НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ФУНКЦИИ ПРОСТРАНСТВУ НИКОЛЬСКОГО-МОРРИ $H^{(r)}M^{\lambda}_{p\,x_1}(\mathbb{R}_n)$

Кыдырмина Н.А.

РГКП «Институт прикладной математики» КН МОН РК, Караганда, Казахстан

E-mail: nurgul-k@mail.ru

Определение 1. Пусть $0 < p \leq +\infty$, $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$ и w_λ – измеримая функция из $]0, +\infty[$ в $]0, +\infty[$. Через $M^{\lambda}_{p}(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство всех действительнозначных, измеримых на $\mathbb{R}^n$ функций, для которых

$$\|f\|_{M^{\lambda}_{p}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\sup_{\rho>0} w_\lambda(\rho)\|f\|_{L_p(B(x,\rho))} < \infty.$$

Условимся говорить, что функция $f(x)$ имеет на действительной оси производную порядка r, если существует абсолютно непрерывная на любом конечном отрезке оси производная $f^{(r-1)}(x)$ порядка $r-1$. Таким образом, на самом деле существует только почти всюду производная $f^{(r)}(x)$, однако такая, что $f^{(r-1)}(x)$есть ее неопределенный интеграл. Если $r = 1$, то $f(x)$ просто абсолютно непрерывна на любом конечном отрезке оси x. В этом же смысле надо понимать, когда мы будем говорить, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ от многих переменных имеет на оси x_1 при заданных $x_2, \dots, x_n$ частную производную порядка r.

Определение 2. Будем говорить, что измеримая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит к классу $H^{(r)}M^{\lambda}_{p\,x_1}(B)$ $(r > 0,\ 1 \leq p \leq +\infty)$, если она удовлетворяет следующему условию.

Представим r в виде $r = \rho + \alpha$, где ρ – целое и $0 < \alpha \leq 1$. Пусть существует почти для всех $x_2, \dots, x_n$ частная производная $\frac{\partial^\rho f}{\partial x_1^\rho}$, определенная таким образом почти всюду в $\mathbb{R}^n$, принадлежащая пространству Морри $M^{\lambda}_{p}(\mathbb{R}^n)$, для которой при любом h выполняется неравенство

$$\left\|\frac{\partial^\rho f(x_1+h, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^\rho} + 2\frac{\partial^\rho f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^\rho} + \frac{\partial^\rho f(x_1-h, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^\rho}\right\|_{M^{\lambda}_{p}(\mathbb{R}^n)} \leq B|h|^\alpha. \qquad (1)$$

В тех случаях, когда нас не будут интересовать величина константы B, мы будем ее опускать и писать $H^{(r)}M^{\lambda}_{p\,x_1}(\mathbb{R}^n)$.

$\inf\{B\}$ для которых справедливо неравенство (1) обозначим через $B_{f,1}$, тогда нормой пространства $H^{(\mathrm{r})}M^{\lambda}_{p\,x_1}(B_{f,1})$ будет

$$\|f\|_{H^{(\mathrm{r})}M^{\lambda}_{p\,x_1}(\mathbb{R}^n)} = f_{M^{\lambda}_{p\,x_1}(\mathbb{R}^n)} + B_{f,1}.$$

Определение 3. Через $A_{\nu\,x_1}(f; M^{\lambda}_{p}(\mathbb{R}^n))$ обозначим наилучшее приближение функции $f \in M^{\lambda}_{p}(\mathbb{R}^n)$ посредством целых функций экспоненциального типа g_ν в метрике пространства $M^{\lambda}_{p}(\mathbb{R}^n)$, т.е.

$$A_{\nu\,x_1}(f; M^{\lambda}_{p}(\mathbb{R}^n)) = \inf_{g_\nu}\|f - g_\nu\|_{M^{\lambda}_{p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Нами была доказана следующая теорема, в которой содержится необходимое и достаточное условие принадлежности функции пространству Никольского-Морри.

Теорема. Для того чтобы функция $f \in M^{\lambda}_{p}(\mathbb{R}^n)$ принадлежала классу $H^{(r)}M^{\lambda}_{p\,x_1}(\mathbb{R}^n)$ (с некоторой константой B), необходимо и достаточно существование константы K, для которой имеет место

$$A_{\nu\,x_1}(f; M^{\lambda}_{p}(\mathbb{R}^n)) < \frac{K}{\nu_r}$$

для всех $\nu \geq 1$ или же для всех ν, пробегающих геометрическую прогрессию $\nu = a^k$ $(a > 1,\ k = 0,1,\dots)$.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научных исследований Комитетом науки МОН РК (проект №1777/ГФ4 КН МОН РК).