БӨЛШЕКТІК ЖҮКТЕЛГЕН ЖЫЛУ ӨТКІЗГІШТІК ШЕТТІКЕСЕБІ ҮШІН ШЕШІМДІЛІК ШАРТТАРЫ

Космакова М.Т., Ахманова Д.М., Жумагулова Э.К.
Академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университеті, Қарағанды, Қазақстан
E-mail:svetlanamir578@gmail.com; danna.67@mail.ru; elmira09@inbox.ru

Бірінші квадранта бөлшектік жүктелген жылуөткізгіштік теңдеуі үшін шеттік есептер қарастырылады. Жүктелген мүше кеңістіктік айнымалыға қатысты алынған. Бұл мүше Риман-Лиувилль түріндегі бөлшек туынды болып табылады және жүктелген мүшедегі туындының реті дифференциалдық бөліктің ретінен кіші. Зерттеу шеттік есебін екінші текті Вольтерра интегралдық теңдеуіне келтіруге негізделген. Алынған интегралдық теңдеудің ядросында арнайы функция, Райт типті функция бар. Интегралдық теңдеудің шешілу шарттары алынды және интегралдық теңдеудің шешімдерінің бар болуы мен бірегейлігі бастапқы-шектік есептің жүктелген мүшесіндегі бөлшек туындының ретіне де, заңына да тәуелді екендігі көрсетілген.

$G=\{(x,t)\,|\,x>0;t>0\}$ облысында теңдеудің шешімін табу керек.

$$u_t=u_{xx}+\lambda\left\{{}_rD_{0,x}^{\beta}u(x,t)\right\}\Big|_{x=\gamma(t)}+f(x,t),\tag{1}$$

$$u\big|_{t=0}=0;\ u\big|_{x=0}=0.\tag{2}$$

Мұнда:

${}_rD_{0,x}^{\beta}f(x)$-Риман-Лиувилл түріндегі туынды $\beta, 1<\beta<2$. Шешім $u(x,t)\in L_1(G)$.

$\gamma(t)$үздіксіз өспелі функция және $\gamma(0)=0$.

Келесі белгіленулер енгізіледі:

$$\mu(t)=\left\{{}_rD_{0,x}^{\beta}u(x,t)\right\}\Big|_{x=\gamma(t)},\ f_1(x,t)=\int_0^t\int_0^{+\infty}G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau\quad .\tag{3}$$

Сонда (1)-(2) есептің шешімін [8] түрінде көрсетуге болады.

$$u(x,t)=-\lambda\int_0^t\int_0^{\infty}G(x,\xi,t-\tau)\mu(\tau)d\xi d\tau+f_1(x,t),\tag{4}$$

мұндағы:

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left\{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right)-\exp\left(-\frac{(x+\xi)_2}{4t}\right)\right\}$$

Грин функциясы болып табылады.

$$u(x,t)=-\lambda\int_0^t erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\tau+f_1(x,t).$$

(4) түрінде көрсетейік

$$u(x,t)=-\lambda\int_0^t K\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\tau+f_1(x,t),\tag{5}$$

мұндағы

$$K\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)=1-\phi\left(-\frac{1}{2};1;-\frac{x}{\sqrt{t-\tau}}\right)\tag{6}$$

(5)-ге (3) формула бойынша бөлшек дифференциалдау операциясын қолданамыз.

Бізде бар

$${}_rD_{0,x}^{\beta}\left(K\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\right)=x^{-\beta}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}-e_{1,\frac{1}{2}}^{1-\beta,1}\left(-\frac{x}{\sqrt{t-\tau}}\right)\right)=$$

$$=\frac{x^{1-\beta}}{\sqrt{t-\tau}}e_{1,\frac{1}{2}}^{2-\beta,\frac{1}{2}}\left(-\frac{x}{\sqrt{t-\tau}}\right)=-ze_{1,\frac{1}{2}}^{2-\beta,\frac{1}{2}}(z),1<\beta<2,$$

мұндағы

$$e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)\Gamma(\delta-\beta n)},\mu\in C,\delta\in C, \quad (7)$$

- Райт типті функция [9, б.23]. Есептеу кезінде [9, 24 б.] автотрансформация формуласын (3) қолдандық.

Біз интегралдық теңдеуді алдық

$$\mu(t)+\lambda\int_0^t K_\beta(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = f_2(t);\ 1<\beta<2, \quad (8)$$

мұндағы:

$$f_2(t)={}_r\ D_{0,x}^{\beta}(f_1(x,t))|_{x=\gamma(t)},\ K_\beta(t,\tau)=\frac{(\gamma(t))^{1-\beta}}{\sqrt{t-\tau}}e_{1,\frac{1}{2}}^{2-\beta,\frac{1}{2}}\left(-\frac{\gamma(t)}{\sqrt{t-\tau}}\right) \quad (9)$$

Осы жерде $\gamma(t)\sim t^{\omega}$ сағ $t\to 0;\omega>0$.

Өйткені $\omega>\frac{1}{2}$ және $1<\beta<2$ үшін үзіліссіз функциялар класында әрекет ететін (8) теңдеуінің интегралдық операторымен шектелетін болады. $\omega(1-\beta)+1/2\geq 0$

Ал $1<\beta<2$ және ядросы (9) бар интегралдық теңдеу (8) біркелкі шешіледі және $\omega(\beta-1)\leq\frac{1}{2}$ үшін $1<\beta<2$ және ядросы (9) бар (8) интегралдық теңдеу біркелкі шешіледі. $\omega=\frac{1}{2}$

Теорема. (9) түріндегі теңдеудің ядросы бар (8) интегралдық теңдеу $1<\beta<2$ және $\gamma(t)\sim t^{\omega}$ (t=0 нүктесінің маңайында) үзіліссіз функциялар класында біркелкі шешіледі, егер $\omega\geq\frac{1}{2}$.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Нахушев А.М. Математикалық биологияның теңдеулері. – М.: Жоғары мектеп, 1995. – 205 б.

2. Нахушев А.М. Жүктелген теңдеулер және олардың қолданылуы, дифференциалды. теңдеулер. - 1983. - Т.19, No 1. - С.86-94.

3. Аттаев А.Х., Искаков С.А., Қаршигина Г.Ж., Рамазанов М.И. Бөлшек ретті жүктемемен жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бірінші шекаралық есеп. I. // Қарағанды университетінің хабаршысы-математика. - 2014. - Т.76, No4. - 11-16.

4. Ысқақов С.А., Рамазанов М.И., Иванов И.А. (2015). Бөлшек ретті жүктемесі бар жылу өткізгіштік теңдеуі үшін бірінші шекаралық есеп. II. // Қарағанды университетінің хабаршысы-математика. - 2015. - Т.78, No2. - P. 25-30.

5. Қосмақова М.Т., Искаков С.А., Қасымова Л.Ж. Бөлшек жүктелген жылу теңдеуін шешуге // Қарағанды университетінің хабаршысы-математика. - 2021. - Т. 1, № 101. – 65-77 б.

6. Рамазанов М.И., Қосмақова М.Т., Қасымова Л.Ж. Бөлшек жүктемесі бар жылу теңдеуінің мәселесі туралы // Лобачевский журналы математика. - 2020. - Т. 41, № 9. – 1873-1885 жж.

7. Қосмақова М.Т., Рамазанов М.И., Қасымова Л.Ж. Бөлшек жүктемемен жылу теңдеуін шешу // Лобачевский журналы математика. - 2021. - Т. 42, № 12. - Б. 2854-2866.

8. Полянин А.Д. Математикалық физиканың сызықтық теңдеулер анықтамалығы. – М.: Физматлит, 2001. – 576 б.

9. Псху А.В. Бөлшек ретті жеке туындылардағы теңдеулер. – М.: Наука, 2005. – 199 б.