

З.К.Куралбаев, А.А.Аманбаев

Алматинский институт энергетики и связи

### ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОПУСКАНИИ СИЛЬНОВЯЗКОГО КУПОЛООБРАЗНОГО ПОДНЯТИЯ

*Мақала жоғарғы бос бетінің формасы алдын ала күмбез түрінде берілген, тұтқыр қабаттың салмағының әсерінен пайда болатын қозғалыстарын сипаттайтын есепті сандық әдіспен шешуге арналған. Есептің сандық шешімі жер қабатындағы тектоникалық процестердің сипатына талдау жасауға қолданылған.*

*This text is considering number of decision of sum about motion upwards power of gravity substance of strong sticky layer, free surface of it has preliminary form of cupola raising. The results number of decision of sum are used for analyse some of sides of tectonic processes are going on earthly bark.*

В результате тектонических процессов, происходящих в земной коре, образуются различные геологические структуры, в частности, наблюдаемые куполообразные поднятия (или опускания) на земной поверхности магматических веществ, соляных толщ и др. [1, 2]. После завершения глубинных процессов, являющихся причиной поднятий на поверхности земной коры, происходит опускание веществ этих поднятий под действием силы тяжести. Изучение процессов опускания подобных куполообразных поднятий (или поднятия опусканий) имеет определенное прикладное значение в вопросах изучения современных движений земной коры, а также является актуальным при проектировании строительных сооружений на склонах таких поднятий.

Для изучения этого явления используется метод механико-математического моделирования [3, 4]. Предполагается, что некоторый верхний слой земной коры имеет форму локального куполообразного поднятия и вертикальные размеры его малы в сравнении с горизонтальными размерами. В качестве физической модели для веществ этого слоя принята ньютоновская сильновязкая жидкость, для которой число Рейнольдса очень мало. Требуется определить движение веществ данного слоя и изменение его свободной поверхности под действием силы тяжести.

Из [4] следует, что решение подобной задачи приводит к решению следующей математической задачи. Как известно, в рассматриваемом случае изменение свободной поверхности сильновязкого слоя описывается с помощью следующего квазилинейного уравнения параболического типа [4]:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \xi^3 \frac{\partial \xi}{\partial x} \right], \quad (1)$$

где  $\xi(x, t)$  — искомая функция горизонтальной координаты  $x$  и времени  $t$ ,  $a$  — постоянный коэффициент.

Все величины в уравнении (1) безразмерные. Функция  $z = \xi(x, t)$  определяет свободную поверхность рассматриваемого слоя. Постоянный безразмерный коэффициент  $a^2 = \frac{ER}{3}$ , где  $ER = \frac{\rho g H^3}{\eta U L}$  — безразмерное число Ержанова,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\rho$  — плотность и  $\eta$  — динамический коэффициент вязкости веществ слоя; приняты следующие характерные параметры для рассматриваемого слоя:  $U$  — скорость,  $H$  — вертикальный (средняя толщина слоя) и  $L$  — горизонтальный размеры. Предполагается, что горизонтальные размеры слоя достаточно большие в сравнении с толщиной слоя ( $L \gg H$ ) и с вертикальными размерами ( $L \gg \xi(x, t)$ ) поднятия его свободной поверхности. В дальнейших расчетах границы слоя при  $x = \pm L$  предполагаются удаленными от центра поднятия купола (при  $x = 0$ ). После перехода к безразмерным параметрам вместо размерного параметра  $L$  будет использован безразмерный параметр  $l$ . Требуется найти решение уравнения (1) в области  $\{-l < x < l, t \geq 0\}$  при начальных условиях

$$t = 0, \quad \xi(x, 0) = Za(x), \quad (2)$$

где  $Za(x)$  — заданная функция, которая описывает первоначальный вид купола.

В дальнейших расчетах будет использована функция

$$Za(x) = 1 + z_0 \exp(-cx^2)(1 - 2cx^2), \quad (3)$$

которая получена при решении задачи о куполообразном поднятии веществ мантии [3] и при аппроксимации результатов наблюдений за поднятием соляных толщ [4]; здесь  $z_0$  — начальное поднятие свободной поверхности (вершина купола) при  $x=0$ , а параметр  $c$  вместе с параметром  $z_0$  определяет форму купола (параметр  $c$  характеризует горизонтальные размеры купола). В дальнейших расчетах для определенности приняты следующие их значения:  $z_0 = 0,5$ ,  $c = 0,5$ .

Первоначально предполагаем, что купол имеет симметричную относительно вертикальной оси  $z$  форму и точка его максимального поднятия, т.е. вершина, находится при  $x=0$ . В точках  $x = \pm l$ , удаленных от центра поднятия купола, считается, что скорость движения веществ слоя пренебрежимо мала, т.е. изменение свободной поверхности также можно считать малым. Поэтому можно принять, что производная искомой функции  $\xi(x, t)$  по  $x$  в этих точках равна нулю, т.е.

$$\frac{\partial \xi(-l, t)}{\partial t} = \frac{\partial \xi(l, t)}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

Из-за нелинейности уравнения (1) аналитическое решение его невозможно, поэтому используем численный метод, а именно конечно-разностный метод. Расчеты выполняются для следующих исходных данных: по горизонтальной оси  $Ox$  принят интервал  $[-3, 3]$  и шаг по координате  $x$  —  $h = 0,05$ ; промежуток времени  $0 \leq t \leq 1$  и шаг по времени —  $\tau = 0,0001$ .

Используя известные формулы замены производных искомой функции конечно-разностными соотношениями

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\xi_i^{j+1} - \xi_i^j}{\tau};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \xi^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] \approx \left\{ \left( \frac{\xi_{i+1}^{j+1} + \xi_i^{j+1}}{2} \right)^3 \cdot (\xi_{i+1}^{j+1} - \xi_i^{j+1}) - \left( \frac{\xi_i^{j+1} + \xi_{i-1}^{j+1}}{2} \right)^3 \cdot (\xi_i^{j+1} - \xi_{i-1}^{j+1}) \right\} \cdot \frac{1}{h^2},$$

можно получить следующую формулу:

$$\xi_i^{j+1} - \xi_i^j = \frac{\tau a^2}{h^2} \left\{ \frac{(\xi_{i+1}^{j+1} + \xi_i^{j+1})^3}{8} \cdot (\xi_{i+1}^{j+1} - \xi_i^{j+1}) - \frac{(\xi_i^{j+1} + \xi_{i-1}^{j+1})^3}{8} \cdot (\xi_i^{j+1} - \xi_{i-1}^{j+1}) \right\}.$$

Полученные разностные уравнения представляют собой систему нелинейных алгебраических уравнений относительно дискретных значений искомой функции  $\xi_i^{j+1}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, m-1$ . В данном случае получена нелинейная расчетная схема, для реализации которой был использован итерационный метод. Введем следующие обозначения:

$$\xi_i^{j+1} = u_i, \quad \xi_i^j = v_i; \quad u_i - v_i = b \left\{ (u_{i+1} + u_i)^3 \cdot (u_{i+1} - u_i) - (u_i + u_{i-1})^3 \cdot (u_i - u_{i-1}) \right\},$$

где  $b = \frac{\tau a^2}{8h^2}$ ;  $v_i$  — значение искомой функции в предыдущий момент времени;  $u_i$  — значение искомой функции в текущий момент времени. Разностные уравнения могут быть приведены к следующей известной стандартной форме, т.е. к системе линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$A_i u_{i-1} - C u_i + A_{i+1} u_{i+1} = v_i, \quad (5)$$

где  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ;  $n = l/h$ ;

$$\begin{cases} A_i = b(u_i + u_{i-1})^3; \\ A_{i+1} = b(u_{i+1} + u_i)^3; \\ C_i = 1 + A_i + A_{i+1}. \end{cases}$$

Для решения системы уравнений (5) использован известный метод прогонки, а численная реализация осуществлена с помощью компьютерной программы, написанной на языке Паскаль. Итерационный процесс выполнен до достижения точности вычисления  $\varepsilon = 0,0001$ . Проведен численный эксперимент для различных значений числа Ержанова  $ER$ .

Результаты численного решения задачи представлены в виде графиков (рис. 1–3), где показаны положения свободной границы слоя для моментов времени  $t = 0$ ,  $t = 0,01$ ,  $t = 0,05$ ,  $t = 0,1$ ,  $t = 0,3$ ,  $t = 0,5$  и для различных значений коэффициента  $a^2$  (или  $ER$ ).

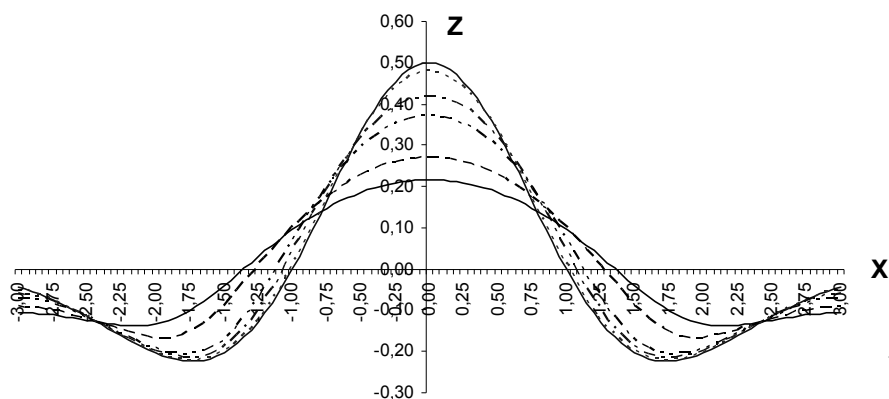


Рис. 1. Положение свободной границы слоя при  $t = 0, t = 0,01, t = 0,05, t = 0,1, t = 0,3, t = 0,5$  для  $a^2 = 0,5$  ( $ER = 1,5$ )

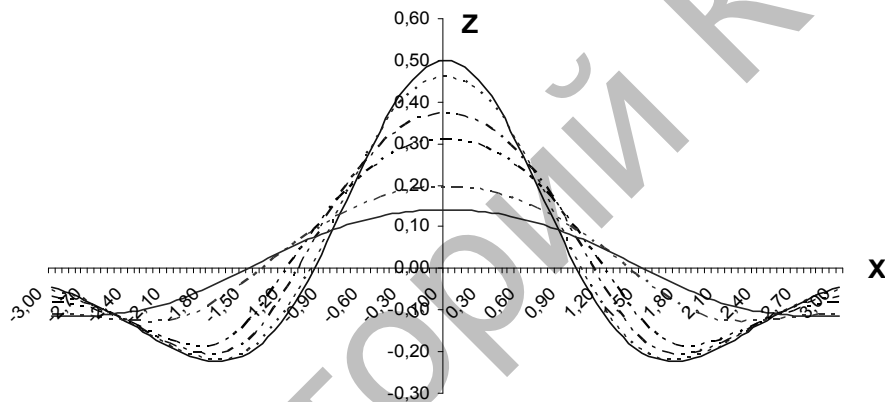


Рис. 2. Положение свободной границы слоя при  $t = 0, t = 0,01, t = 0,05, t = 0,1, t = 0,3, t = 0,5$  для  $a^2 = 1$  ( $ER = 3$ )

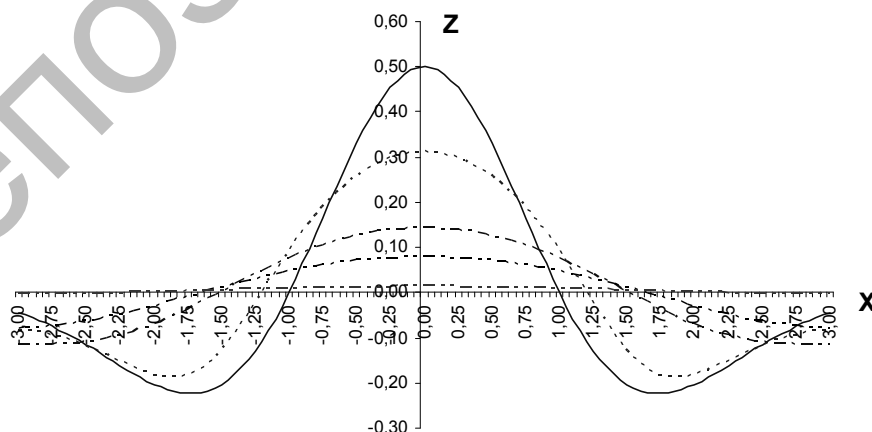


Рис. 3. Положение свободной границы слоя  $t = 0, t = 0,01, t = 0,05, t = 0,1, t = 0,3, t = 0,5$  для  $a^2 = 10$  ( $ER = 30$ )

Изменение в вертикальном направлении свободной поверхности слоя сопровождается перемещением его веществ в горизонтальном направлении. Для определения скорости горизонтального перемещения веществ слоя использована следующая формула:

$$u(x, z, t) = a^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \left( \frac{z^2}{2} - \xi \cdot z \right). \quad (6)$$

Эпюры скоростей горизонтального перемещения веществ слоя для моментов времени  $t = 0,01$ ,  $t = 0,02$ ,  $t = 0,05$  представлены на рисунках 4 и 5.

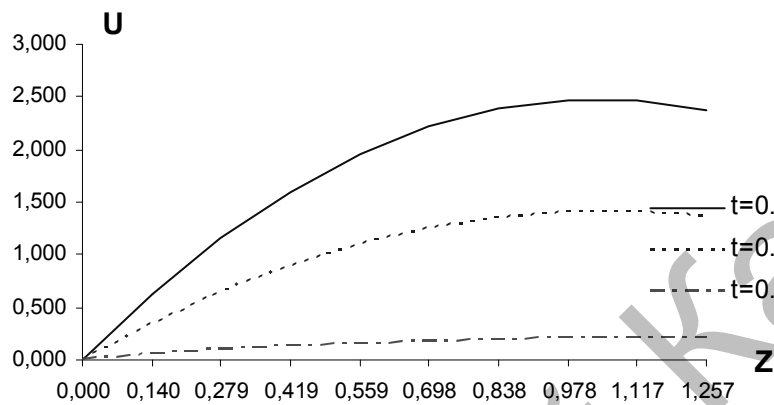


Рис. 4. Эпюра горизонтальной скорости в зависимости от времени  $t$  в точке  $x = 0,5$

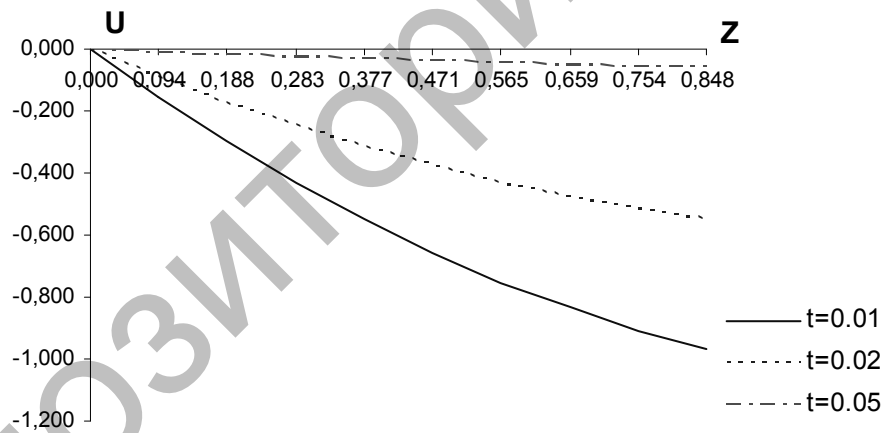


Рис. 5. Эпюра горизонтальной скорости в зависимости от времени  $t$  в точке  $x = 2,25$

Анализ полученных результатов решения данной задачи показал:

1. Число Ержанова характеризует движение в сильновязком слое при малых числах Рейнольдса; оно определяет скорость опускания свободной поверхности слоя: при меньших значениях  $ER$  опускание (поднятие) происходит медленнее, чем при больших его значениях. Например, сравнение графиков при  $ER = 3$  (рис. 2) и  $ER = 30$  (рис. 3) для одинаковых моментов времени показывает существенное их различие. Этот факт можно объяснить следующим образом: при меньших значениях динамического коэффициента вязкости, когда число Ержанова имеет большее значение при одинаковых значениях других параметров, вещества слоя будут более подвижными.

2. Перемещение веществ слоя происходит в горизонтальном направлении; для выяснения направления движения рассмотрены эпюры скоростей для двух значений переменной:  $x = 0,5$  и  $x = 2,25$ . В первом случае (рис. 4) около опускающейся вершины свободной поверхности слоя скорость перемещения веществ слоя направлена в положительном направлении, т.е. в сторону от вершины к опущенной области. Причем с течением времени абсолютная величина скорости уменьшается,

что связано с уменьшением перепада давления в связи с уменьшением разности «высот» между вершиной и опущенной областью. Во втором случае (рис. 5) горизонтальная скорость перемещения веществ слоя направлена в отрицательном направлении; из-за таких перемещений веществ слоя происходит поднятие опущенных областей; причем ее абсолютная величина меньше, чем скорость для первого случая. С течением времени скорость в этой области становится очень малой и практически отсутствует движение веществ слоя.

3. Результаты решения данной задачи могут быть использованы для описания процесса, происходящего в земной литосфере, когда движение вверх остывших мантийных веществ останавливается и происходит некоторое обратное движение, т.е. опускание куполообразных поднятий мантийных веществ.

4. Задача механики, рассмотренная здесь, и результаты ее решения могут быть также использованы для модельного исследования процесса появления оползней.

#### Список литературы

1. Добрецов Н.Л., Кирдяшкин А.Г., Кирдяшкин А.А. Глубинная геодинамика. 2-е изд. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, филиал «ГЕО», 2001. — 409 с.
2. Павленкова Н.И. Структура земной коры и верхней мантии и механизм движения глубинного вещества // Электронный научно-информационный журнал «Вестник ОГГГН РАН». — М., 2001. — № 4 (19). — 18 с.
3. Куралбаев З.К. Модельное исследование влияния локального поднятия мантийных веществ на тектоносферу // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. — Новосибирск, 2005. — № 1. — С. 22–37.
4. Куралбаев З.К. Модельное исследование тектонических движений в системе «литосфера-астеносфера». — Алматы: «TST-companу», 2008. — 212 с.

УДК 539.3

И.А.Самойлова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

#### АВТОМАТИЗАЦИЯ РАСЧЕТА ПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ С ОТВЕРСТИЯМИ

*Мақала ақырлы элементтер әдісі арқылы ойықты конструкцияның жазық элементін есептеуді автоматтандыруға арналған. Конструкцияның жазық элементінің есептеу алгоритмі ұсынылған. Квадрат және дөңгелек жазық ойықты элементтердің кернеулік және деформациялық күйлері анықталған.*

*This article is devoted to automation of calculation of plane structural elements with holes of finite element method. The algorithm for calculating planar element design. Identified stress and strain state of rectangular and circular planar elements with holes.*

Вычислительные машины (компьютеры) стали необходимым и естественным средством, используемым при проектировании и расчете строительных конструкций. Как известно, все численные и логические операции на ЭВМ выполняются согласно инструкциям, совокупность которых для решения некоторой задачи называется программой. Программирование представляет собой достаточно трудоемкую работу. В строительной механике проблема программирования частично решается путем матричной формулировки задачи.

Настоящая статья посвящена автоматизации расчета плоских элементов конструкций с отверстиями методом конечных элементов. Общая теория вышеуказанного метода при применении к плоским проблемам теории упругости становится значительно проще, поскольку все геометрические и физические величины зависят только от двух аргументов [1].

Рассмотрим плоский элемент конструкции в декартовой системе координат ( $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ). Нагрузка, действующая на плоский элемент, произвольная. Опирающие по контуру могут быть шар-