

Р.С.Каренов

*Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: karenov@mail.ru)*

Теория массового обслуживания в моделировании и анализе задач в сфере экономики, финансов и производства

В статье рассмотрены предмет, цель и задачи теории массового обслуживания. Отмечено, что теория массового обслуживания представляет собой теоретические основы комплекса вопросов эффективности конструирования и эксплуатации систем массового обслуживания. Кроме того, системы массового обслуживания встречаются во многих областях экономики и финансов, предназначены для многократного использования при выполнении однотипных задач. Уделено внимание показателям, характеризующим эффективность функционирования систем массового обслуживания. Раскрыты возможности использования теории массового обслуживания в моделировании и последующем анализе различных задач в сфере экономики. Сделан вывод о том, что задачи теории массового обслуживания носят оптимизационный характер.

Ключевые слова: система массового обслуживания, элементы, классификация, цель и задачи, эффективность функционирования, модели, экономические задачи, исследование, теория массового обслуживания.

Теория массового обслуживания как особая прикладная отрасль современной математики

Большинство экономических задач связано с системами массового обслуживания.

Системы, в которых, с одной стороны, возникают массовые запросы (требования) на выполнение каких-либо видов услуг, а с другой — происходит удовлетворение этих запросов, называются системами массового обслуживания (СМО) [1].

СМО изучает особая прикладная отрасль математики — теория массового обслуживания, занимающаяся разработкой количественных оценок качества обслуживания, выявлением возможностей его улучшения и выбора на этой основе наилучшего варианта организации системы [2–7].

При этом под обслуживанием понимается удовлетворение поступившего в обслуживающую систему запроса на выполнение работы или услуги.

Впервые идеи и методы теории массового обслуживания были разработаны применительно к расчетам в телефонии датским ученым А.К. Эрлангом. Первая работа, посвященная анализу загруженности телефонных станций, была написана им в 1909 г. Большой вклад в разработку идей и методов теории массового обслуживания внесли ученые стран СНГ (особенно российские математики): А.Я. Хинчин, А.Н. Колмогоров, Б.В. Гнеденко, Е.С. Вентцель, И.Н. Коваленко и другие. Из зарубежных исследователей нельзя не отметить работы Д. Кендалла, К. Пальма, Ф. Поллачека, Т. Саати и других.

Круг задач, решаемых с использованием методов теории массового обслуживания, постоянно расширяется. Первоначально они использовались только в телефонии, затем стала очевидной их применимость при организации работы транспорта, сферы услуг, медицинского обслуживания, в военном деле. В настоящее время разработаны подходы к решению многих производственных задач методами теории массового обслуживания, например, задачи выбора наилучшего варианта организации работы вспомогательных и обслуживающих цехов предприятия, организации ремонта оборудования и ухода за ним, организации многостаночного обслуживания, при контроле качества продукции и решении других производственных задач.

В качестве примеров СМО в финансово-экономической сфере можно привести системы, представляющие собой банки различных типов (коммерческие, инвестиционные, ипотечные, инновационные, сберегательные), страховые организации (государственные, акционерные общества, компании, фирмы, ассоциации, кооперативы), налоговые инспекции, аудиторские службы, различные системы связи (в том числе телефонные станции), погрузочно-разгрузочные комплексы (порты, товарные станции), автозаправочные станции, различные предприятия и организации сферы обслуживания (магазины, справочные бюро, парикмахерские, билетные кассы, пункты по обмену валюты, ремонтные мастерские, больницы). Такие системы, как компьютерные сети, системы сбора, хранения и об-

работки информации, транспортные системы, автоматизированные производственные участки, точные линии, различные военные системы, в частности системы противовоздушной или противоракетной обороны, также могут рассматриваться как своеобразные СМО.

Основные элементы системы массового обслуживания

Любая система массового обслуживания может включать в себя следующие элементы [8]:

1. Входящий поток требований — это совокупность заявок, поступающих в систему и нуждающихся в обслуживании. Например, поток покупателей в магазине; станки, требующие ремонта и т. д.

Каждое требование, или заявка, — это отдельный запрос на выполнение какой-либо работы (услуги). Источником требования может быть как человек, так и прибор или единица оборудования.

По своему характеру потоки требований бывают регулярными и стохастическими (вероятностными). Если требования поступают в систему по одному через равные промежутки времени t , то такой поток является регулярным. Интенсивность потока требований в этом случае равна $\lambda = 1/t$. С таким потоком можно встретиться в системах с расписанием, когда оно строго выполняется, в системах с ленточным конвейером. Однако практически регулярные потоки встречаются не часто, поэтому в теории массового обслуживания основное внимание уделяется стохастическим потокам, т.е. таким потокам, для которых моменты появления требований являются случайными величинами. Случайные величины описываются законами распределения их вероятностей. Потоки требований могут иметь различные законы распределения вероятностей — нормальное, показательное, бэта-распределение и др. При этом плотность поступления требований на обслуживание (λ) измеряется математическим ожиданием числа требований, поступающих в систему в единицу времени.

2. Очередь. В тех случаях, когда поступающие в систему массового обслуживания требования не могут быть удовлетворены немедленно, возникает очередь. В такой ситуации интерес может представлять длина этой очереди, порядок, по которому ожидающие требования направляются на обслуживание (дисциплина очереди), время ожидания. Заметим, что очередь присуща не всякой системе массового обслуживания. Существуют такие системы, в которых очередь не допускается, и требование, заставшее систему занятой, не обслуживается (получает отказ).

3. Важным элементом СМО является совокупность обслуживающих единиц (каналов обслуживания) — это лица или приборы, производящие работу по выполнению поступившего требования. Этот элемент присутствует в любой системе массового обслуживания. От обслуживающего устройства зависит не только время, необходимое на обслуживание одного требования, но и длина очереди, время ожидания.

4. Выходящий поток обслуженных требований. Этот элемент может оказаться очень важным в тех случаях, когда выходящий поток обслуженных требований является входящим для другой системы массового обслуживания. Так, например, значительная часть пассажиров, прибывших поездом дальнего следования, направляется на стоянку такси.

Как правило, число требований, поступающих в систему массового обслуживания за какой-либо промежуток времени, и время, необходимое для обслуживания одного требования, являются случайными величинами. Функционирование системы массового обслуживания в данном случае представляет собой некоторый случайный процесс. Именно такими системами и занимается теория массового обслуживания.

Теория массового обслуживания — это один из разделов прикладной математики, в котором используется теория случайных процессов.

Классификация систем массового обслуживания

СМО классифицируют по разным признакам [9–11].

По числу каналов или приборов системы делятся на одноканальные и многоканальные.

По месту нахождения источника требований системы массового обслуживания делятся на разомкнутые, когда источник находится вне системы, и замкнутые, когда источник находится в самой системе. К последнему виду относится, например, станочный участок, в котором станки являются источником неисправностей, а следовательно, и требований на их обслуживание.

Одной из форм классификации систем массового обслуживания является кодовая (символьная) классификация Д. Кендалла. При этой классификации характеристику системы записывают в виде

трех, четырех или пяти символов, например $A|B|S$, где A — тип распределения входящего потока требований; B — тип распределения времени обслуживания; S — число каналов обслуживания.

Для экспоненциального распределения принимают символ M , для любого (произвольного) распределения — символ G . Запись $M|M|3$ означает, что входящий поток требований пуассоновский (простейший), время обслуживания распределено по экспоненциальному закону, в системе имеется три канала обслуживания.

Четвертый символ указывает допустимую длину очереди, а пятый — порядок отбора (приоритета) требований.

В зависимости от допустимости и характера формирования очереди различают:

- СМО с отказами. Формирование очереди не разрешено, поэтому заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и теряется. Пример: АТС, выполнение заказов к определенному сроку, поточные линии;

- СМО с неограниченным ожиданием. Разрешается создание очереди неограниченной длины. Такая СМО обслуживает все заявки, хотя время ожидания обслуживания может оказаться очень большим;

- СМО смешанного типа. Возможны различные ограничения, например, на максимальную длину очереди, на время пребывания заявки в очереди или системе и т.д. В СМО с ограничением длины очереди заявка получает отказ, если она приходит в момент, когда все места в очереди заняты. Заявка, попавшая в очередь, обязательно обслуживается. В СМО с ограничением времени пребывания в очереди (СМО с «нетерпеливыми» клиентами) заявка ставится в очередь и ожидает некоторое случайное время. Если за это время она не попадает в канал обслуживания, то покидает очередь необслуженной. В СМО с ограничением времени пребывания в системе заявка может получить отказ не только находясь в очереди, но и на обслуживании. Такой вариант СМО применяется для моделирования входного контроля заготовок и имитации брака на операциях при обработке деталей.

В СМО с очередью могут быть следующие варианты дисциплины поступления заявок из очереди на обслуживание: а) в порядке поступления (первым пришел — первым обслужился) — наиболее естественная дисциплина обслуживания; б) в порядке, обратном поступлению (последним пришел — первым обслужился); например, выемка деталей, заготовок из тары, бункера, склада, обработка на ЭВМ самой свежей информации и отбрасывание устаревшей и т.п.; в) в соответствии с приоритетом; при поступлении заявки с более высоким приоритетом обслуживание заявки с низким приоритетом прерывается совсем или на время обслуживания приоритетной заявки; г) в случайном порядке.

Важнейшим понятием в анализе СМО является понятие состояния системы. Состояние есть некоторое описание системы, на основании которого можно предсказать ее будущее поведение.

Предмет, цель и задачи теории массового обслуживания

Предметом изучения теории массового обслуживания является СМО.

Цель теории массового обслуживания — выработка рекомендаций по рациональному построению СМО, рациональной организации их работы и регулированию потока заявок для обеспечения высокой эффективности функционирования СМО.

Для достижения этой цели ставятся задачи теории массового обслуживания, состоящие в установлении зависимостей эффективности функционирования СМО от ее организации (параметров): характера потока заявок, числа каналов и их производительности, правил работы СМО [13].

Каждая СМО, в зависимости от своих параметров (характера потока заявок, числа каналов обслуживания и их производительности) и правил организации ее работы, обладает определенной эффективностью функционирования (пропускной способностью), позволяющей ей более или менее успешно выполнять предназначенные ей функции. Случайность характера потока заявок и длительности их обслуживания порождает в СМО случайный процесс, для изучения которого необходимы построение и анализ его математической модели. Изучение функционирования СМО упрощается, если случайный процесс является марковским (процессом без последствия, или без памяти), когда работа СМО легко описывается с помощью конечных систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка, а в предельном режиме (при достаточно длительном функционировании СМО) — посредством конечных систем линейных алгебраических уравнений. В итоге показатели эффективности функционирования СМО выражаются через параметры СМО, потока заявок и дисциплины работы СМО.

Из теории известно, чтобы случайный процесс являлся марковским, необходимо и достаточно, чтобы все потоки событий (потоки заявок, потоки обслуживаний заявок и др.), под воздействием которых происходят переходы системы из состояния в состояние, являлись пуассоновскими, т.е. обладали свойствами последействия (для любых двух непересекающихся промежутков времени число событий, наступающих за один из них, не зависит от числа событий, наступающих за другой) и ординарности (вероятность наступления за элементарный, или малый, промежуток времени более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью наступления за этот промежуток времени одного события). Для простейшего пуассоновского потока случайная величина T (промежуток времени между двумя соседними событиями) распределена по показательному закону, представляя собой плотность ее распределения или дифференциальную функцию распределения.

Если же в СМО характер потоков отличен от пуассоновского, то ее характеристики эффективности можно определить приближенно с помощью марковской теории массового обслуживания, причем тем точнее, чем сложнее СМО, чем больше в ней каналов обслуживания. В большинстве случаев для обоснованных рекомендаций по практическому управлению СМО совсем не требуется знаний точных ее характеристик, вполне достаточно иметь их приближенные значения.

Эффективность функционирования СМО характеризуют три основные группы показателей: эффективность использования СМО — абсолютная или относительная пропускные способности, средняя продолжительность периода занятости СМО, коэффициент использования СМО; качество обслуживания заявок — среднее время (среднее число заявок, закон распределения) ожидания заявки в очереди или пребывания заявки в СМО; вероятность отказа заявке в обслуживании без ожидания; вероятность того, что поступившая заявка немедленно примется к исполнению; эффективность функционирования пары «СМО–потребитель», причем под потребителем понимается как совокупность заявок или их некоторый источник (например, средний доход, приносимый СМО за единицу времени эксплуатации, и др.).

Оценка и оптимизация качества обслуживания в коммерческом банке, являющегося примером разомкнутой системы массового обслуживания с ожиданием

Коммерческий банк является примером разомкнутой системы массового обслуживания с ожиданием, в которой поступающий поток требований клиентов не ограничен. Для оценки и оптимизации качества обслуживания в коммерческом банке можно воспользоваться аналитическим методом теории массового обслуживания. Данный метод позволяет установить зависимость между заданными условиями работы банка (число специалистов, их производительность, правила работы, характер потока клиентов) и интересующими характеристиками — показателями эффективности СМО, описывающими с той или другой точки зрения ее способность справляться с потоком клиентов (среднее число клиентов, обслуживаемых специалистом в единицу времени; среднее число занятых обслуживанием специалистов; средняя длина очереди и среднее время ожидания каждым клиентом начала обслуживания и др.). В связи с этим целью оценки функционирования банка является установление взаимосвязи между потоками клиентов, числом специалистов, производительностью отдельного специалиста и эффективностью обслуживания для выявления направлений повышения качества обслуживания клиентов.

Алгоритм расчета некоторых показателей качества обслуживания коммерческого банка можно рассматривать как разомкнутую систему массового обслуживания с ожиданием. При изучении таких систем рассчитываются различные показатели эффективности обслуживающей системы. В качестве основных показателей могут быть вероятность того, что все каналы свободны или заняты, математическое ожидание длины очереди (средняя длина очереди), коэффициенты занятости и простоя каналов обслуживания и др.

Введем в рассмотрение параметр $\alpha = \lambda / \mu$. Если $\alpha / n < 1$, то очередь не может расти безгранично. Это условие имеет следующий смысл: λ — среднее число клиентов, поступающих за единицу времени; $1/\mu$ — среднее время обслуживания одним специалистом одного клиента, тогда $\alpha = \lambda \times 1/\mu$ — среднее число специалистов, которое необходимо иметь, чтобы обслуживать в единицу времени всех входящих клиентов. Поэтому условие $\alpha / n < 1$ означает, что число обслуживающих специалистов должно быть больше среднего числа специалистов, необходимых для того, чтобы за единицу времени обслужить всех поступающих клиентов.

Совокупность показателей качества функционирования коммерческого банка как разомкнутой системы массового обслуживания с ожиданием представлена в таблице 1.

Т а б л и ц а 1

Расчет показателей качества функционирования банка как разомкнутой системы массового обслуживания с ожиданием

№ п/п	Показатели	Формула
1	Вероятность того, что все специалисты свободны	$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!(1-\alpha/n)} \right]^{-1}$
2	Вероятность того, что обслуживанием занято ровно k специалистов (при условии, что общее число клиентов, находящихся на обслуживании, не превосходит числа обслуживающих специалистов)	$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} \times P_0$ при $1 \leq k \leq n$
3	Вероятность того, что в системе находится k клиентов в случае, когда их число больше числа обслуживающих специалистов	$P_k = \frac{\alpha^k}{n!n^{k-n}} \times P_0$ при $k \geq n$
4	Вероятность того, что все специалисты заняты обслуживанием клиентов	$P_k = \frac{\alpha^k}{n!(1-\alpha/n)} \times P_0$ $(\alpha/n < 1)$
5	Среднее время ожидания клиентом начала обслуживания в системе	$\bar{t}_{ож} = \frac{P_n}{\mu(n-\alpha)}$ $(\alpha/n < 1)$
6	Средняя длина очереди	$\bar{L}_{оч} = \frac{\alpha P_n}{n(1-\alpha/n)} = \frac{\alpha^{n+1}}{n!n(1-\alpha/n)^2} \times P_0$ $(\alpha/n < 1)$
7	Среднее число свободных от обслуживания специалистов	$\bar{N}_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \times \alpha^k P_0$
8	Коэффициент простоя специалистов	$K_{np} = \frac{\bar{N}_0}{n}$
9	Среднее число занятых обслуживанием специалистов	$\bar{N}_3 = n - \bar{N}_0$
10	Коэффициент загрузки специалистов	$K_3 = \frac{\bar{N}_3}{n}$

В работе [14] рассмотрено применение аналитического метода теории массового обслуживания на примере деятельности четырех отделений коммерческого банка. На основе произведенных расчетов автором статьи сформулированы следующие выводы:

1. Применение аналитического метода теории массового обслуживания подтверждает существование тесной взаимосвязи между потоками клиентов, количеством и производительностью специалистов банка и эффективностью обслуживания потребителей банковских услуг.

2. С помощью методов теории массового обслуживания могут быть решены многие задачи планирования, оценки и оптимизации качества обслуживания клиентов в коммерческом банке, в частности, могут вырабатываться рекомендации по рациональному построению обслуживающих систем банка, организации их работы и регулированию потока заявок при минимальных затратах, связанных с простым обслуживающих каналов, в целях обеспечения конкурентоспособности и высокой эффективности функционирования коммерческого банка.

*Решение задач из области маркетинга методами теории массового обслуживания
(системы с отказами)*

Методами теории массового обслуживания могут быть решены многие задачи из области маркетинга. Так, в организации торговли эти методы позволяют определить оптимальное количество торговых точек данного профиля, численность продавцов, частоту завоза товаров и другие параметры. Другим характерным примером систем массового обслуживания могут служить склады или базы снабженческо-сбытовых организаций, и задача теории массового обслуживания сводится к тому, чтобы установить оптимальное соотношение между числом поступающих на базу требований на обслуживание и числом обслуживающих устройств, при котором суммарные расходы на обслуживание и убытки от простоя транспорта были бы минимальными. Теория массового обслуживания может найти применение и при расчете площади складских помещений, при этом складская площадь рассматривается как обслуживающее устройство, а прибытие транспортных средств под выгрузку — как требование [15].

При рассмотрении возможностей применения теории массового обслуживания в маркетинге встречаются системы с отказом. В СМО с отказами требования, поступающие в момент, когда все каналы обслуживания заняты, получают отказ и утрачиваются.

Поскольку очередь в таких системах не образуется, то основной характеристикой качества обслуживания потока требований n -канальной системы с отказом служит доля потерянных требований P_n . Этот показатель рассчитывается по формуле

$$P_n = \frac{\frac{\alpha^n}{n!}}{1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots + \frac{\alpha^n}{n!}}, \quad (1)$$

и среднее число занятых каналов (\bar{n}) равно

$$\bar{n} = \alpha(1 - P_n). \quad (2)$$

Величину $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\tau}{T}$ называют параметром загрузки. При его расчетах показатели λ и μ или T и τ должны иметь одинаковую размерность.

Для одноканальной системы массового обслуживания оба показателя эффективности совпадают:

$$P_1 = \frac{\alpha}{1 + \alpha} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\tau}{\tau + T}; \quad \bar{n} = \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \right) = \frac{\alpha}{1 + \alpha} = P_1.$$

Так как обслуживающий канал только один, среднее число занятых каналов \bar{n} означает долю времени занятости канала.

Пусть стол заказов принимает заказы по одному телефону. Среднее число поступающих в течение часа заказов — 70, а среднее время оформления заказа — 2 мин. Необходимо определить показатели системы массового обслуживания. Из задачи следует, что интенсивность поступления потока заказов равна $\lambda = \frac{70}{1 \text{ ч}} = \frac{70}{60 \text{ мин}}$, а среднее время между двумя очередными заказами равно

$$T = \frac{1}{70} \text{ ч} = \frac{60}{70} \text{ мин}. \quad \text{В то же время интенсивность обслуживания составляет } \mu = \frac{1}{2 \text{ мин}} = \frac{60}{2 \text{ ч}} = 30 \frac{1}{\text{ч}}$$

при среднем времени обслуживания $\tau = 2 \text{ мин} = \frac{2}{60} \text{ ч} = \frac{1}{30} \text{ ч}$. По однородным данным рассчитаем

параметр загрузки канала: $\alpha = \frac{70 \frac{1}{\text{ч}}}{30 \frac{1}{\text{ч}}} = \frac{2 \text{ мин}}{\frac{60}{70} \text{ мин}} = \frac{7}{3}$. Следовательно, доля потерянных заказов и занято-

сти канала равна $P_1 = \frac{\frac{7}{3}}{1 + \frac{7}{3}} = 0,7$. Этот результат означает, что в 70 % случаев невозможно сделать

заказ, так как телефон оказывается занятым, и вместе с тем стол заказов лишь 70 % времени занят оформлением заказа, а 30 % времени бездействует.

Для двухканальной системы с отказом доля потерянных требований будет равна

$$P_2 = \frac{\alpha^2}{2 + 2\alpha + \alpha^2}. \quad (3)$$

Показатель P_2 означает также долю времени, когда обслуживанием заняты оба канала одновременно. Среднее число занятых каналов определяется по формуле

$$\bar{n} = \alpha(1 - P_2). \quad (4)$$

Рассмотрим теперь случай, когда стол заказов принимает заказы по двум телефонам. Нужно определить показатели системы массового обслуживания.

По формулам двухканальной системы (3) и (4) для $\alpha = \frac{7}{3}$ находим: $P_2 = \frac{\frac{49}{9}}{2 + \frac{14}{3} + \frac{49}{9}} = \frac{49}{109} \approx 0,45$;

$\bar{n} = \frac{7}{3} \cdot \frac{60}{109} \approx 1,28$. Следовательно, оба телефона оказываются занятыми и заказ сделать невозможно в 45 % случаев. Вместе с тем в среднем лишь один из двух обслуживающих работников занят оформлением заказов, а второй бездействует.

Формулы (1) и (2) для показателей эффективности систем массового обслуживания с отказом справедливы в предположении пуассоновского потока требований и произвольного закона распределения времени обслуживания. Это означает, что пропускная способность систем с отказом при пуассоновском потоке не зависит от вида закона распределения времени обслуживания каждого канала, а зависит только от среднего значения времени обслуживания τ (интенсивности μ).

Показатель P_n , рассчитываемый по формуле (1), означает также долю времени, когда в системе заняты обслуживанием все n -каналов. Наряду с P_n можно определить группу показателей $P_0, P_1, \dots, P_k, \dots, P_n$, отражающих долю времени, когда в системе заняты обслуживанием $0, 1, \dots, k, \dots, n$ каналов:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0 = \frac{\alpha^k}{k!} \left(\sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!} \right)^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Первый из этих показателей — показатель P_0 позволяет оценить долю времени простоя n -канальной системы массового обслуживания:

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^n \frac{\alpha^i}{i!} \right)^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots + \frac{\alpha^n}{n!}}. \quad (6)$$

Теперь определим долю времени занятости обслуживанием одновременно двух работников стола заказов, одного работника и долю времени, когда оба работника свободны от обслуживания, если $\lambda = 70 \frac{1}{\text{ч}}$, $\tau = 2$ мин. Как уже было найдено, $\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{70}{30} = \frac{7}{3}$. По формуле (6) доля времени простоя

двухканальной системы обслуживания составляет $P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!}} = \frac{2}{2 + 2\alpha + \alpha^2} = \frac{2}{2 + \frac{14}{3} + \frac{49}{9}} = \frac{18}{109} \approx 0,16$. По формуле (5) определим долю времени занятости одного из двух работников:

$P_1 = \frac{\alpha}{1!} P_0 = \frac{7}{3} \cdot \frac{18}{109} = \frac{42}{109} \approx 0,38$ и долю времени занятости двух работников:

$P_2 = \frac{\alpha^2}{2!} P_0 = \frac{49}{9 \cdot 2} \cdot \frac{18}{109} = \frac{49}{109} \approx 0,46$.

Системы с отказом без ожидания в очереди наблюдаются в практике массового обслуживания сравнительно редко. Гораздо чаще встречаются системы с очередью и системы смешанного типа.

Анализ работы предприятий общественного питания методами теории массового обслуживания (СМО смешанного типа)

Наиболее часто на практике встречаются системы массового обслуживания, в которых возможна очередь на обслуживание и возможен отказ в обслуживании. Типичными примерами могут служить системы обслуживания, в которых ограничено число мест в очереди или время пребывания в очереди. Так, посетитель предприятий общественного питания может рассчитывать лишь на определенное число мест, или время его обслуживания может быть ограничено временем обеденного перерыва. Пусть число мест в очереди равно m , а допустимое время ожидания в очереди равно t_0 . Если поступающее требование застает свободным канал обслуживания или место в очереди, то оно остается в системе, в противном случае происходит потеря требования. При ограниченном времени ожидания потеря требования происходит в том случае, когда время его пребывания в очереди превышает t_0 .

Показатели эффективности обслуживания в системах смешанного типа рассчитываются по более сложным формулам, чем в системах с отказом без очереди или с очередью без отказа [16].

Так, для n -канальной системы при наличии m -мест в очереди, пуассоновском потоке требований и экспоненциальном законе обслуживания доля времени простоя системы определяется следующим образом:

$$P_0 = \left[1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\alpha^n}{n!} \left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha^2}{n^2} + \dots + \frac{\alpha^m}{n^m} \right) \right]^{-1}, \quad (7)$$

средняя длина очереди равна

$$L_n = \frac{\alpha^{n+1} P_0}{(n-\alpha)^2 (n-1)!} \left[1 - 2 \left(\frac{\alpha}{n} \right)^m + \left(\frac{\alpha}{n} \right)^{m+1} \right], \quad (8)$$

доля потерянных требований составляет

$$P_{n+m} = \frac{\alpha^{n+m}}{n! n^m} P_0, \quad (9)$$

а показатели занятости каналов рассчитывают по формуле $P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0$, $k = 1, 2, \dots, n$. В частности, для одноканальной системы обслуживания $n=1$ с ограниченной длиной очереди m эти показатели составят: $P_0 = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{m+2}}$; $L_1 = \frac{\alpha^2}{1-\alpha} \frac{1-2\alpha^m + \alpha^{m+1}}{1-\alpha^{m+2}}$. Нетрудно заметить, что при $m=0$ равенства (7)–(9) приводят нас к показателям формул (1)–(6) систем с отказом без очереди (формулам Эрланга), а при $m=\infty$ — к показателям систем с очередью без отказа. В случае, когда время ожидания для каждого требования ограничено величиной t_0 , для пуассоновского потока требований и экспоненциального закона обслуживания показатели пропускной способности n -канальной системы определяются формулами

$$P_0 = \left(1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\alpha^n}{n!} \times \frac{n-\alpha \ell^{-\mu(n-\alpha)t_0}}{n-\alpha} \right)^{-1}; \quad L_n = \frac{n - [n + \lambda t_0 (n-\alpha)] \ell^{-\mu(n-\alpha)t_0}}{(n-\alpha)^2 n!} \tau P_0.$$

Доля потерянных требований составляет $P = \frac{\alpha^{n+1} P_0}{n!} \ell^{-n\mu(n-\alpha)}$. В случае когда $\alpha = n$, формулы показателей пропускной способности упрощаются:

$$P_0 = \left[1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\alpha^n}{n!} (1 + \lambda t_0) \right]^{-1}; \quad L_n = \frac{\alpha^n}{n!} \left(1 + \frac{\lambda t_0}{2} \right) t_0 P_0; \quad P = \frac{\alpha^n}{n!} P_0.$$

Применение методов теории массового обслуживания к решению задач из практики горного дела

По мнению специалистов [17–19], большинство задач теории массового обслуживания, которые встречаются в практике горного дела, можно сгруппировать следующим образом:

а) система массового обслуживания с отказом. Это наиболее простая система, когда заявка на обслуживание не может ждать и уходит из системы, если все аппараты заняты в момент поступления заявки. Практически система такого рода редко встречается в горном деле;

б) система с ожиданием, ограниченной длиной очереди и неограниченным входящим потоком. Этот случай является обобщением предыдущего. Если при поступлении заявки все аппараты заняты, то образуется очередь из заявок, ожидающих начала обслуживания. Заявка покидает систему в том случае, когда очередь превышает заданную величину;

в) система с ожиданием, ограниченной длиной очереди, неограниченным входящим потоком и поступлением заявок группами;

г) система с ожиданием и ограниченной очередью. В этом случае заявки могут накапливаться в очереди без ограничений, если пропускная способность аппаратов системы мала, а заявки поступают непрерывно. Такая система имеет наибольшее практическое распространение в производстве. Эта система рассмотрена на примерах анализа численности рабочих по ремонту горношахтного оборудования и работы подземного транспорта;

д) система с ожиданием и ограниченным входящим потоком. Поток заявок можно рассматривать ограниченным в том случае, когда максимальное число заявок, которое при любом качестве обслуживания может поступить в систему, не превышает двух-трех десятков. Например, не может быть большим количество станков в ремонтном цехе и очистных забоев на шахте, выход из строя которых создает ограниченный поток заявок на восстановление. Увеличение числа объектов ремонта приводит к необходимости рассмотрения системы с неограниченным входящим потоком;

е) система с неограниченным числом аппаратов.

Ниже нами рассмотрены конкретные примеры постановки и решения отдельных задач из практики горного дела по стандартным формулам теории массового обслуживания:

1. Анализ использования штата рабочих электромеханической службы на угольной шахте.

Выход из строя электромеханического оборудования на шахтах носит неравномерный, случайный характер, что затрудняет определение численности рабочих электромеханической службы и нередко приводит к нерациональному использованию рабочих отдельных профессий.

Процесс ремонта оборудования является процессом массового обслуживания. При большом количестве действующего оборудования на шахте, например, электросверл, отбойных молотков, пусковой аппаратуры, вентиляторов, насосов и др. в мастерскую поступает неисправное оборудование на ремонт в виде потока, одно за другим, в случайные моменты времени и большей частью независимо друг от друга. Такой поток заявок на ремонт оборудования в мастерских, устранение неисправности в линии коммуникации (электросети, трубопроводов), ликвидацию отказов оборудования на производственных участках можно отнести с некоторым приближением к простейшему потоку, который описывается законом Пуассона. Интервалы времени между поступлением заявок на ремонт распределены по показательному закону. Так как процесс производства непрерывен, то при малочисленности рабочих по ремонту может скопиться неограниченное количество неисправного оборудования. Поэтому задачу по анализу использования штата рабочих по ремонту можно отнести к типу задач с неограниченным входящим потоком. Рабочих электромеханической службы можно рассматривать в качестве аппаратов, обслуживающих заявки на ремонт оборудования или линии коммуникаций. Ремонт одной единицы оборудования может выполняться одним рабочим или группой рабочих в составе двух-трех человек. Поэтому под аппаратом можно понимать одного рабочего или звено рабочих, в зависимости от вида заявок на ремонт.

Время обслуживания, т. е. время на ремонт единицы оборудования, есть случайная величина, так как зависит от характера неисправности и ряда других факторов. При анализе организации ремонта стационарных установок, электросетей и трубопроводов время обслуживания должно включать в себя, кроме времени ремонта, также время на передачу информации и передвижение рабочих.

При обычных расчетах ограничиваются определением среднего числа рабочих, которого было бы достаточно, чтобы в мастерских не скапливалось значительное количество неисправного оборудования. Однако среднее число рабочих еще не гарантирует того, что система ремонта хорошо организована и справляется со своими задачами. Может оказаться, что время ожидания начала устранения неисправности будет очень велико. Длительное время ожидания начала ремонта в некоторых

случаях вообще недопустимо, например, при устранении неисправностей в силовой электросети, в трубопроводах, в шахтных стационарных установках.

Нами проанализирован следующий пример. Пусть среднее число заявок в течение смены на ремонт, т.е. интенсивность поступления заявок λ равна 4; среднее время ремонта $\frac{1}{\mu}$ одним рабочим одной единицы оборудования (или одной заявки на устранение неисправности) равно 0,57 смены.

В среднем можно грубо определить необходимое число рабочих по ремонту оборудования определенного вида. Число рабочих не должно быть меньше отношения $\frac{\lambda}{\mu}$, которое характеризует пропускную способность системы обслуживания $\frac{\lambda}{\mu} = 4 \times 0,57 = 2,28$. Следовательно, необходимо в среднем иметь более двух рабочих.

Теперь рассмотрим, как будет выглядеть процесс обслуживания ремонта тремя рабочими. Вначале вычислим вероятность того, что все рабочие свободны одновременно:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{\mu}{(n-1)!(n\mu - \lambda)} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} \text{ при } \frac{\lambda}{n\mu} < 1;$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{3-1} \frac{1}{k!} (4 \times 0,57)^k + \frac{1,75}{(3-1)!(3 \times 1,75 - 4)} (4 \times 0,57)^3} = 0,07.$$

Определим вероятность того, что все рабочие заняты одновременно:

$$\Pi = \frac{\mu p_0}{(n-1)!(n\mu - \lambda)} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \text{ при } \frac{\lambda}{n\mu} < 1; \quad \Pi = \frac{1,75 \times 0,07}{(3-1)!(3 \times 1,75 - 4)} (4 \times 0,57)^3 = 0,59.$$

Следовательно, вероятность того, что в момент поступления очередной заявки на ремонт все трое рабочих будут заняты, довольно высока и равна 0,59. Только в семи случаях из ста все трое рабочих будут свободны одновременно. Определим вероятность того, что время ожидания начала ремонта очередного оборудования будет больше смены:

$$P(\beta > t) = \Pi e^{-(n\mu - \lambda)t} \text{ при } t \geq 0; \quad P(\beta > t) = 0,59 e^{-(3 \times 1,75 - 4) \times 1} = 0,31.$$

Следовательно, каждая третья заявка на ремонт будет ожидать начала ремонта больше смены. Среднее время ожидания начала ремонта составит

$$T_n = \frac{\Pi}{n\mu - \lambda} \text{ при } \frac{\lambda}{n\mu} < 1; \quad T_n = \frac{0,59}{3 \times 1,75 - 4} = 0,47 \text{ смены.}$$

Таким образом, в среднем каждая заявка на ремонт будет ожидать около половины смены. Найдем среднее число единиц оборудования, ожидающих начала ремонта:

$$M_1 = \frac{p_n \lambda}{n\mu \left(1 - \frac{\lambda}{n\mu}\right)^2},$$

где

$$p_n = \frac{p_0}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n; \quad (10)$$

$$p_n = \frac{0,07}{3!} (4 \times 0,57)^3 = 0,14; \quad M_1 = \frac{0,14 \times 4}{3 \times 1,75 \left(1 - \frac{4}{3 \times 1,75}\right)^2} = 1,88.$$

Далее определим среднее число свободных рабочих M_3 и коэффициент простоя рабочих $\frac{M_3}{n}$:

$$M_3 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0; \quad (11)$$

$$M_3 = \sum_{k=0}^{3-1} \frac{3-k}{k!} (4 \times 0,57)^k \times 0,07 = 0,71; \quad \frac{M_3}{n} = \frac{0,71}{3} = 0,24.$$

Следовательно, каждый из трех рабочих свободен в среднем 24 % рабочего времени.

Все эти вычисления показывают, что если условия работы позволяют принять среднее время ожидания начала ремонта равным половине смены, то ремонт обеспечат трое рабочих, при этом их загрузка будет составлять 76 %. Для случая, когда заявки могут ждать начала обслуживания не более 25–30 мин, выполним аналогичные расчеты для ремонтных бригад, состоящих из четырех и пяти человек. Результаты расчетов показаны в таблице 2.

Т а б л и ц а 2

Расчетная таблица

Характеристика системы обслуживания	Численность рабочих		
	3	4	5
Вероятность того, что все рабочие заняты	0,59	0,25	0,10
Среднее время ожидания начала ремонта, смен	0,47	0,08	0,02
Среднее число единиц оборудования, ожидающих начала ремонта	1,88	0,34	0,08
Коэффициент простоя рабочих	0,24	0,43	0,54

Из таблицы 2 видно, что данное условие может быть выполнено при работе 5 рабочих: время ожидания начала ремонта составит 0,02 смены, или 8,4 мин. Наряду с этим время простоев рабочих возрастет до 54 %.

2. Расчет количества самосвалов при транспортировании ими угля, руды, породы, строительных материалов на открытых горных работах.

При транспортировании угля, руды, породы, строительных материалов самосвалами возникает необходимость в расчете оптимального их числа, при котором достигается минимум простоев транспортных средств и погрузочного оборудования.

Например, недопустимы простои такой производительной машины, как экскаватор. Простои экскаватора из-за задержек на транспорте можно устранить, если к нему прикрепить большое число самосвалов. Вместе с тем избыточное число самосвалов влечет за собой значительные их простои.

Систему обслуживания экскаватора с использованием самосвалов можно проанализировать на основе аналитических формул теории массового обслуживания. Обслуживающим аппаратом в этом случае будет самосвал, требованием на обслуживание — заявка на подачу самосвала под загрузку и вывоз груза. Заявки поступают одна за другой по мере окончания загрузки очередного самосвала и выезда его с места погрузки. В интервал времени между поступлениями заявок на обслуживание входит время между моментом выезда груженого самосвала с места погрузки и началом готовности экскаватора к загрузке очередного самосвала, время непосредственно загрузки самосвала и выезда его с погрузочной площадки. Это время зависит от ряда факторов и является случайной величиной. Величина, обратная среднему времени между моментами поступления заявок, является интенсивностью потока заявок. Время обслуживания заявки состоит из времени загрузки самосвала, транспортирования, разгрузки и возвращения порожнего самосвала к погрузочной площадке. Это время также является случайной величиной. Из данных хронометражных наблюдений можно определить среднее время между моментами поступления заявок на обслуживание и среднее время обслуживания. При обработке результатов наблюдений должны быть учтены потери времени на ликвидацию неисправностей экскаватора и самосвалов. При большой емкости ковша экскаватора, когда на загрузку самосвала потребуется небольшое число черпаний, поток заявок можно рассматривать как простейший, подчиненный закону Пуассона. Определим оптимальное число самосвалов для следующих условий: среднее время загрузки одного самосвала составляет 3 мин, т.е. интенсивность потока заявок будет равна $\lambda = \frac{1}{3} \cdot 60 = 20$ заявок в час; среднее время загрузки, транспортирования, разгрузки и возвраще-

ния порожнего самосвала под погрузку составляет 11 мин, т.е. $\mu = \frac{60}{11} = 5,45$ заявок в час. Для анализа процесса обслуживания воспользуемся следующими характеристиками:

1. Коэффициент простоя экскаватора $\frac{M_1}{M_2}$, где M_1 — среднее число требований, ожидающих начала обслуживания; M_2 — среднее число самосвалов, обслуживающих требования на вывоз груза, плюс число самосвалов, которое мог бы дополнительно загрузить экскаватор.

2. Величину M_1 можно интерпретировать как среднее число «порций» горной массы (в единицах грузоподъемности самосвала), которое мог бы погрузить экскаватор дополнительно при достаточном числе самосвалов. Величина M_1 определяется по формуле (10). Величина M_2 равна

$$M_2 = M_1 + \frac{np_n}{1 - \frac{\lambda}{n\mu}} + p_0 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k.$$

Среднее число простаивающих самосвалов M_3 определяется по формуле (11).

3. Коэффициент простоя самосвалов $\frac{M_3}{n}$.

Показатели, характеризующие использование экскаватора и самосвалов, приведены в таблице 3.

Т а б л и ц а 3

Расчетные показатели, отражающие эффективность эксплуатации экскаватора и самосвалов

Показатели	Количество самосвалов			
	4	5	6	7
Коэффициент простоя экскаватора	0,71	0,24	0,08	0,03
Среднее число простаивающих самосвалов, M_3	0,33	1,33	2,33	3,33
Коэффициент простоя экскаватора	0,08	0,26	0,39	0,47

Из таблицы 3 видно, что для обеспечения высокой загрузки экскаватора необходимо 5–6 самосвалов. При этом простой экскаватора будут находиться в пределах 8–24 %, простои самосвалов — 26–39 %. При работе семи самосвалов значительно возрастают их простои — до 47 %.

С помощью методов теории массового обслуживания можно также проанализировать различные способы организации закрепления самосвалов за экскаваторами и варианты маршрутов автотранспорта.

Список литературы

- 1 Барбаумов В.Е., Ермаков В.И., Кривенцова Н.Н. и др. Справочник по математике для экономистов. — М.: Высш. шк., 1987. — С. 315.
- 2 Четыркин Е.М. Теория массового обслуживания и ее применение в экономике. — М.: Статистика, 1971. — 104 с.
- 3 Лукин А.И. Системы массового обслуживания: Анализ систем массового обслуживания в военной практике. — М.: Воениздат, 1980. — 189 с.
- 4 Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения / Пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1965. — 511 с.
- 5 Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. — М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. — 432 с.
- 6 Большаков А.С. Моделирование в менеджменте: Учеб. пособие. — М.: Информ.-изд. дом «Филинь»; Рилант, 2000. — 464 с.
- 7 Федосеев В.В., Гармаш А.Н., Дайитбегов Д.М. и др. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие. — М.: ЮНИТИ, 1999. — 391 с.
- 8 Скитович В.П. Элементы теории массового обслуживания: Учеб. пособие. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1976. — С. 3, 4.
- 9 Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания: Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 1982. — 256 с.
- 10 Шепелев И.Г. Математические методы и модели управления в строительстве: Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 1980. — 213 с.
- 11 Холод Н.И., Кузнецов А.В., Жихар Я.Н. и др. Экономико-математические методы и модели: Учеб. пособие. — Минск: БГЭУ, 1999. — 413 с.
- 12 Лабскер Л.Г., Бабешко Л.О. Теория массового обслуживания в экономической сфере: Учеб. пособие. — М.: Банки и биржи; ЮНИТИ, 1998. — С. 10.

- 13 Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. — 367 с.
- 14 Хакимова Е.А. Методы теории массового обслуживания, используемые для оценки качества обслуживания в коммерческом банке // Маркетинг в России и за рубежом. — 2010. — № 1 (75). — С. 30–36.
- 15 Федосеев В.В., Эриашвили Н.Д. Экономико-математические методы и модели в маркетинге: Учеб. пособие. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. — С. 142.
- 16 Епишин Ю.Г. Экономико-математические методы в планировании потребительской кооперации: Учеб. — М.: Экономика, 1975. — С. 180, 181.
- 17 Асташкин Н.В. Применение вероятностных систем обслуживания в горном деле. — М.: Изд-во «Недра», 1971. — 160 с.
- 18 Шульга Ю.Н., Сулов О.П., Анохин В.С. Применение методов теории массового обслуживания при исследовании процессов добычи и транспортирования угля. — М.: Изд-во «Недра», 1971. — 160 с.
- 19 Алдохин И.П. Теория массового обслуживания в промышленности. — М.: Экономика, 1970. — 207 с.

Р.С.Каренов

Экономика, қаржылар және өндіріс салаларындағы міндеттерді модельдеу және талдаудағы жаппай қызмет көрсету ілімі

Жаппай қызмет көрсету ілімінің мәні, мақсаты және міндеттері қарастырылған. Оның жаппай қызмет көрсету жүйесін жасау және пайдалану тиімділігі мәселелері кешенінің ілімдік негіздері пайымдалған. Жаппай қызмет көрсету жүйесі экономика мен қаржылардың көптеген салаларында кездесетіні, сондай-ақ бір типті міндеттерді орындауда көп мәрте қолдануға болатындығы сөз болған. Жаппай қызмет көрсету жүйесінің тиімді қызмет атқаруын сипаттайтын көрсеткіштерге көңіл бөлінген. Экономика саласындағы әр алуан міндеттерді модельдеу және талдаудағы жаппай қызмет көрсету ілімінің мүмкіндіктері ашылған. Жаппай қызмет көрсету ілімінің міндеттеріне оңтайландыру сипаты тән екендігі туралы қорытынды жасалған.

R.S.Karenov

The theory of queues in modeling and analysis tasks in the field of economics, finance and production

The subject, purpose and tasks of the theory of queues are considered. It is emphasized that it represents theoretical bases of the effectiveness of complex issues of designing and operation of queuing systems. It is noted that queuing systems meet in many areas of economics and finance, are intended for repeated use in performing the same tasks. The attention to indicators characterizing the effectiveness of the functioning of the queuing systems is paid. Possibilities of using theory of queues in modeling and the subsequent analysis of various tasks in the economy sphere are opened out. The conclusion that tasks of the theory of queues have optimization nature is drawn.

References

- 1 Barbaumov V.E., Ermakov V.I. Kriventsova N.N. et al. *The directory on mathematics for economists*, Moscow: Higher school, 1987, p. 315.
- 2 Chetyrkin E.M. *The theory of queues and its application in economy*, Moscow: Statistics, 1971, 104 p.
- 3 Lukin A.I. *Systems of the theory of queues: The analysis of systems of mass servicing in military practice*, Moscow: Voenizdat, 1980, 189 p.
- 4 Saati T.L. *The trans. from English*, Moscow: Publ. Sov. Radio, 1965, 511 p.
- 5 Gnedenko B.V., Kovalenko I.N. *Introduction in the theory of queues*, Moscow: Nauka; Main edition of physical and mathematical literature, 1966, 432 p.
- 6 Bolshakov A.S. *Modeling in management: Education guidance*, Moscow: Filin information publ., Rilant, 2000, 464 p.
- 7 Fedoseyev V.V., Garmash A.N., Dayitbegov D. M. et al. *Economic-mathematical methods and applied models: Education guidance*, Moscow: YUNITI, 1999, 391 p.
- 8 Skitovich V.P. *Elements of the theory of queues: Education guidance*, Leningrad: Publ. House of the Leningrad university, 1976, p. 3, 4.
- 9 Ivchenko G.I., Kashtanov V.A., Kovalenko I.N. *Theory of queues: Education guidance*, Moscow: Higher school, 1982, 256 p.

- 10 Shepelev I.G. *Mathematical methods and management models in construction: Education guidance*, Moscow: Higher school, 1980, 213 p.
- 11 Kholod N.I., Kuznetsov A.V., Zhikhar Y.N. et al. *Economic-mathematical methods and models: Education guidance*, Minsk: BGEU, 1999, 413 p.
- 12 Labsker L.G., Babeshko L.O. *The theory of queues in the economic field: Education guidance*, Moscow: Banks and exchanges, YUNITI, 1998, p. 10.
- 13 Shelobayev S.I. *Mathematical methods and models in economics, finance, business: Education guidance*, Moscow: YUNITI-DANA, 2000, 367 p.
- 14 Khakimova E.A. *Marketing in Russia and abroad*, 2010, 1 (75), p. 30–36.
- 15 Fedoseeva V.V., Eriashvili N.D. *Economic-mathematical methods and models in marketing: Education guidance*, Moscow: YUNITI-DANA, 2001, p. 142.
- 16 Epishin Y.G. *Economic-mathematical methods in planning of consumer cooperation: Textbook*, Moscow: Economy, 1975, p. 180, 181.
- 17 Astashkin N.V. *Use of probabilistic systems of servicing in mining*, Moscow: «Nedra» Publ., 1971, 160 p.
- 18 Shulga Y.N., Suslov O.P., Anokhin V.S. *Application of methods of the theory of queues in case of research of processes of production and coal transportation*, Moscow: «Nedra» Publ., 1971, 160 p.
- 19 Aldokhin I.P. *The theory of queues in the industry*, Moscow: Economy, 1970, 207 p.

УДК 917.926

Д.Н.Нургабыл

*Жетысуский государственный университет им. И.Жансугурова, Талдыкорган
(E-mail: kebek.kz@mail.ru)*

Аналитический метод исследования решения начальной задачи для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных

В статье рассмотрена неоднородная задача Коши для линейного дифференциального уравнения с малым параметром при производных. На основе фундаментальной системы решений найдено аналитическое представление решения задачи Коши. Получены асимптотические оценки решения и его производных.

Ключевые слова: асимптотические оценки, неоднородная задача, линейное дифференциальное уравнение.

Довольно для широкого класса сингулярно возмущенных задач были разработаны эффективные асимптотические методы, позволяющие строить равномерные приближения с любой точностью [1–8].

Вместе с тем, для широкого класса сингулярно возмущенных задач выбор надлежащего метода для построения решений или их асимптотических приближений без предварительного исследования оказывается весьма затруднительным. Анализ показывает, что к таким задачам можно отнести и начальные задачи, для которых характерно наличие явления начального скачка. Наибольшие общие результаты в этом направлении получены в [9–11].

Однако в указанных работах рассматривается случай, когда малый параметр содержится только при старшей производной. Естественно, возникает вопрос о выделении новых классов начальных задач, обладающих явлением начального скачка. Именно это и является целью настоящей работы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение высшего порядка с малым параметром при производных

$$L_\varepsilon y_\varepsilon \equiv \sum_{r=1}^m \varepsilon^r A_{n+r}(t) \frac{d^{n+r} y}{dt^{n+r}} + \sum_{k=0}^n A_k(t) \frac{d^k y}{dt^k} = h(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1)$$

с условиями

$$\left. \frac{d^i y}{dt^i} \right|_{t=0} = \alpha_i, \quad i = \overline{0, n+m-1}, \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр; α_i — постоянные, $A_{n+m}(t) = 1$.