УДК 539.3(043.3)

Приближенное уравнение продольного колебания трехслойной пластинки переменной толщины

Drawn near equation of the longitudal fluctuation threelayered plates of the variable thickness

Сейтмуратов А.Ж.

Кызылординский государственный университет им. Коркыт Ата

Мақалада қалыңдығы тұрақсыз үш қатпарлы пластинаның жуық шамадағы тербелісінің көлбеу теңдеуін, белгілі бір шарттарды қоя отырып, анықтау мәселесі қарастырылған. Осы есептің шамасына қарай үш шеткері шарттар негізінде әр түрлі типті үш өлшемді дененің бетінде шектеулі шарттар қойылған.

Obtain the frequency equation of natural vibrations of the plate layer are the main elements of the seismic stability of building structures. The problem is solved by the method of obtaining the approximate frequency equations based on the decomposition method.

Материалы, используемые в строительных конструкциях, обладают упругими и вязкоупругими свойствами, анизотропными, многослойными и другими механическими характеристиками.

Плоские элементы являются составляющими многих конструкций. Построение общих и приближенных уравнений колебания различного вида плоских элементов представляет актуальную проблему в разработке теоретических основ расчета строительных конструкций и строительства в целом. К ним относятся задачи совершенствования моделей нестационарного характера конструкций и их элементов, материалы которых проявляют сложные механические, реологические свойства, присущие различным строительным конструкциям, при влиянии различных внешних факторов [1, 2].

Пусть имеется трехслойная безграничная в плане пластинка из вязкоупругого материала, причем срединная составляющая толщиной $2h_0$, а верхняя и нижняя составляющие толщиной $\left(h_1 - h_0\right)$ и состоят из одного и того же материала. [3, 4]

Такую трехслойную пластинку будем считать слоистой средой той же структуры, при этом параметры материала среднего слоя обозначим индексом «0», а параметры верхнего и нижнего слоя — индексом «1».

Зависимости между σ и ε в слоях примем в виде больцмановских интегральных соотношений

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij}^{(l)} = L_l\left(\varepsilon^{(l)}\right) + 2M_l\left(\varepsilon_{ij}^{(l)}\right); \\ &\sigma_{ij}^{(l)} = M_l\left(\varepsilon_{ij}^{(l)}\right); \qquad \left(i \neq j, \quad i, j = x, y, z\right), \end{aligned} \tag{1}$$

где операторы L_l и M_l равны

$$\begin{aligned} &L_l\left(\zeta\right) = \lambda_l\left[\zeta\left(t\right) - \int_0^{t_0} f_{1l}\left(t-\xi\right)\zeta\left(\xi\right)d\xi\right]; \\ &M_l\left(\zeta\right) = \mu_l\left[\zeta\left(t\right) - \int_0^{t_0} f_{2l}\left(t-\xi\right)\zeta\left(\xi\right)d\xi\right], \end{aligned} \tag{2}$$

$f_{kl}\left(t\right)$ – ядра вязкоупругих операторов; λ_l, μ_l – упругие постоянные.

Введем потенциалы $\Phi^{(l)}$ и $\vec{\Psi}^{(l)}$ продольных и поперечных волн:

$$\vec{U}^{(l)} = gead\Phi^{(l)} + rot\vec{\Psi}^{(l)}, \tag{3}$$

при этом векторный потенциал $\vec{\Psi}^{(l)}$ удовлетворяет условию слоеной дальности

$$div\vec{\Psi}^{(l)} = 0, \tag{4}$$

уравнения движения материала слоев принимают вид

$$
\begin{aligned}
&N_l\left(\Delta\Phi^{(l)}\right)=\rho_l\,\frac{\partial^2\Phi^{(l)}}{\partial t^2};\\
&M_l\left(\Delta\vec{\Psi}^{(l)}\right)=\rho_l\,\frac{\partial^2\vec{\Psi}^{(l)}}{\partial t^2};\\
&N_l=L_l+2M_l.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

При формулировке граничных условий будем предполагать, что в плоскости раздела неоднородности слои находятся в жестком контакте, а верхняя и нижняя поверхности плоские.

В общем случае трехслойной пластинки выкладки для вывода общих и приближенных уравнений ее колебания весьма громоздки, однако для такой пластинки имеет место как чисто продольное, так и чисто поперечное колебание.

Продольные колебания возникают в том случае, если функции внешних усилий удовлетворяют условиям

$$
f_z^+=f_z^-=f_z;\qquad f_{jz}^+=-f_{jz}^-=f_{jz}\left(j=x,y\right),
\tag{6}
$$

при этом искомые функции $U_1^{(0)},V_1^{(0)},W_1^{(0)}$ для внутреннего слоя обращаются в нуль, в силу симметрии колебания относительно оси z, т.е.

$$
U_1^{(0)}=V_1^{(0)}=W_1^{(0)}=0\,.
\tag{7}
$$

Для трех оставшихся искомых функций $U^{(0)},V^{(0)},W^{(0)}$ для внутреннего слоя имеем три граничных условия на верхней или нижней поверхности при $z=\pm h_1$.

Вместо искомых функций $U^{(0)},V^{(0)}$ удобно ввести потенциалы ϕ и ψ по формулам

$$
U^{(0)}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y};\qquad V^{(0)}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\,,
\tag{8}
$$

и для φ, $\psi, w^{(1)}$ получим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\rho_1\left(\Delta\varphi\right)+\rho_2\left(w^{(0)}\right)=M_1^{-1}f_z\left(x,y,z\right);\\
&\rho_3\left(\Delta\varphi\right)+\rho_4\left(w^{(0)}\right)=M_1^{-1}\left(\frac{\partial f_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial f_{yz}}{\partial y}\right);\\
&\rho_3\left(\Delta\varphi\right)=M_1^{-1}\left(\frac{\partial f_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial f_{yz}}{\partial x}\right),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где операторы ρ_j имеют вид

$$
\rho_1=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Big\{\Big[2\left(1-D_1\right)C_1Q_{n1}\left(\lambda_{22}^{(1)}-\Delta\right)\left(\lambda_{21}^{(m)}+\Delta C_0Q_{m1}\right)+M_1N_1^{-1}\big[C_1Q_{n2}\times
$$

$$
\times\left(\lambda_{22}^{(1)}-\Delta\right)+\left(1-C_1\right)\lambda_{22}^{(n)}\Big]\Big[C_1Q_{m1}\left(\lambda_{21}^{(1)}-\Delta\right)-\left(1+C_0\right)\lambda_{21}^{(m)}\Big]\Big\}\frac{\left(h_1-h_0\right)^{2n}h_0^{2m}}{(2n)!(2m)!}+
$$

$$
+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Big\{\Big[4\Delta\lambda_{22}^{(1)}D_1Q_{n1}+\left(\lambda_{22}^{(1)}+\Delta\right)\lambda_{12}^{(n)}\Big]C_1Q_{m1}\lambda_{11}^{(1)}-M_1M_1^{-1}\times
$$

$$
\times\left(2\lambda_{22}^{(1)}D_2Q_{m2}+\lambda_{12}^{(n)}\right)\lambda_{11}^{(1)}\Big[2C_1\Delta Q_{m1}+\left(1-C_1\right)\lambda_{21}^{(m)}\Big]\Big\}\frac{\left(h_1-h_0\right)^{2n+1}h_0^{2m+1}}{(2n+1)!(2m+1)!};
$$

$$
\rho_2=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Big\{\Big[2\left(1-D_1\right)C_1Q_{n1}\left(\lambda_{22}^{(1)}-\Delta\right)\Delta C_0Q_{m0}+\Big[C_1Q_{n2}\left(\lambda_{22}^{(1)}-\Delta\right)+
$$

$$
+\left(1-C_1\right)\lambda_{22}^{(n)}\Big]M_1N_1^{-1}\Big[C_1Q_{m1}\left(\lambda_{21}^{(1)}-\Delta\right)+\left(1-C_0\right)\lambda_{21}^{(m)}\Big]\Big\}\frac{\left(h_1-h_0\right)^{2n}h_0^{2m}}{(2n)!(2m)!}+
$$

$$
+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Big\{\Big[4\Delta\lambda_{22}^{(1)}D_1Q_{n1}+\left(\lambda_{22}^{(1)}+\Delta\right)\lambda_{12}^{(n)}\Big]\left(\lambda_{21}^{(m)}+C_1Q_{m1}\lambda_{11}^{(1)}\right)+M_1M_1^{-1}\Delta\times
$$

$$\times\left(2\lambda_{22}^{(1)}D_1Q_{n1}+\lambda_{12}^{(n)}\right)\left[2C_1Q_{m1}\lambda_{11}^{(1)}+\left(1+C_1\right)\lambda_{21}^{(m)}\right]\Bigg\}\times\frac{\left(h_1-h_0\right)^{2n+1}h_0^{2m+1}}{(2n+1)!(2m+1)!};$$

$$\rho_3=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Bigg\{\bigg[\left(1-D_1\right)\left[4\Delta C_1Q_{n1}\lambda_{12}^{(1)}+\lambda_{22}^{(n)}\left[\left(1-C_1\right)^2\lambda_{12}^{(1)}+\left(1+C_1\right)^2\Delta\right]\right]\times$$

$$\times\left(C_1\Delta Q_{m1}+\lambda_{21}^{(m)}\right)+M_1N_1^{-1}\Delta\left[2C_1Q_{n1}\lambda_1^{(1)}+\left(1+C_1\right)\lambda_{22}^{(n)}\right]\left[C_1Q_{m1}(\lambda_{21}^{(1)}-\right.$$

$$\left.-\Delta)-\left(1+C_1\right)\lambda_{21}^{(m)}\right]\Bigg\}\frac{\left(h_1-h_0\right)^{2n+1}h_0^{2m}}{(2n+1)!(2m)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Bigg\{-2\left(\lambda_{22}^{(1)}-\Delta\right)\times$$

$$\times D_1Q_{n1}C_1Q_{m1}\lambda_{11}^{(1)}+M_1M_1^{-1}\lambda_{11}^{(1)}\left[D_1Q_{n1}\left(\lambda_{22}^{(1)}-\Delta\right)\lambda_{12}^{(n)}\right]\times$$

$$\times\left[2C_1Q_{m1}\Delta+\left(1-C_1\right)\lambda_{21}^{(m)}\right]\Bigg\}\times\frac{\left(h_1-h_0\right)^{2n}h_0^{2m+1}}{(2n)!(2m+1)!};$$

$$\rho_4=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Bigg\{\bigg[\left(1-D_1\right)\left[4\Delta C_1Q_{n1}\lambda_{12}^{(1)}+\lambda_{22}^{(n)}\left[\left(1-C_1\right)^2\lambda_{12}^{(1)}+\left(1+C_1\right)^2\Delta\right]\right]C_1\Delta Q_{m1}+$$

$$+M_1N_1^{-1}\Delta\left[2C_1Q_{n1}\lambda_{12}^{(1)}+\left(1+C_1\right)\lambda_{22}^{(n)}\right]\left[C_1Q_{m1}(\lambda_{21}^{(1)}-\Delta)+\left(1-C_1\right)\lambda_{21}^{(m)}\right]\Bigg\}\frac{\left(h_1-h_0\right)^{2n+1}h_0^{2m}}{(2n+1)!(2m)!}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Bigg\{-2\Delta D_1Q_{n1}\left(\lambda_{22}^{(1)}-\Delta\right)(C_1Q_{m1}\lambda_{11}^{(1)}+\lambda_{21}^{(m)})+M_1M_1^{-1}\Delta\left[D_1Q_{n1}\left(\lambda_{22}^{(1)}-\Delta\right)+\lambda_{12}^{(n)}\right]\times$$

$$\times\left[2C_1Q_{m1}\lambda_{11}^{(1)}+\left(1+C_1\right)\lambda_{21}^{(m)}\right]\Bigg\}\frac{\left(h_1-h_0\right)^{2n}h_0^{2m+1}}{(2n)!(2m+1)!};$$

$$\rho_5=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_{22}^{(n+1)}\cdot\lambda_{21}^{(m)}\frac{\left(h_1-h_0\right)^{2n+1}h_0^{2m}}{(2n+1)!(2m)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_{22}^{(n)}\cdot\lambda_{21}^{(m+1)}M_1M_1^{-1}\frac{\left(h_1-h_0\right)^{2n}h_0^{2m+1}}{(2n)!(2m+1)!}.$$

При продольном колебании за основные неизвестные, или искомые функции, как мы уже отмечали, берутся потенциалы φ и ψ. Для потенциала ψ имеем третье уравнение в (9), а из первых двух для потенциала φ получим уравнение

$$\left(\rho_1\rho_4-\rho_2\rho_3\right)\Delta\varphi=M_1^{-1}\left\{\rho_4\left(f_z\right)-\rho_2\left(\frac{\partial f_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial f_{yz}}{\partial x}\right)\right\}, \tag{10}$$

причем $w^{(0)}$ выражается через φ одного из первых двух уравнений. Уравнения (10) являются общими уравнениями общего колебания трехслойной пластинки.

Из этих уравнений можно получить приближенные уравнения, ограничиваясь в суммах операторов ρ_j конечным числом первых слагаемых. Например, ограничиваясь первыми слагаемыми, получим приближенные уравнения (для простоты при $f_z=f_{xz}=f_{yz}=0$)

$$\frac{1}{4}\Pi_0M_1^{-1}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)-\Delta\varphi=0; \tag{11}$$

$$\Pi_0\left[\rho_1-\left(h_1-h_0\right)+\rho_0h_0\right]M_1^{-1}\left[M_1^{-1}\left(1-M_1N_1^{-1}\right)\left(h_1-h_0\right)+M_1^{-1}\left(1-M_1N_1^{-1}\right)h_0\right]^{-1}\times$$

$$\times\left[\rho_1-\left(h_1-h_0\right)+\rho_0h_0\right]M_1^{-1}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)-\left[\left(h_1-h_0\right)+M_1M_1^{-1}h_0\right]\Delta\psi=0,$$

которые для упругой пластинки без правой части принимают вид

$$\frac{\left[\rho_1\left(h_1-h_0\right)+\rho_0h_0\right]}{4\left[\rho_1\beta_1^2\left(1-\frac{b_1^2}{a_1^2}\right)\left(h_1-h_0\right)+\rho_0\beta_0^2\left(1-\frac{b_0^2}{a_0^2}\right)h_0\right]}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\Delta\varphi=0;$$

$$\frac{\left[\rho_1\left(h_1-h_0\right)+\rho_0 h_0\right]}{\rho_1\beta_1^2\left(h_1-h_0\right)+\rho_0\beta_0^2 h_0}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\Delta\psi=0\,. \tag{12}$$

Уравнения (11) или (12) являются приближенными уравнениями продольного колебания трехслойной пластинки и обобщают модель плоского обобщенного напряженного состояния для трехслойной пластинки постоянной толщины.

Из уравнения (12) следует, что скорости продольных и поперечных волн для такой пластинки в нулевом приближении равны

$$\begin{gathered} c_{пл}^2=\frac{4\left[\rho_1 b_1^2\left(1-\frac{b_1^2}{a_1^2}\right)\left(h_1-h_0\right)+\rho_0 b_0^2\left(1-\frac{b_0^2}{a_0^2}\right)h_0\right]}{\left[\rho_1\left(h_1-h_0\right)+\rho_0 h_0\right]}; \\ b_{пл}^2=\frac{\left[\rho_1 b_1^2\left(h_1-h_0\right)+\rho_0 b_0^2 h_0\right]}{\left[\rho_1\left(h_1-h_0\right)+\rho_0 h_0\right]}. \end{gathered} \tag{13}$$

Аналогично можно получить приближенные уравнения, обобщающие (8).

Поперечные колебания относятся к несимметричным, или антисимметричным, колебаниям и возникают в том случае, если функции внешних усилий удовлетворяют условиям

$$f_z^+=-f_z^-=f_z;\qquad f_{jz}^+=-f_{jz}^-=f_{jz};\qquad \left(j=x,y\right), \tag{14}$$

при этом искомые функции

$$U^{(0)}=V^{(0)}=W^{(0)}=0\,, \tag{15}$$

и для оставшихся $U_1^{(0)},V_1^{(0)},W_1^{(0)}$ получаем систему уравнений.

Взяв за основную неизвестную величину поперечное смещение $W_1^{(0)}$ точек срединной плоскости $z=0$ для $W_1^{(0)}$, получим уравнение

$$\left(K_1K_4-K_2K_3\right)\left(W_1^{(0)}\right)=-K_3\left[M_1^{-1}\left(f_z\right)\right]+K_1\left[M_1^{-1}\left(\frac{\partial f_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial f_{yz}}{\partial y}\right)\right]. \tag{16}$$

Если в суммах левой части уравнения (16) оставить первые два слагаемых, то получим приближенное уравнение

$$\begin{aligned} M_1^{-1}\left[\rho_0 h_0-\rho_1\left(h_1-h_0\right)\right]\frac{\partial^2 W_1^{(0)}}{\partial t^2}+A_1\left(\frac{\partial^4 W_1^{(0)}}{\partial t^4}\right)-A_2\left(\Delta\frac{\partial^2 W_1^{(0)}}{\partial t^2}\right)+A_3\left(\Delta^2 W_1^{(0)}\right)= \\ =M_1^{-1}\left[f\left(x,y,t\right)\right]+h_1 M_1^{-1}\left[\frac{\partial f_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial f_{yz}}{\partial y}\right]. \end{aligned} \tag{17}$$

Уравнение (17) является приближенным уравнением поперечного колебания трехслойной пластинки.

References

1. *Grigolyuk E.I., Selezov I.T.* No classical theories of the fluctuations, pegs, plates, shells. Mechanics of the deformed hard body. The totals of sciences. — T. 5. — M.: VINITI, 1973. — 272 p.
2. *Filippov I.G.* The exact equations of the transverse fluctuations of viscous and springy captive // Works of Vsesoyuz. conf. On speaker foundation and underground sooruzheniy. — L.: Narva, 1995. — P. 63–69.
3. *Filippov I.G., Filippov S.I.* Dynamic theory to stability стержней // Works Russian-Polish seminar «Theoretical bases construction». — Warsaw, 1995. — P. 56—61.
4. *Filippov A.I.* To nonlinear theory of the of viscous and springy izotropic ambiences. — T. 19. — № 3. — Kiev: Prikl. mechanics, 1983. — P. 3–8.