A. R. Eshkeev, O. I. Ulbrikht, JSp-cosemanticness of R-modules, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2019, Volume 16, 1233–1244

DOI: https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.084

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 1233–1244 (2019) УДК 510.67
DOI 10.33048/semi.2019.16.084 MSC 03C60, 03C68, 03C10

JSp-КОСЕМАНТИЧНОСТЬ R-МОДУЛЕЙ

А.Р. ЕШКЕЕВ, О.И. УЛЬБРИХТ

Abstract. The main purpose of this article is to study the model-theoretic properties of R-modules within Jonsson theories. We obtain a criterion of JSp-cosemanticness of R-modules, which generalizes the elementary equivalence of modules. We describe countably categorical perfect existentially closed Jonsson R-modules.

Keywords: Jonsson theory, model companion, existentially closed model, perfectness, cosemanticness, R-modules.

1. Введение

Теоретико-модельные вопросы модулей являются актуальными задачами современной алгебры, что подтверждается большим списком работ в этой области. Существуют хорошие обзоры по данной тематике [1], [2], но нужно заметить, что работы из этих обзоров связаны в основном с изучением полных теорий некоторых фиксированных модулей. В данной статье мы будем иметь дело с йонсоновскими теориями модулей, которые, вообще говоря, не являются полными. Как хорошо известно, модуль является одним из основным понятий общей алгебры. В частности, таковыми являются векторные пространства и абелевы группы. Если R – поле, то левый R-модуль является линейным пространством. Если $R = \mathbf{Z}$ – кольцо целых чисел, то R-модуль M – не что иное, как абелева группа, т.к. умножение на положительные целые числа сводится к многократному сложению.

Данная работа является естественным продолжением работы [3], в которой был получен аналог теоремы В. Шмелёвой об элементарной эквивалентности абелевых групп на языке косемантичности абелевых групп в рамках изучения йонсоновских теорий абелевых групп. Понятие косемантичности двух моделей является более общим понятием, чем элементарная эквивалентность этих

Yeshkeyev, A.R., Ulbrikht, O.I., JSp-cosemanticness of R-modules.

Поступила 3 октября 2018 г., опубликована 10 сентября 2019 г.

моделей. Как выяснилось, для получения косемантичности абелевых групп, достаточно сравнения двух инвариантов В. Шмелёвой, а именно, инвариантов делимой части. Это напрямую связано со спецификой изучения произвольных совершенных йонсоновских теорий, а именно, оказалось, что теория абелевых групп является совершенной йонсоновской теорией [3]. Понятно, что было бы интересно получить более общий аналогичный результат относительно косемантичности для модулей.

Напомним, что при изучении йонсоновских теорий мы, как правило, имеем дело не с элементарными мономорфизмами, а изоморфными вложениями, либо соответствующими гомоморфизмами [4]. В силу критерия совершенности йонсоновской теории [5] (предложение 3.4 при $\alpha = 0$), мы можем заметить, что в случае совершенной йонсоновской теории, нам достаточно изучать экзистенциально замкнутые модели данной теории, которые между собой не различаются относительно $\forall\exists$-предложений. Важным условием является требование хоть какой-то полноты для изучаемой теории, обычно это полнота либо для $\forall\exists$-предложений, либо для $\exists$-предложений. Все вышеуказанные требования необходимы для осуществления переноса изучаемых теоретико-модельных свойств центра йонсоновской теории на саму эту теорию.

В самой теории моделей, как замечено в обзорной статье Х. Дж. Кейслера «Основы теории моделей» в справочной книге под ред. Дж. Барвайса [4], исторически сложилось два направления. В [4] их называют «западной» и «восточной» теорией моделей, эти названия условны, они связаны с географическим местом проживания основоположников теории моделей. А. Робинсон жил на восточном побережье США, а А. Тарский жил на западном. Основную разницу между этими направлениями развития теории моделей можно прочитать в [4], [6].

Таким образом, классификация фиксированной йонсоновской теории и её класса моделей относительно задач синтаксического и семантического характера описания центра этой теории является одной из актуальных задач классической теории моделей, в которой воедино связаны задачи «западного» и «восточного» направлений теории моделей.

В данной статье мы рассматриваем теоретико-модельные вопросы классификации теории модулей относительно понятия косемантичности в классе йонсоновских теорий модулей.

Работа состоит из 4 параграфов, первый из которых является введением. Содержание второго параграфа представляет собой общие сведения и известные факты из теории моделей. Третий параграф включает в себя необходимые для нас сведения и результаты, касающиеся атрибутов йонсоновских теорий. Четвёртый параграф содержит основные необходимые в этой статье сведения о модулях, их теоретико-модельных свойствах и основные результаты данной статьи.

Все неопределённые понятия и связанные с ними результаты в данной статье относительно йонсоновских теорий можно найти в [6].

2. Общие сведения из теории моделей

Если задан какой-нибудь класс K алгебраических систем сигнатуры σ, то этот класс называется абстрактным, если с каждой системой A класс K содержит и все изоморфные ей системы сигнатуры σ.

Хорошо известно, что всякий аксиоматизируемый класс моделей некоторой сигнатуры является абстрактным.

Следующие определения и результаты являются хорошо известными в теории моделей и широко используются при работе с йонсоновскими теориями.

Определение 1 ([4], стр. 97)**.** *Модель A теории T называется* ***экзистенциально замкнутой****, если экзистенциальное предложение φ языка L_A, истинное в некоторой T-модели, расширяющей A, истинно и в A.*

Определение 2 ([4], стр. 80)**.** *Теория T обладает* ***свойством совместного вложения (JEP)****, если любые две модели A, B теории T изоморфно вкладываются в некоторую модель C теории T.*

Теорема 1 ([7], стр. 363)**.** *Пусть L – язык первого порядка и T теория в L. Предположим, что T имеет JEP, A, B – экзистенциально замкнутые модели теории T. Тогда каждое $\forall\exists$-предложение языка L, которое истинно в A, также истинно и в B.*

Определение 3 ([4], стр. 61)**.** *Теория T называется* ***модельно полной****, если для любых моделей A и B теории T любая подсистема $A \subseteq B$ будет элементарной подсистемой B. Эквивалентно, каждое изоморфное вложение есть элементарное вложение.*

Теорема 2 ([8], стр. 36)**.** *Теория T модельно полна, если и только если теория $T \cup D(A)$ полна для любой модели M теории T.*

Определение 4 ([4], стр. 156)**.** *Пусть T, T^* – некоторые L-теории. Теория T^* называется* ***модельным пополнением*** *теории T, если:*

(a) T и T^* взаимно модельно совместны, т.е. любая модель теории T вкладывается в модель теории T^* и наоборот;

(b) T^* - модельно полная теория;

(c) если $A \models T$, то $T^* \cup D(A)$ – полная теория.

Теория T^* называется модельным компаньоном теории T, если выполнены условия (a) и (b).

Теорема 3 (Сарацино [4], стр. 164)**.** *Если L – счетный язык и T – полная ω-категоричная теория, то T имеет ω-категоричный модельный компаньон T^M.*

3. Понятия и результаты, касающиеся йонсоновских теорий

Дадим известные определения понятий и результаты, связанные с йонсоновскими теориями, необходимые для изучения модулей в рамках йонсоновости.

Определение 5 ([4], стр. 80)**.** *Теория T называется* ***йонсоновской****, если*

1. *T имеет бесконечную модель;*
2. *T индуктивна, т.е. T эквивалентна множеству $\forall\exists$-предложений;*
3. *T обладает свойством совместного вложения (JEP);*
4. *T обладает свойством амальгамируемости (AP), то есть если для любых A, B, $C \models T$ таких, что $f_1 : A \to B$, $f_2 : A \to C$ — изоморфные вложения, существуют $D \models T$ и изоморфные вложения $g_1 : B \to D$, $g_2 : C \to D$ такие, что $g_1 f_1 = g_2 f_2$.*

Так, например, йонсоновскими теориями являются хорошо известные классические примеры теорий в алгебре, такие, как группы, абелевы группы, булевы алгебры, линейные порядки, поля фиксированной характеристики и полигоны. Примеры этих теорий являются важными как в алгебре, так и в других областях математики.

Определение 6 ([9], стр. 529). *Пусть $\kappa \geq \omega$. Модель M теории T называется κ-**универсальной** для T, если каждая модель T мощности строго меньше κ изоморфно вкладывается в M.*

Определение 7 ([9], стр. 529). *Пусть $\kappa \geq \omega$. Модель M теории T называется κ-**однородной** для T, если при любых двух моделях A и A_1 теории T, являющихся подмоделями M, мощности строго меньше, чем κ, и изоморфизме $f : A \to A_1$, для каждого расширения B модели A, являющегося подмоделью M и моделью T мощности строго меньше κ существует расширение B_1 модели A_1, являющееся подмоделью M, и изоморфизм $g : B \to B_1$, продолжающий f.*

Однородной-универсальной моделью для T называется κ-однородная-универсальная модель для T мощности κ, где $\kappa \geq \omega$.

Теорема 4 ([9], стр. 529). *Каждая йонсоновская теория T имеет κ^+-однородную-универсальную модель мощности 2^κ. Обратно, если T индуктивна, имеет бесконеную модель и имеет ω^+-однородную-универсальную модель, то теория T является йонсоновской теорией.*

Теорема 5 ([9], стр. 529). *Пусть T йонсоновская теория. Две модели A и B κ-однородные-универсальные для T являются элементарно эквивалентными.*

Определение 8 ([9], стр. 529). ***Семантической моделью*** *C_T йонсоновской теории T называется ω^+- однородная - универсальная модель теории T.*

Для любой йонсоновской теории семантическая модель всегда существует, поэтому она играет важную роль в качестве семантического инварианта.

Из определения семантической модели следует, что:

Предложение 1. *Любые две семантические модели йонсоновской теории T являются элементарно эквивалентными между собой.*

Лемма 1 ([6], стр. 25). *Семантическая модель C_T йонсоновской теории T является T-экзистенциально замкнутой.*

Определение 9 ([6], стр. 25). ***Семантическим пополнением (центром)*** *йонсоновской теории T называется элементарная теория T^* семантической модели C_T теории T, т.е. $T^* = Th(C_T)$.*

Лемма 2. *Пусть T – йонсоновская теория, а T^* – её центр. Тогда T и T^* взаимно модельно совместны.*

Доказательство. Пусть T – йонсоновская теория, тогда всякая её модель A изоморфно вкладывается в семантическую модель C_T теории T, где $|A| \leq |C_T|$. C_T также является и моделью теории T^*. Так как $T \subset T^*$, то $\mathrm{Mod}(T^*) \subset \mathrm{Mod}(T)$. Поэтому всякая модель B теории T^* также является и моделью теории T. Таким образом, T и T^* взаимно модельно совместны. $\square$

Определение 10 ([6], стр. 26). *Йонсоновская теория T называется* ***совершенной****, если каждая семантическая модель T является насыщенной моделью T^*.*

Теорема 6 ([6], стр. 26). *Пусть T – произвольная йонсоновская теория, тогда следующие условия эквивалентны:*

1) теория T – совершенна;

2) T^* – модельный компаньон теории T.

Пусть E_T – класс всех экзистенционально замкнутых моделей теории T.

Теорема 7 ([6], стр. 26). *Если йонсоновская теория T совершенна, то $E_T = Mod(T^*)$, где $T^* = Th(C_T)$.*

Предложение 2 ([4], стр. 368). *Если теория T индуктивна, то любая модель теории T вкладывается в экзистенциально замкнутую модель теории T.*

Определение 11 ([6], стр. 40). *Мы говорим, что йонсоновская теория T_1* ***косемантич****на йонсоновской теории T_2 ($T_1 \bowtie T_2$), если $C_{T_1} = C_{T_2}$, где C_{T_i} - семантическая модель T_i, $i = 1, 2$.*

Пусть T – некоторая йонсоновская теория фиксированной сигнатуры σ и $\mathrm{Mod}(T)$ – класс всех моделей теории T. Рассмотрим произвольную модель A из $\mathrm{Mod}(T)$. Назовём ***йонсоновским спектром*** модели A множество:

$$JSp(A) = \{T \mid T - \text{йонсоновская теория в языке } \sigma \text{ и } A \in \mathrm{Mod}(T)\}.$$

Отношение косемантичности на множестве теорий является отношением эквивалентности. Тогда $JSp(A)/_{\bowtie}$ – фактор множество йонсоновского спектра модели A по отношению $\bowtie$.

Пусть A и B – модели одной и той же сигнатуры.

Определение 12. *Мы будем говорить, что модель A* ***йонсоновски элементарно эквивалентна*** *модели B ($A \underset{J}{\equiv} B$), если $JSp(A) = JSp(B)$.*

Учитывая факторизацию можно дать следующее определение.

Определение 13. *Мы говорим, что модель A* ***JSp-косемантична*** *модели B ($A \underset{JSp}{\bowtie} B$), если $JSp(A)/_{\bowtie} = JSp(B)/_{\bowtie}$.*

Легко заметить, что JSp-косемантичность двух моделей йонсоновской теории обобщает понятие элементарной эквивалентности двух моделей полной теории. Верна следующая лемма:

Лемма 3. *Пусть A и B некоторые модели произвольной сигнатуры, тогда*

$$A \equiv B \Rightarrow A \underset{J}{\equiv} B \Rightarrow A \underset{JSp}{\bowtie} B.$$

Доказательство. Следует из определения. □

Определение 14 ([4], стр. 194). *Полная теория T называется* ***κ-стабильной****, если число полных 1-типов, реализуемых в произвольной модели A теории T над произвольным подмножеством C множества A, $|C| \leqslant \kappa$, самое большее κ.*

Рассмотрим йонсоновский аналог понятия стабильности.

Пусть T – йонсоновская теория, $S^J(X)$ – множество всех экзистенциальных полных n-типов над X, совместных с T, для любого конечного n, где $X \subset C$.

Определение 15 ([6], стр. 66)**.** *Будем говорить, что йонсоновская теория T* ***J-λ-стабильна****, если для любой T-экзистенциально замкнутой модели A, для любого подмножества X из A, $|X| \leq \lambda \Rightarrow |S^J(X)| \leq \lambda$.*

Теорема 8. *Пусть T – совершенная йонсоновская теория, полная для $\exists$-предложений, $\lambda \geq \omega$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *T – J-λ-стабильна;*
(2) *T^* – λ-стабильна, где T^* – центр йонсоновской теории T.*

Доказательство. Следует из теоремы 2.1 из [10]. □

Определение 16 ([5], стр. 145)**.** *Модель $A \models T$ называется* ***$\Sigma_{\alpha+1}$-насыщенной моделью****, если для любого подмножества $E \subseteq |A|$, меньшего по мощности, чем A, для любой модели $B \models T$ такой, что $A \subseteq_{\Pi_\alpha} B$, и любого элемента $b \in B$ найдётся элемент $a \in A$, удовлетворяющий включению $Th_{\Sigma_{\alpha+1}}(A, E \cup \{a\}) \supseteq Th_{\Sigma_{\alpha+1}}(B, E \cup \{b\})$.*

Теорема 5.10 из [5] Пусть T – α-йонсоновская полная относительно $\Pi_{\alpha+2}$ теория. Тогда следующие условия эквивалентны:
1) $I(0, T) = 1$;
2) $I(0, T^*) = 1$;
3) T имеет счётную модель, являющуюся одновременно $\Sigma_{\alpha+1}$-насыщенной и $(\Sigma_{\alpha+1}, \Sigma_{\alpha+1})$-атомной;
4) для любого $n < \omega$ каждое максимальное совместное с T множество $\Sigma_{\alpha+1}$-формул n переменных содержит $(\Sigma_{\alpha+1}, \Sigma_{\alpha+1})$-полную формулу;
5) $\left|S^n_{\Sigma_{\alpha+1}}(T)\right| < \omega$ для всех $1 \leqslant n \leqslant \omega$;
6) для каждого $n < \omega$ с точностью до эквивалентности в T существует лишь конечное число $\Sigma_{\alpha+1}$-формул n переменных $x_1, ..., x_n$;
7) все модели T являются $(\Sigma_{\alpha+1}, \Sigma_{\alpha+1})$-атомными.

Теорема 9. *Пусть T – йонсоновская теория, полная относительно $\forall\exists$-предложений. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *T – ω-категорична;*
(2) *T^* – ω-категорична.*

Доказательство. Доказательство следует из эквивалентности пунктов (1) и (2) теоремы 5.10 из работы [5] при $\alpha = 0$. □

4. Модули и их теоретико-модельные свойства

Мы будем рассматривать левые модули над ассоциативным кольцом R с 1.

Определение 17. *Пусть R – некоторое ассоциативное кольцо с элементом $1 \in R$.* ***Левым R-модулем*** *называется аддитивная абелева группа M с операцией умножения на элементы кольца R: $R \times M \to M$, $(r, m) \mapsto rm$, которая удовлетворяет следующим условиям:*

1) $(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m)$ для любых $m \in M$ и $r_1, r_2 \in R$;
2) $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$ для любых $m_1, m_2 \in M$ и $r \in R$;
3) $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$ для любых $m \in M$ и $r_1, r_2 \in R$;
4) $1m = m$ для любого $m \in M$.

R-модули – L_R-структуры, где язык L_R содержит 0, $+$, $-$ и унарный функциональный символ для каждого $r \in R$.

Обозначим через T_R L_R-теорию R-модулей. Легко заметить, что теория T_R является универсальной.

Следствие 1. *Класс всех R-модулей абстрактен.*

Формулу вида $\exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi$, где φ – конъюнкция атомных формул, называют ***позитивно примитивной*** **(п.п.)** формулой. П.п. формулы выражают разрешимость в модулях над кольцом R конечных систем линейных уравнений вида $r_1x_1 + r_2x_2 + \ldots + r_nx_n = 0$. Нетрудно показать, что п.п. формулы замкнуты относительно конъюнкции и навешивания квантора существования. Истинность п.п. формул сохраняется относительно расширений, прямых произведений и гомоморфизмов R-модулей.

Заметим, что всякая п.п. формула $\varphi(x)$ определяет подгруппу $\varphi(M)$ группы M.

Важность п.п. формул в теоретико-модельном смысле для R-модулей показывает следующая теорема:

Теорема 10 ([11], стр. 153)**.** *Для каждого модуля M, каждая L_R-формула эквивалентна булевой комбинации позитивно примитивных формул.*

Пусть M_1 и M_2 две произвольные модели теории R-модулей T_R.

Следующий результат даёт критерий элементарной эквивалентности двух модулей на языке п.п.формульных подмножеств.

Теорема 11 ([11], стр. 155)**.** *Модель M_1 элементарно эквивалентна M_2 тогда и только тогда, когда $\varphi/\psi(M_1) = \varphi/\psi(M_2)$ для всех п.п.формул $\psi \subset \varphi$.*

Следующий класс формул играет важную роль при исследовании замкнутости теорий относительно прямых произведений.

Базисной хорновой формулой называется формула вида $\bigwedge \Phi \to \psi$, где Φ – множество атомных формул, а ψ – либо атомная формула, либо $\perp$ (тождественно ложная формула). Φ может быть пустым, тогда базисная хорнова формула есть только ψ. Хорновой формулой называется формула, состоящая из конечной (возможно пустой) строки кванторов, за которой следует конъюнкция базисных хорновых формул. Теория T называется хорновой, если она имеет систему аксиом, состоящую из хорновых предложений.

Легко заметить, что теория T_R является хорновой.

Теорема 12 ([12], стр. 521)**.** *Пусть T_R – теория модулей. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(a) *T_R замкнута относительно прямого произведения.*

(b) *T_R – Хорнова теория.*

Хорошо известная классическая теорема Вота устанавливает связь между замкнутостью теории относительно прямых произведений произвольного числа моделей этой теории и замкнутостью относительно декартова произведения двух моделей данной теории.

Теорема 13 (Вот [12], стр. 515)**.** *Теория T замкнута относительно прямых произведений тогда и только тогда, когда она замкнута относительно декартова произведения двух сомножителей.*

Лемма 4. *Пусть T – совершенная хорнова йонсоновская теория, $A \in Mod(T)$. Если $A \in E_T$, то прямое произведение семейства таких моделей $\prod\limits_I A \in E_T$.*

Доказательство. Пусть C_T – семантическая модель йонсоновской теории T. Заметим, что найдётся такое изоморфное вложение $f : A \to \prod\limits_I A$, что $f(A) = \tilde{A} \subseteq \prod\limits_I A$ и $\tilde{A} \cong A$. Так как класс всех моделей теории T абстрактен, то $A \subseteq \prod\limits_I A \subseteq C_T$.

Предположим противное, пусть $\prod\limits_I A \notin E_T$. Тогда найдётся такая экзистенциальная формула $\exists \bar{x}\varphi(\bar{x}, \bar{y})$, что для всякого кортежа $\bar{a} \in \prod\limits_I A$ из того, что $C_T \models \exists \bar{x}\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ следует, что $\prod\limits_I A \not\models \exists \bar{x}\varphi(\bar{x}, \bar{a})$, т.е. $\prod\limits_I A \models \forall \bar{x}\neg\varphi(\bar{x}, \bar{a})$. Но, т.к. A экзистенциально замкнута в C_T, то $A \models \exists \bar{x}\varphi(\bar{x}, \bar{a})$, а поскольку $A \subseteq \prod\limits_I A$, мы должны иметь $\prod\limits_I A \models \exists \bar{x}\varphi(\bar{x}, \bar{a})$. Пришли к противоречию, значит наше предположение было неверно. □

Предложение 3. *Теория T_R – йонсоновская теория.*

Доказательство. Проверим выполнимость условий (1)-(4) определения 5.

Тривиально выполняются условия (1) и (2): теория T_R имеет бесконечную модель и является индуктивной, т.к. она эквивалентна множеству $\forall$-предложений, а значит и $\forall\exists$-предложений.

(3) Поскольку теория T_R является хорновой, то, согласно теореме 12, она замкнута относительно прямого произведения. Тогда по теореме 13 замкнута относительно декартовых произведений двух сомножителей. Следовательно, если M_1 и M_2 – два R-модуля, то их прямое произведение $M_1 \times M_2$ также является R-модулем. Множество элементов $\langle m, 0^{M_2} \rangle \in M_1 \times M_2$, где 0^{M_2} – нейтральный элемент M_2, является подмодулем $M_1 \times M_2$, изоморфным M_1. Аналогично, множество элементов $\langle 0^{M_1}, n \rangle \in M_1 \times M_2$, где 0^{M_1} – нейтральный элемент M_1, является подмодулем $M_1 \times M_2$, изоморфным M_2. Таким образом, теория T_R обладает свойством совместного вложения (JEP).

Проверим выполнимость условия (4). Пусть $M, M_1, M_2 \in \mathrm{Mod}(T_R)$ и $f_1 \colon M \to M_1$, $f_2 \colon M \to M_2$ – изоморфные вложения. Т.к. класс модулей – абстрактный, т.е. замкнут относительно изоморфизмов, мы можем представить, что M_1 и M_2 пересекаются по M. Следовательно, можно определить фактор множество $M_1 \times_M M_2 = (M_1 \times M_2)\,/\{(m, -m) \colon m \in M\}$. Тогда канонические инъекции $g_1 \colon M_1 \to M_1 \times M_2$ и $g_2 \colon M_2 \to M_1 \times M_2$ индуцируют вложения $g_1^* \colon M_1 \to M_1 \times M_2$ и $g_2^* \colon M_2 \to M_1 \times M_2$ соответственно такие, что $g_1^* f_1 = g_2^* f_2$:

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[dr, "g_1^*"] & \\
M \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & & M_1 \times_M M_2 \\
 & M_2 \arrow[ur, "g_2^*"'] &
\end{tikzcd}$$

Т.е. T_R обладает свойством амальгамируемости (AP), а следовательно T_R является йонсоновской теорией. $\square$

Вопрос о существовании модельного компаньона теории R-модулей связан с когерентными кольцами. Напомним определение таких колец.

Определение 18 ([13], стр. 97)**.** *Кольцо R называется* ***когерентным (слева)****, если каждый (левосторонний) идеал в R конечного типа является конечно представимым, т.е. фактормодулем конечно порожденного свободного модуля по конечно порожденному свободному подмодулю.*

Следующие кольца являются примерами когерентных колец: левые нётеровы кольца, кольца, у которых конечно-порождённые левые идеалы являются инъективными, регулярные кольца.

Следующая теорема даёт критерий существования модельного компаньона для R-модулей.

Теорема 14 ([13], стр. 97). *Теория R-модулей имеет модельный компаньон тогда и только тогда, когда кольцо R когерентно, в этом случае она допускает модельное пополнение, являющееся полным и допускающее элиминацию кванторов.*

Заметим, что согласно теореме 14 теория T_R будет иметь модельный компаньон только в случае, если кольцо R когерентно, а так как T_R йонсоновская теория, то из теоремы 6 следует, что теория T_R, вообще говоря, не является совершенной, а совершенной является в случае, когда кольцо R когерентно.

Пусть M – произвольный R-модуль, $\varphi(\bar{x})$, $\psi(\bar{x})$ – п.п.формулы языка теории T_R, где $\psi \subset \varphi$. ***Йонсоновским инвариантом модуля*** M относительно $JSp(M)/_{\bowtie}$, будем называть следующее множество индексов:
$\{\big(\varphi(C_{[T]}) : (\varphi \wedge \psi)(C_{[T]})\big) \mid [T] \in JSp(M)/_{\bowtie}, C_{[T]}$ – семантическая модель класса $[T]\}$ и обозначать это множество через $JInv(M)$.

Следующая теорема есть уточнение теоремы 11 в рамках изучения йонсоновских теорий модулей.

Теорема 15. *Пусть M_1 и M_2 – два произвольных R-модуля, тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $M_1 \underset{JSp}{\bowtie} M_2$;

(2) $JInv(M_1) = JInv(M_2)$.

Доказательство. Пусть выполнено (1), тогда $JSp(M_1)/_{\bowtie} = JSp(M_2)/_{\bowtie}$. Предположим противное, т.е. $JInv(M_1) \neq JInv(M_2)$. Тогда найдутся две такие п.п.формулы $\varphi(\bar{x})$, $\psi(\bar{x})$ языка теории T_R и $[T] \in JSp(M_1)/_{\bowtie}$, что
$\big(\varphi(C_{[T]}) : (\varphi \wedge \psi)(C_{[T]})\big) \neq \Big(\varphi(C_{[\tilde{T}]}) : (\varphi \wedge \psi)(C_{[\tilde{T}]})\Big)$ для всех $[\tilde{T}] \in JSp(M_2)/_{\bowtie}$. Но тогда по теореме 11 $C_{[T]} \not\equiv C_{[\tilde{T}]}$ для всех $[\tilde{T}] \in JSp(M_2)/_{\bowtie}$, следовательно $[T] \notin JSp(M_2)/_{\bowtie}$, а значит $T \notin JSp(M_2)$. А это противоречит условию (1), значит наше предположение неверно.

Из (2) в (1). Пусть $JInv(M_1) = JInv(M_2)$, тогда по теореме 11 $M_1 \equiv M_2$ и согласно лемме 3 $M_1 \underset{JSp}{\bowtie} M_2$. $\square$

Класс экзистенциально замкнутых моделей индуктивной теории существует, но не всегда элементарен. Когда мы рассматриваем йонсоновские теории, элементарность этого класса совпадает с классом моделей центра рассматриваемой йонсоновской теории. К примеру, теория групп является йонсоновской и её класс экзистенциально замкнутых моделей не элементарен [14]. Но, тем не менее, изучение свойств этого класса представляет большой интерес, так как, к примеру, до сих пор неизвестно строение семантической модели этой теории. Хорошо известно, что ([15], стр. 185) любые две экзистенциально замкнутые модели, принадлежащие классу моделей любой индуктивной теории, нельзя различить между собой с помощью $\forall\exists$-предложений. Поэтому требование $\forall\exists$-полноты является необходимым условием при рассмотрении связи экзистенциально замкнутых модулей с понятием категоричности. Рассмотрим следующий результат.

Теорема 16. *Пусть T_R – $\forall\exists$-полная йонсоновская теория. Тогда, если T_R – κ-категорична, где $\kappa \geq \omega$, то T_R – совершенна.*

Доказательство. Если $\kappa \geq \omega_1$, то в силу теоремы Морли о несчётной категоричности T_R – совершенна.

Пусть T_R – ω-категоричная теория. Так как T_R полна для $\forall\exists$-предложений и, согласно предложению 3, T_R является йонсоновской теорией, то, по теореме 9, T_R^* – ω-категорична. Но T_R^* – полная теория,тогда, по теореме 3, T_R^* имеет ω-категоричный модельный компаньон T^M. Из определения модельного компаньона следует, что T_R^* и T^M взаимно модельно совместны. Заметим, что согласно лемме 2, теории T_R и T_R^* являются взаимно модельно совместными. Следовательно, по транзитивности, теории T_R и T^M также взаимно модельно совместны. Поскольку T^M – модельно полная теория, то T^M является модельным компаньоном T_R.

Для доказательства основного результата достаточно доказать, что $T_R^* = T^M$. Тогда, в силу теоремы 6, будет следовать совершенность теории T_R. Для этого нам необходимо сначала показать, что счётная модель T_R, T_R^* и T^M одна и та же.

Поскольку T_R – индуктивная теория, то, согласно предложению 2, всякая её модель вкладывается в некоторую экзистенциально замкнутую модель E' этой теории. По теореме Лёвенгейма – Скулема (вниз), существует такая модель E мощности ω, что $E \preceq E'$. Согласно лемме 1, семантическая модель C_{T_R} теории T_R является экзистенциально замкнутой, а по теореме Лёвенгейма – Скулема (вниз), существует элементарная подмодель C' модели C_{T_R}: $|C'| = \omega$, которая также является экзистенциально замкнутой моделью теорий T_R и T_R^*. Но, так как эти теории ω-категоричны, то $C' \cong E$. Так как теории T_R^* и T^M взаимно модельно совместны, то модель E теории T_R^* изоморфно вкладывается в некоторую модель A теории T^M и $(T_R^*)_\forall = (T^M)_\forall$. Но тогда E также будет являться и моделью T^M. Если бы это было не так, то, поскольку теория T^M модельно полная, то нашлось бы такое универсальное предложение $\varphi \in (T^M)_\forall$, что $A \models \varphi$ и $E \not\models \varphi$, откуда следует, что $\varphi \notin (T_R^*)_\forall$. Получили противоречие. Таким образом, $E \in \mathrm{Mod}(T_R) \cap \mathrm{Mod}(T_R^*) \cap \mathrm{Mod}(T^M)$.

Теперь покажем, что $T_R^* = T^M$. Пусть $\varphi \in T_R^*$, тогда возможны случаи: 1) $\varphi \notin T^M$, а $\neg\varphi \in T^M$; 2) $\varphi \notin T^M$ и $\neg\varphi \notin T^M$; 3) $\varphi \in T^M$. Случай 1) невозможен, т.к. $E \in \mathrm{Mod}(T^*) \cap \mathrm{Mod}(T^M)$ и мы бы имели $E \models \varphi$ и $E \models \neg\varphi$. В случае 2) имеем, что теории $T^M \cup \{\varphi\}$ и $T^M \cup \{\neg\varphi\}$ – совместны. Тогда найдутся такие модели $A_1 \in \mathrm{Mod}(T^M \cup \{\varphi\})$ и $A_2 \in \mathrm{Mod}(T^M \cup \{\neg\varphi\})$, что $A_1 \models \varphi$, а $A_2 \models \neg\varphi$. По теореме Лёвенгейма – Скулема найдутся счётные элементарные подмодели

$B_1 \prec A_1$ и $B_2 \prec A_2$. Но, так как теория T^M ω-категорична, то $B_1 \cong B_2 \cong E$ и мы имеем, что $E \models \varphi$ и $E \models \neg\varphi$. Получили противоречие. Значит второй случай невозможен. Таким образом, имеем только случай 3), где $\varphi \in T^M$.

Пусть теперь $\varphi \in T^M$. Так как теория T_R^* полна, то либо 1) $\varphi \in T_R^*$, либо 2) $\neg\varphi \in T_R^*$. Но случай 2) невозможен, так как мы бы имели, что $E \models \varphi$ и $E \models \neg\varphi$.

Итак, мы доказали, что $T_R^* = T^M$. т.е. T_R^* является модельным компаньоном теории T_R. Тогда по теореме 6 теория T_R – совершенна. □

Лемма 5. *Пусть T – йонсоновская теория. Тогда для любой модели $A \in E_T$ теория $Th_{\forall\exists}(A)$ является йонсоновской теорией.*

Доказательство можно извлечь из [6].

Хорошо известен следующий результат о счётной категоричности произвольного счётного модуля над счётным кольцом.

Теорема 17 ([16], стр. 217)**.** *Для всякого счётного кольца R и любого счётного R-модуля A следующие условия эквивалентны:*

(1) *A – $\aleph_0$-категорична;*
(2) *существует $n \in \omega$, конечные R-модули $B_0, ..., B_{n-1}$ и кардиналы $\kappa_0, ..., \kappa_{n-1} \leq \omega$ такие, что $A = \bigoplus_{i<n} B_i^{(\kappa_i)}$.*

В связи с этой теоремой мы получили аналогичный результат о счётно категоричных экзистенциально замкнутых R-модулей, когда теория этих модулей совершенна.

Теорема 18. *Пусть T_R – теория R-модулей, полная для $\forall\exists$-предложений, $M \in E_{T_R}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *$Th_{\forall\exists}(M)$ – ω-категорична;*
(2) *$Th^*_{\forall\exists}(M)$ – ω-категорична, где $Th^*_{\forall\exists}(M)$ – центр теории $Th_{\forall\exists}(M)$;*
(3) *для всякого счётного когерентного кольца R и всякого счётного R-модуля $A \in E_{T_R}$ существует $n \in \omega$, конечные R-модули $B_0, ..., B_{n-1}$ и кардиналы $\kappa_0, ..., \kappa_{n-1} \leq \omega$ такие, что $A = \bigoplus_{i<n} B_i^{(\kappa_i)}$.*

Доказательство. Эквивалентность условий (1) и (2) следует из леммы 5 и теоремы 9.

Эквивалентность условий (1) и (3) следует из теорем 16 и 17. □

References

[1] K.I. Beidar, A.V. Mikhalev, G.E. Puninski, *Logical aspects of the theory of rings and modules*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, **1**:1 (1995), 1–62. Zbl 0892.16001

[2] E.I. Bunina, A.V. Mikhalev, *Elementary equivalence of categories of modules over rings, endomorphism rings, and automorphism groups of modules*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, **10**:2 (2004), 51–134. Zbl 1073.16001

[3] A.R. Yeshkeyev, O.I. Ulbrikht, *JSp-cosemanticness and JSB property of Abelian groups*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 861—874. Zbl 1390.03036

[4] J. Barwise *Ed.*, *Handbook of mathematical logic*, Part 1. Model theory, Moscow: Nauka, 1982.

[5] T.G. Mustafin, *Generalized Jonsson Conditions and a Description of Generalized Jonsson Theories of Boolean Algebras*, Siberian Adv. Math., **10**:3 (2000), 1–58.

[6] A.R. Yeshkeyev, *Jonsson theories*, Karaganda: KarGU, 2009.

[7] W. Hodges, *Model Theory*, Cambridge: Cambridge University Press, 1993. Zbl 0789.03031

[8] G.E. Sacks, *Saturated Model Theory*, Mathematics Lecture Note Series. Reading, Mass.: W. A. Benjamin, Inc. Advanced Book Program, 1972. Zbl 0242.02054

[9] Y.T. Mustafin, *Quelques proprietes des theories de Jonsson*, The Journal of Symbolic Logic, **67**:2 (2002), 528–536. Zbl 1013.03046

[10] A.R. Yeshkeyev, G.S. Begetayeva, *Stability of* Δ*-PM-theory and its center*, Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, **4(56)** (2009), 29–34.

[11] M. Ziegler, *Model theory of modules*, Annals of Pure and Applied Logic, **26** (1984), 149–213. Zbl 0593.16019

[12] R. Villemaire, *Theories of modules closed under direct products*, The Journal of Symbolic Logic, **57**:2 (1992), 515–521. Zbl 0805.03021

[13] B. Poizat, *A Course in Model Theory: An Introduction to Contemporary Mathematical Logic*, Translated by Moses KIein, New York, NY: Springer, 2000. Zbl 0951.03002

[14] A. Macintyre, *On algebraically closed groups*, Ann. Math., **96** (1972), 53–97. Zbl 0254.20021

[15] W. Hodges, *A Shorter Model Theory*, Cambridge: Cambridge University Press, 1997. Zbl 0873.03036

[16] W. Baur, $\aleph_0$*-Categorical Modules*, The Journal of Symbolic Logic, **40** (1975), 213–220. Zbl 0309.02059

Aibat Rafhatovich Yeshkeyev
Buketov Karaganda State University,
28, Universitetskaya str.,
Karaganda, 100028, Kazakhstan
E-mail address: modth1705@mail.ru

Olga Ivanovna Ulbrikht
Buketov Karaganda State University,
28, Universitetskaya str.,
Karaganda, 100028, Kazakhstan
E-mail address: ulbrikht@mail.ru