательностей RBSVS.

Ключевые слова: ряды, коэффициенты рядов, функций, ряды Фурье, весовые пространства, числовая последовательность, класс последовательностей, сходимость.

Пусть $W(x)$ — неотрицательная 2π -периодическая функция на $(0,\pi)$.

Через $L_{p,W}(0,\pi)$ обозначим пространство всех измеримых по Лебегу 2π -периодических функций *f*, для которых

$$\|f\|_{p,W}=\left(\int_0^\pi |f(x)|^p W(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}<+\infty, 1\le p<+\infty.$$

Будем считать, что функция $W(x)$ удовлетворяет A_p -условию [1] $(W\in A_p)$, если

$$\sup_{I\subset(0,\pi)}\left[\frac{1}{|I|}\int_I W(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\frac{1}{|I|}\int_I \left(W(x)\right)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right]^{\frac{1}{p'}}<+\infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

Множество всех числовых последовательностей $\{a_n\}$ таких, что $a_n\downarrow 0, n\to+\infty,$ обозначается через MS. Положительная числовая последовательность $\{a_n\}$ называется квазимонотонной, если $\exists\,\tau>0$ такое, что $\frac{a_n}{n^\tau}\downarrow 0, n\to+\infty.$ Множество квазимонотонных последовательностей обозначается через $QMDS$ [2].

B.Szal [2] определил класс числовых последовательностей $RBSVS$ (rest bounded second variation sequence).

Определение. Нулевая последовательность неотрицательных чисел $\{c_n\}\in RBSVS,$ если $\exists K>0$

$$\sum_{m=n}^{\infty}\left|c_m-c_{m+2}\right|\le K\cdot c_n$$

для любых натуральных *n*.

Известно, что $MS\subset QMDS, MS\subset RBSVS$ и $QMDS\ne RBSVS$ [2].

В теории одномерных тригонометрических рядов важное значение имеет теорема Харди-Литтлвуда о рядах с монотонными коэффициентами.

Репозиторий КарГУ

Теорема. Пусть $a_n \downarrow 0, n \to +\infty.$ Для того чтобы тригонометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

был рядом Фурье некоторой функции $f \in L_p, 1 < p < +\infty,$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2} < +\infty.$$

Аналог теоремы Харди-Литтлвуда для функций из пространства $L_{p,W}$ (в случае $W(x) = |\sin x|^{\alpha}, -1 < \alpha < p-1),$ коэффициенты Фурье которых квазимонотонны, доказали Р. Аскей и С. Вейнгер [3]. Т.М. Вуколова [4] обобщила теорему Харди-Литтлвуда для рядов с кратно-монотонными коэффициентами. Результаты Т.М.Вуколовой нами обобщены на степенные [5] и общие весовые пространства [6]. А в работе [2] B. Szal получил аналог теоремы Харди-Литтлвуда для рядов с коэффициентами из класса $RBSVS$.

Нами получено обобщение результата B.Szal для общих весовых пространств.

В дальнейшем через C будем обозначать положительные постоянные, вообще говоря, различные в разных формулах. А запись $A(\varphi) \succ\prec B(\varphi)$ означает, что существуют положительные постоянные c_1, c_2 такие, что $c_1 A(\varphi) \le B(\varphi) \le c_2 A(\varphi).$

Теперь приведем полученные нами результаты.

Теорема 1. Пусть $W(x) \in A_p, 1 < p < +\infty,$ и $\lambda_n \ge 0$ и λ_n являются синус-коэффициентами Фурье функции $\varphi.$

1) Условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \right)^p \cdot \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} W(x)dx < +\infty \tag{*}$$

необходимо для того, чтобы $\varphi \in L_{p,W}.$

2) Если $W(xy) \le W(x)W(y), \forall x, y \in (0, \pi)$ условие (*) достаточно для того, чтобы $\varphi \in L_{p,W}.$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varphi \in L_{p,W}$ и

$$\varphi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot \sin nx.$$

Известно, что $\dfrac{\sin x}{x} \ge \dfrac{2}{\pi}, x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right].$ Получим

$$\int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \varphi(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot \sin kx dx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cdot \left(-\frac{\cos kx}{k} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{n+1}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi k}{n+1} \right) \cdot \frac{\lambda_k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \sin^2 \frac{\pi k}{2(n+1)} \cdot \frac{\lambda_k}{k} = C \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi k}{2(n+1)}}{\frac{\pi k}{2(n+1)}} \right)^2 \cdot \frac{k \lambda_k}{(n+1)^2} \ge$$

$$\ge C \sum_{k=1}^{n} \frac{k \lambda_k}{(n+1)^2} = \frac{C}{n+1} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k \lambda_k \right) \ge \frac{C}{n+1} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k.$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \right)^p \cdot \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} W(x)dx \le C \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+1) \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \varphi(t)dt \right)^p \cdot \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} W(x)dx \le$$

Репозиторий КарГУ

$$\leq C\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}\left(\frac{1}{x}\int_{0}^{x}|\varphi(t)|\,dt\right)^{p}W(x)dx=C\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1}{x}\int_{0}^{x}|\varphi(t)|\,dt\right)^{p}W(x)dx\leq$$

$$\leq C\int_{0}^{\pi}|\varphi(x)|^{p}\,W(x)dx<+\infty,\,W\in A_{p}.$$

Достаточность. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_{k}\right)^{p}\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(x)dx<+\infty. \tag{1}$$

Для любого натурального N получим

$$\left(\int_{0}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{N}\lambda_{k}\cdot\sin kt\right|^{p}W(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\int_{0}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{1/t}\lambda_{k}\cdot\sin kt\right|^{p}W(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{0}^{\pi}\left|\sum_{k=1/t}^{N}\lambda_{k}\cdot\sin kt\right|^{p}W(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

Каждое слагаемое правой части неравенства (2) оценим по отдельности:

$$\int_{0}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{1/t}\lambda_{k}\cdot\sin kt\right|^{p}W(t)dt\leq\int_{0}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{1/t}\lambda_{k}\cdot kt\right|^{p}W(t)dt=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}\left|\sum_{k=1}^{1/t}\lambda_{k}\cdot k\right|^{p}t^{p}W(t)dt\leq C\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k}\cdot k\right)^{p}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(t)dt\leq$$

$$\leq C\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_{k}\right)^{p}\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(t)dt. \tag{3}$$

Для второго слагаемого получим

$$\int_{0}^{\pi}\left|\sum_{k=1/t}^{N}\lambda_{k}\cdot\sin kt\right|^{p}W(t)dt\leq\int_{0}^{\pi}\left(\sum_{k=1/t}^{N}|\lambda_{k}|\right)^{p}W(t)dt\leq\int_{0}^{\pi}\left(\sum_{k=1/t}^{\infty}\lambda_{k}\right)^{p}W(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}\left(\sum_{k=1/t}^{\infty}\lambda_{k}\right)^{p}W(t)dt\leq$$

$$\leq C\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=\frac{n}{\pi}}^{\infty}\lambda_{k}\right)^{p}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(t)dt=\left[\frac{n}{\pi}=m,\,n=m\pi\right]=$$

$$=C\sum_{m=\frac{1}{\pi}}^{\infty}\left(\sum_{k=m}^{\infty}\lambda_{k}\right)^{p}\int_{\frac{\pi}{\pi m+1}}^{\frac{1}{m}}W(t)dt=\begin{bmatrix}x=\pi t\Rightarrow t=\dfrac{x}{\pi}\\ \dfrac{\pi}{n+1}\leq x\leq\dfrac{\pi}{n}\end{bmatrix}\leq C\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_{k}\right)^{p}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W\left(\frac{x}{\pi}\right)\frac{dx}{\pi}\leq$$

$$\leq C\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_{k}\right)^{p}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W\left(t\right)dt. \tag{4}$$

Теперь в силу (3) и (4) из (2) имеем

$$\left(\int_{0}^{\pi}\left|\sum_{k=1}^{N}\lambda_{k}\cdot\sin kt\right|^{p}W(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}\leq C\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_{k}\right)^{p}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W\left(t\right)dt\right)^{\frac{1}{p}},\,\forall N.$$

Из произвольности N и условия (1) получим, что $\varphi\in L_{p,W}$.

Репозиторий КарГУ

Замечание 1. В случае $W(t)=t^{-\gamma p}$ из теоремы 1 следует теорема 7 работы [7].

Теорема 2. Пусть $W(x)\in A_p$, $1<p<+\infty$. Если $\lambda_n\ge 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\cos nx\sim\varphi(x)\in L_{p,W}$, то сходится следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^p\left(\sum_{k=n}^{\infty}k^{-1}\lambda_k\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $W(x)\in A_p$, $1<p<+\infty$ и $\varphi(x)\in L_{p,W}$. Положим

$$f(x)=\int_0^x\varphi(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\lambda_n\sin nx.$$

Если $\varphi(x)\in L_{p,W}$, то по неравенству Харди [1]

$$\int_0^{\pi}|\varphi(x)|^pW(x)dx\ge\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x}\int_0^x|\varphi(t)|dt\right)^pW(x)dx\ge$$

$$\ge\int_0^{\pi}\left|\frac{1}{x}\int_0^x\varphi(t)dt\right|^pW(x)dx=\int_0^{\pi}|f(x)|^p\frac{W(x)}{x^p}dx,$$

т.е. $f(x)\in L_{p,\frac{W(x)}{x^p}}$. Если $W(x)\in A_p$, $1<p<+\infty$, то получим

$$\left[\frac{1}{|I|}\int_I\frac{W(x)}{x^p}dx\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\frac{1}{|I|}\int_I\left(\frac{W(x)}{x^p}\right)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right]^{\frac{1}{p'}}=\left[\frac{1}{|I|}\int_I\frac{W(x)}{x^p}dx\right]^{\frac{1}{p}}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{|I|}\int_I\left(W(x)\right)^{-\frac{1}{p-1}}x^{\frac{p}{p-1}}dx\right]^{\frac{1}{p'}}\le C\left[\frac{1}{|I|}\int_I W(x)dx\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\frac{1}{|I|}\int_I\left(W(x)\right)^{-\frac{1}{p-1}}dx\right]^{\frac{1}{p'}},\ \forall I\in(0,\pi).$$

Поэтому $\frac{W(x)}{x^p}\in A_p, 1<p<+\infty$. Тогда, пользуясь теоремой 1, получим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}k^{-1}\lambda_k\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}\frac{W(x)}{x^p}dx<+\infty.$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^p\left(\sum_{k=n}^{\infty}k^{-1}\lambda_k\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(x)dx<+\infty.$$

Замечание 2. В случае $W(t)=t^{-\gamma p}$ из теоремы 2 следует теорема 8 работы [7].

Теорема 3. Пусть $W(x)\in A_p$, $1<p<+\infty$, и $W(xy)\le W(x)W(y)$, $\forall x,y\in(0,\pi)$. Если $f(x)\in L$, $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\cos nx$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sum_{k=n}^{\infty}\left|\lambda_k-\lambda_{k+2}\right|\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(x)dx<+\infty,$$

то $f(x)\in L_{p,W}$.

Репозиторий КарГУ

Доказательство. Пусть $f(x) \in L,\ f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos nx,$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sum_{k=n}^{\infty} \left| \lambda_k - \lambda_{k+2} \right| \right)^p \cdot \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} W(x)dx < +\infty.$$

Нетрудно убедиться, что

$$2f(x) \cdot \sin x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n - \lambda_{n+2} \right) \sin(n+1)x.$$

Простыми вычислениями получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sum_{k=n}^{\infty} \left| \lambda_k - \lambda_{k+2} \right| \right)^p \cdot \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} W(x)dx = \pi^p \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left| \lambda_k - \lambda_{k+2} \right| \right)^p \cdot \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{W(x)}{\left(\frac{\pi}{n} \right)^p} dx \geq$$

$$\geq C \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left| \lambda_k - \lambda_{k+2} \right| \right)^p \cdot \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{W(x)}{x^p} dx \geq \left[2\sin x \geq x,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right] \right] \geq$$

$$\geq C \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left| \lambda_k - \lambda_{k+2} \right| \right)^p \cdot \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{W(x)}{(2\sin x)^p} dx.$$

Отсюда получим сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left| \lambda_k - \lambda_{k+2} \right| \right)^p \cdot \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} \frac{W(x)}{(2\sin x)^p} dx.$$

Тогда по теореме 1 это означает, что $2f(x)\sin x \in L_{p, \frac{W(x)}{(2\sin x)^p}}$, т.е. $f(x) \in L_{p,W}$.

Замечание 3. В случае $W(t) = t^{-\gamma p}$ из теоремы 3 следует теорема 9 работы [7].

Теорема 4. Пусть функция $f \in L_1(0,\pi)$ имеет ряд Фурье $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(f) \cos nx,$ где $\left\{ \lambda_n(f) \right\} \in RBSVS.$ Если $W(x) \in A_p,\ 1 < p < +\infty,$ и $W(xy) \leq W(x)W(y),\ \forall x, y \in (0,\pi),$ то $f \in L_{p,W}(0,\pi)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n\lambda_n(f) \right)^p \cdot \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} W(x)dx < +\infty.$$

При этом имеет место соотношение

$$\|f\|_{p,W} \succ\prec C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(n\lambda_n(f) \right)^p \cdot \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} W(x)dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство. Достаточность. По теореме 3, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sum_{k=n}^{\infty} \left| \lambda_k(f) - \lambda_{k+2}(f) \right| \right)^p \cdot \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} W(x)dx < +\infty,$$

то $f(x) \in L_{p,W}$. Так как $\left\{ \lambda_n(f) \right\} \in RBSVS,$ то

Репозиторий КарГУ

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left|\lambda_k(f)-\lambda_{k+2}(f)\right|\le C\cdot\lambda_n .$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\lambda_n(f)\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(x)dx\ge C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sum_{k=n}^{\infty}\left|\lambda_k(f)-\lambda_{k+2}(f)\right|\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(x)dx.$$

Следовательно, $f(x)\in L_{p,W}$.

Необходимость. Пусть $f(x)\in L_{p,W}$. Если $\{\lambda_n(f)\}\in RBSVS$, то

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda_k(f)}{k}\ge C\cdot\left(\lambda_{2n}(f)+\lambda_{2n+1}(f)\right). \tag{5}$$

Тогда по теореме 2, в силу (5), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sum_{k=n}^{\infty}k^{-1}\lambda_k(f)\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(x)dx\ge C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\left(\lambda_{2n}(f)+\lambda_{2n+1}(f)\right)\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(x)dx.$$

Теперь в интеграле сделаем замену переменного $x=2t$. Тогда $\frac{\pi}{2n}\le t\le\frac{\pi}{2n+2}$. Применяя неравенство $\left(a+b\right)^p\ge a^p+b^p, a>0, b>0, p>1,$ из последнего неравенства получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sum_{k=n}^{\infty}k^{-1}\lambda_k(f)\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(x)dx\ge$$

$$\ge C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\lambda_{2n}(f)\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{2n+2}}^{\frac{\pi}{2n}}W(2t)dt+C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\lambda_{2n+1}(f)\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{2n+2}}^{\frac{\pi}{2n}}W(2t)dt\ge$$

$$\ge C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n\lambda_{2n}(f)\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{2n+2}}^{\frac{\pi}{2n}}W(2t)dt+C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left((2n+1)\lambda_{2n+1}(f)\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{2n+2}}^{\frac{\pi}{2n}}W(2t)dt.$$

Воспользовавшись неравенствами $\frac{\pi}{2n+2}<\frac{\pi}{2n+1},\frac{\pi}{2n+1}<\frac{\pi}{2n}$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sum_{k=n}^{\infty}k^{-1}\lambda_k(f)\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(x)dx\ge$$

$$\ge C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n\lambda_{2n}(f)\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\frac{\pi}{2n}}W(2t)dt+C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left((2n+1)\lambda_{2n+1}(f)\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{2n+2}}^{\frac{\pi}{2n+1}}W(2t)dt.$$

Так как функция $W(t)$ удовлетворяет условию $W(xy)\le W(x)W(y), \forall x,y\in(0,\pi),$ то получим $W(2t)\ge\frac{W(t)}{W\left(\frac{1}{2}\right)}$. Поэтому имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\sum_{k=n}^{\infty}k^{-1}\lambda_k(f)\right)^p\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(x)dx\ge$$

Репозиторий КарГУ

$$\geq C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n\lambda_{2n}(f)\right)^{p}\cdot\int_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\frac{\pi}{2n}}W(t)dt+C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left((2n+1)\lambda_{2n+1}(f)\right)^{p}\cdot\int_{\frac{\pi}{2n+2}}^{\frac{\pi}{2n+1}}W(t)dt=$$

$$=C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\lambda_{n}(f)\right)^{p}\cdot\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}W(x)dx.$$

Теорема доказана.

Замечание 4. В случае $W(t)=1$ из теоремы 4 следует лемма 6 работы [2].

Замечание 5. Теоремы 2–4 анонсированы в работе [8].

Список литературы

1 *Muckenhoupt B.* Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // Trans. American Math. Soc. — 1972. — Vol. 162. — P. 207–226.

2 *Szal B.* Generalization of a theorem on Besov-Nikol'skii classes // Acta Math. Hungar. — 2009. — № 125 (1–2). — P. 161–181.

3 *Askey R., Wainger S.* Integrability theorems for Fourier series // Duke Math. J. — 1966. — Vol. 3. — № 1. — P. 223–228.

4 *Вуколова Т.М.* Некоторые свойства тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // Вестн. Москов. ун-та. — Сер. мат.-мех. — 1984. — № 6. — С. 18–23.

5 *Волкова Е., Акишев Г.А.* О коэффициентах Фурье и теоремы вложения в пространствах с весом // Рукопись депон. в КазНИИНТИ. — 1990. — № 3097. — 19 с.

6 *Битимханулы С.* Интегральное свойство суммы тригонометрического ряда с кратно-монотонными коэффициентами // Естественные науки: Сб. науч. ст. аспирантов КарГУ. — Караганда: Изд-во КарГУ, 1998. — С. 3–9.

7 *Boas R.P.* Jr Fourier Series with Positive Coefficients // Journal of mathematical analysis and applications. — 1967. — № 17. — P. 463–483.

8 *Акишев Г.А., Битимхан С.* Теорема Харди-Литтлвуда для рядов Фурье с коэффициентами из класса RBSVS // Междунар. конф. «Теоретические и прикладные проблемы математики, механики и информатики». — Караганда, 2014. — С. 4–5.

Ғ.Ақышев, С.Бітімхан

Оң коэффициентті тригонометриялық қатарлардың салмақты кеңістікте жату шарттары

Мақалада оң коэффициентті синус-қатарлардың салмақты кеңістікке тиісті болуының қажетті және жеткілікті шарты алынды. Сондай-ақ тригонометриялық қатарлардың салмақты кеңістікке тиісті болуының қажетті шарттары дәлелденді. Монотонды коэффициентті тригонометриялық қатарлар туралы Харди-Литтлвуд теоремасының RBSVS сандық тізбектер класы үшін жалпыламасы алынды.

G.Akishev, S.Bitimkhan

Conditions for membership of trigonometric series with positive coefficients to the weighted space

A necessary and sufficient condition for a sine series with positive coefficients in weighted spaces was obtained. The necessary conditions for membership trigonometric series in weighted spaces were proved. A generalization of Hardy-Littlewood theorem for trigonometric series with monotone coefficients for the class of numerical sequences RBSVS was obtained.

References

1 Muckenhoupt B. *Trans. American Math. Soc.*, 1972, 162, p. 207–226.

2 Szal B. *Acta Math. Hungar.*, 2009, 125 (1–2), p. 161–181.

3 Askey R., Wainger S. *Duke Math. J.*, 1966, 3, 1, p. 223–228.

Репозиторий КарГУ

4 Vukolova T.M. *Bull. Moscow un-ta, ser.* matematika, mekhanika, 1984, 6, p. 18–23.

5 Volkova Ye., Akishev G.A. *The manuscript is deposited in KazNIINTI*, 1990, 3097, 19 p.

6 Bitimkhanuly S. *Natural sciences: collection of scientific articles postgraduates*, Karaganda State University, Karaganda: Publ. KSU, 1998, p. 3–9.

7 Boas R.P. *Journal of mathematical analysis and applications*, 1967, 17, p. 463–483.

8 Akishev G.A., Bitimkhan S. *International Conference «Theoretical and applied problems of mathematics, mechanics and computer science»*, Karaganda, 2014, p. 4, 5.

УДК 517.968

А.Х.Аттаев[1], С.А.Искаков[2], Г.Ж.Каршыгина[2], М.И.Рамазанов[2]

[1]*Кабардино-Балкарский научный центр РАН, Нальчик, Россия;*
[2]*Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова*
(E-mail: isagyndyk@mail.ru)

Первая краевая задача для уравнения теплопроводности с нагрузкой дробного порядка I

В статье рассмотрена первая краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности в четверти плоскости. Нагруженное слагаемое — след производной дробного порядка на многообразии $x = t$. Решение задачи сводится к исследованию особого интегрального уравнения Вольтерра второго рода с несжимаемым ядром. Решение характеристического уравнения методом регуляризации показало, что особое интегральное уравнение Вольтерра имеет непустой спектр при $1/2 \le \beta < 1$. Доказана теорема о существовании нетривиального решения однородной краевой задачи в неограниченной области.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, дробная производная, особое интегральное уравнение Вольтерра, нетривиальное решение.

В работе [1] отмечено, что за последние 35 лет появилось значительное число публикаций, проблемно-ориентированных на нагруженные уравнения, и об этом свидетельствует, например, то, что на запрос о нагруженных уравнениях на поисковом российском сервере «Яндекс» нашлось 163 тысячи ответов, на поисковом международном сервере «Yahoo» — 699 тысяч ответов. Значительную роль в развитии теории нагруженных уравнений играет и то, что они могут выступать как один из способов введения обобщенных решений широких классов уравнений в частных производных и как эффективный метод поиска приближенных решений краевых задач для дифференциальных уравнений. Там же показано, что базовые уравнения линейных математических моделей многих процессов на фрактальных структурах являются нагруженными дифференциальными уравнениями дробного порядка.

Дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка — обобщения уравнений с частными производными целочисленного порядка имеют большое практическое значение, например, такие уравнения являются математическими моделями различных процессов и явлений в средах с фрактальной структурой. При описании процессов в системах, для которых необходимо учитывать нелокальные свойства по времени и пространству, необходим аппарат дробного интегро-дифференцирования [2]. При этом существенно то, что в рамках математического аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка удается не только более глубоко осознать известные данные, но и получить принципиально новые результаты.

В монографии [3] нагруженные дифференциальные уравнения интерпретируются как слабые или сильные возмущения дифференциальных уравнений. В [4–7] показано, что если в дифференциальном уравнении параболического типа нагруженное слагаемое — значение искомой функции или ее производных первого порядка на многообразии $x = t$, то соответствующие краевые задачи являются корректными в естественных классах функций, т.е. нагруженное слагаемое — *слабое* возмущение. Если же нагруженным слагаемым является значение производной второго порядка искомой

Репозиторий КарГУ