S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 861–874 (2016) УДК 510.67
DOI 10.17377/semi.2016.13.068 MSC 03C60, 03C68, 03C10

JSp-КОСЕМАНТИЧНОСТЬ И JSB СВОЙСТВО АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

А.Р. ЕШКЕЕВ, О.И. УЛЬБРИХТ

Abstract. The main purpose of this article is to study the model-theoretic properties of Abelian groups within Jonsson theories. The obtained results give us Jonsson analogs for the Schröder-Bernstein property and for the elementary classification of complete theories of Abelian groups.

Keywords: Jonsson theory, model companion, existentially closed model, perfectness, cosemanticness.

1. Введение

Основные задачи, возникающие в классической (первого порядка) теории моделей, являются следствием «противопоставления» некоторых синтаксических и семантических условий логики первого порядка. Как правило, имея дело с фиксированной сигнатурой, под синтаксическим условием мы понимаем некоторые теоретико-модельные свойства фиксированной теории языка данной сигнатуры. И соответственно под семантическим условием мы понимаем некоторые утверждения о теоретико-модельных свойствах объектов, принадлежащих классу моделей данной фиксированной теории и связи между ними с помощью различных типов морфизмов (гомоморфизмов, изоморфизмов, автоморфизмов, элементарных мономорфизмов и т.д.). К синтаксическим условиям можно отнести, например, утверждения, которые определяют такие понятия, как аксиоматизируемость теории, полнота теории, атомная формула, главный тип, неглавный тип, атомная модель и т.д., и соответственно к семантическим условиям мы можем отнести, к примеру, утверждения, которые определяют такие понятия, как элементарное вложение, изоморфное вложение, простая

Yeshkeyev, A.R., Ulbrikht O.I., JSp-cosemanticness and JSB property of Abelian groups.

Поступила 4 июля 2016 г., опубликована 14 октября 2016 г.

модель, алгебраически простая модель и т.д. Иногда синтаксические и семантические понятия являются обоюдными. Как правило, в этом случае мы имеем законченный математический результат в виде критерия. Например, в случае счётного языка модель рассматриваемой теории данного языка атомная, тогда и только тогда, когда она счётно-простая. В случае, когда мы имеем подобные результаты, происходит качественное улучшение понимания сути исследуемых фиксированных объектов: теории и её класса моделей.

Таким образом, классификация фиксированной теории и её класса моделей относительно некоторых синтаксических и семантических условий является одной из важнейших задач классической теории моделей. В самой теории моделей, как замечено в обзорной статье Х. Дж. Кейслера «Основы теории моделей» в справочной книге под ред. Дж. Барвайса [1], исторически сложилось два направления. В [1] их называют «западной» и «восточной» теорией моделей, эти названия условны, они связаны с географическим местом проживания основоположников теории моделей. А.Робинсон жил на восточном побережье США, а А.Тарский жил на западном.

«Западная» теория моделей развивается в традициях Скулема и Тарского. Она в большей степени мотивировалась проблемами в теории чисел, анализе и теории множеств, и в ней используются все формулы логики первого порядка. В частности, в качестве морфизмов в «западной» теории моделей рассматриваются различные типы элементарных морфизмов. «Восточная» теория моделей развивается в традициях Мальцева и Робинсона. Она мотивировалась проблемами в абстрактной алгебре, где формулы теорий обычно имеют самое большее два блока кванторов. Она делает ударение на множества бескванторных формул и экзистенциальных формул. В «восточной» теории моделей, как правило, в качестве морфизмов рассматриваются гомоморфизмы и изоморфизмы.

Таким образом, можно заметить, что имея дело с теоретико-модельной атрибутикой «восточной» теорией моделей, мы, как правило, имеем дело с неполными теориями и морфизмами между их моделями, которые максимум сохраняет свойства булевых комбинаций атомарных формул. Класс неполных теории достаточно широк, поэтому естественным является ограничение до индуктивных теорий или $\forall\exists$-аксиоматизируемых (ограничение на аксиоматизируемость) тем более, что основные типы алгебр таковые. В смысле ограничения на полноту рассматриваемой теории с нашей стороны максимальным требованием в большинстве случаев является требование полноты для $\forall\exists$-предложений и, как минимум, экзистенциальной полноты, т.е. для $\exists$-предложений. В качестве моделей при изучении данного типа теорий, как правило, рассматривается некоторый подкласс класса всех моделей рассматриваемой теории, а именно, класс её экзистенциально замкнутых моделей.

Данная статья посвящена вопросам классификации теорий и их классов моделей в рамках изучения йонсоновских теорий. Йонсоновские теории образуют достаточно широкий подкласс индуктивных теорий и из определения йонсоновских теорий следует, что они, вообще говоря, не полны. Эти теории удовлетворяют естественным требованиям, таким, как индуктивность, свойство совместного вложения и амальгамы [1] (опр. 6.1, стр. 80). Йонсоновскими теориями, например, являются теории таких классических алгебраических систем, как поля фиксированной характеристики, группы, абелевы группы, различные типы колец, булевы алгебры, решётки, полигоны. Т. Г. Мустафин в работе [2] обобщил йонсоновские теории и нашёл связь между полными теориями, йонсоновскими теориями и обобщёнными йонсоновскими теориями. В работе [3] Ешкеевым А.Р. было продолжено исследование йонсоновских теорий относительно различных теоретико-модельных свойств их компаньонов, в том числе и J-стабильности. В частности, в рамках изучения йонсоновских теорий было переопределено такое важное понятие, как форкинг, которое ранее было определено С.Шелахом [4] и является одним из основных средств современной техники теории моделей при классификации полных теорий. В дальнейшем Ешкеевым А.Р. были определены новые классы позитивных йонсоновских теорий и в работе [5] были получены позитивные йонсоновские аналоги работы Ф. Вайспфенинга [6] для позитивной решётки экзистенциальных формул рассматриваемой теории. Понятие позитивных йонсоновских теорий впервые было рассмотрено в работе [7] и это понятие, в определённом смысле, было введено после появления серии работ И. Бен-Якова [8], [9], т.к. оба понятия позитивности теории из [7] и [8] совпадают между собой для минимального фрагмента рассматриваемой теории. Отсюда, в частности, следует нетривиальность (не просто обобщение йонсоновости ради обобщения) понятия позитивности в смысле [7], т.к., например, такой важный класс математических структур, как метрические пространства, не является йонсоновским классом, но является позитивно йонсоновским в смысле работ [8], [9] и, в частности, в смысле [7] для минимального фрагмента. Следует заметить, что существуют различные регулярные способы перехода от произвольной теории к йонсоновской теории, которая сохраняет первоначальный класс экзистенциально замкнутых моделей. Один из этих способов это морлизация теории [1] (теоремы 2.18, 2.19, стр. 63-64; теорема $6.8'$, стр. 83). Таким образом, изучение теоретико-модельных свойств йонсоновских теорий является актуальной задачей, как в самой теории моделей, так и в универсальной алгебре, причём вопросы, касающиеся изучения йонсоновских теорий в точности относятся по своей сути к проблематике «восточной» теории моделей.

В данной статье мы рассматриваем теоретико-модельные вопросы классификации теории абелевых групп относительно понятия косемантичности и свойства Шрёдера-Бернштейна в рамках изучения неполных теорий, а именно в классе йонсоновских теорий. Вопросы изучения теоретико-модельных свойств полных теорий абелевых групп представляют собой большой подраздел теоретико - модельной алгебры. В данной области исследования получены многие классические результаты, в частности, полная классификация абелевых групп с точностью до элементарной эквивалентности была проведена в работе польского математика В. Шмелевой [10].

Следующие ссылки на соответствующие источники позволят читателю получить исчерпывающую информацию относительно этой классификации [10], [11], [12], [13], [14].

Работа состоит из введения и 3 параграфов. Результаты второго параграфа представляют собой известные факты из теории абелевых групп и теоретико-модельных свойств абелевых групп. Содержание третьего параграфа включает в себя необходимые сведения и результаты, касающиеся йонсоновских теорий. Четвёртый параграф является центральным в данной работе и содержит основные результаты, а именно, классификацию йонсоновских абелевых групп относительно косемантичности – понятия, которое обобщает понятие элементарной эквивалентности при изучении полных теорий [10] и уточняет в рамках изучения йонсоновских теорий. Также в этой работе рассмотрен йонсоновский вариант (JSB) свойства Шрёдера-Бернштейна (SB) для полных теорий и приведён результат, показывающий связь свойства JSB для йонсоновской теории абелевых групп со свойством SB центра данной теории, что уточняет результат Д. Гудрика [15] в рамках изучения йонсоновских абелевых групп.

Все неопределённые понятия и связанные с ними результаты в данной статье относительно йонсоновских теорий можно найти в [16].

2. Элементарные сведения об абелевых группах и их теоретико-модельных свойствах

Вкратце дадим основные общепринятые обозначения, связанные с абелевыми группами.

Если A – произвольная абелева группа, n – целое число, то $nA = \{na : a \in A\}$. Нетрудно видеть, что и nA так же, как и $A[p] = \{a \in A : pa = 0\}$ для простого p, образуют подгруппы группы A. Будем говорить, что $n \neq 0$ делит элемент a из A, если $a = nb$ для некоторого $b \in B$. Если существует $m > 0$ такое, что $ma = 0$, то наименьшее из таких m называют порядком элемента a. Таким образом, nA – это множество элементов группы A, делящихся на n, $A[p]$ – множество всех элементов группы A порядка p. Подгруппу $(nA)[p]$ обычно обозначают $nA[p]$. Множество $T(A)$ всех элементов группы A, имеющих конечный порядок, называют периодической частью группы A. Ясно, что $T(A)$ – подгруппа группы A и фактор-группа $A/_{T(A)}$ – группа без кручения, т.е. группа, не имеющая ненулевых элементов конечного порядка. Если всякий элемент группы A имеет порядок, равный p^n для некоторого $n \geqslant 1$, то периодическая группа A называется p-группой. Группа A называется группой ограниченного порядка, если $nA = [0]$ для некоторого натурального n.

Группа A называется делимой, если для любого $a \in A$ и любого $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ существует $b \in A$ такой, что $a = nb$. Если B – делимая группа и одновременно подгруппа группы A, то она называется делимой подгруппой группы A. Группа, не содержащая ненулевых делимых подгрупп, называется редуцированной. Подгруппа B группы A называется сервантной, если $nA \cap B = nB$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Говорят, что подгруппа B группы A выделяется в ней прямым слагаемым, если существует подгруппа C группы A для которой $A = B \oplus C$.

Группа A называется алгебраически компактной, если она выделяется прямым слагаемым во всякой группе, которая содержит A как сервантную подгруппу. Эти группы обладают рядом интересных свойств. Например, группа A алгебраически компактна $\Leftrightarrow$ в ней разрешимо любое совместное счётное множество уравнений от любого числа неизвестных с константами из A. Нетрудно видеть, что ω_1^+-насыщенные группы всегда алгебраически компактны. Строение алгебраически компактных групп хорошо изучено.

Следующие примеры абелевых групп являются каноническими при изучении их элементарных теорий.

(1) Q – аддитивная группа рациональных чисел, называемая полной рациональной группой.
(2) $Z_p = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in Z, (n,p) = 1\right\}$.
(3) Z_{p^n} – циклическая группа порядка p^n.

(4) Z_{p^∞} – мультипликативная группа всех корней уравнений $x^{p^n} = 1$, $n = 1, 2, ...$, из поля комплексных чисел, называемая квазициклической группой типа p^∞, где p – простое число.

Замечание. Группу Z_{p^∞} можно определить как аддитивную, порождённую элементами $c_1, c_2, ..., c_n, ...$, где $pc_1 = 0$, $pc_2 = c_1$, ..., $pc_{n+1} = c_n$.

Пусть A – модель сигнатуры абелевых групп, где $\sigma_{\text{АГ}} = \langle +, -, 0 \rangle$.

Формулу вида $\exists x_1 ... \exists x_n \varphi$, где φ – конъюнкция атомарных формул, называют положительно примитивной (п.п.формулой). П.п.формулы выражают разрешимость конечных систем линейных уравнений вида $m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_k x_k = 0$. Нетрудно показать, что п.п.формулы замкнуты относительно конъюнкции и навешивания квантора существования. Можно непосредственно проверить, что истинность п.п.формул сохраняется при расширениях, декартовых произведениях и гомоморфизмах абелевых групп.

Следующие факты являются хорошо известными.

Теорема 1. *Пусть A – произвольная абелева группа. Каждая формула сигнатуры $\sigma_{A\Gamma}$ эквивалентна относительно $Th(A)$ булевой комбинации п.п.формул.*

Предложение 1. *Q и Z_{p^∞} – делимые группы.*

Теорема 2. *Каждая делимая периодическая абелева группа G является прямой суммой квазициклических групп (возможно по различным простым числам).*

Известно, что любую группу A можно разложить следующим образом:

$$A = A_d \oplus A_r,$$

где A_d – единственная максимальная делимая подгруппа группы A, A_r – редуцированная подгруппа, т.е. группа без ненулевых делимых подгрупп. Алгебраически компактные группы определённым образом строятся из неразложимых групп Z_{p^∞}, Z_{p^n}, Z и Q, где p – простое число.

Делимая группа A_d имеет следующее разложение:

$$A_d \cong \oplus_p Z_{p^\infty}^{(\gamma_p)} \oplus Q^{(\delta)},$$

где γ_p (p - простое число) и δ – произвольные кардинальные числа, $\oplus_p$ означает прямое суммирование по всем простым p, $Z_{p^\infty}^{(\gamma_p)}$ – прямая сумма γ_p-копий квазициклических групп Z_{p^∞}, а $Q^{(\delta)}$ - прямая сумма δ-копий аддитивной группы рациональных чисел.

Напомним, что две модели $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ одного и того же языка $\mathfrak{L}$ первого порядка называются *элементарно эквивалентными*, если в них выполняются одни и те же предложения первого порядка языка $\mathfrak{L}$.

Определим инварианты Шмелёвой. В дальнейшем будем предполагать, что $\infty < \kappa$ для любого кардинала $\kappa \geq \omega$.

Для любой абелевой группы A и любых простых p

$U(p, n; A) = \min\left\{\omega,\ \dim_p\left(p^n A[p] \big/ _{p^{n+1}} A[p]\right)\right\};$

$T_f(p; A) = \min\left\{\omega,\ \inf_n \dim_p\left(p^n A \big/ _{p^{n+1}} A\right)\right\};$

$D(p; A) = \min\left\{\omega,\ \inf_n \dim_p\left(p^n A[p]\right)\right\};$

$$Exp(A) = \begin{cases} 0, & \text{если группа } A \text{ ограниченного порядка,} \\ \infty, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\dim_p$ – размерность соответствующего векторного пространства над полем $Z/_{pZ}$.

Это и есть элементарные инварианты Шмелёвой.

Обозначим через $Ш(A)$ упорядоченную последовательность элементарных инвариантов Шмелёвой группы A:

$$Ш(A) = \langle\langle\langle U(p,n;A) : n \in \omega\rangle, T_f(p;A), D(p;A) : p = 2,3,...\rangle, Exp(A)\rangle.$$

Теорема 3. *Пусть A, B – две произвольные группы. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $A \equiv B$.
(2) $Ш(A) = Ш(B)$.

Определим стандартную группу Шмелёвой A^0 для любой группы A:

$$A^0 = \oplus_{p,n} Z_{p^n}^{(\alpha^0_{p_n})} \oplus \oplus_p Z_p^{(\beta^0_p)} \oplus \oplus_p Z_{p^\infty}^{(\gamma^0_p)} \oplus Q^{(\delta^0)},$$

где $\alpha^0_{p_n} = \min(U(p,n-1;A),\omega)$, $\beta^0_p = \min(T_f(p;A),\omega)$, $\gamma^0_p = \min(D(p;A),\omega)$, $\delta^0 = \min(Exp(A),1)$.

Теорема 4. $A \equiv A^0$.

Теорема 5. *Всякую абелеву группу можно вложить в качестве подгруппы в делимую группу.*

3. Понятия и результаты, касающиеся йонсоновских теорий

Дадим известные определения понятий и результаты, связанные с йонсоновскими теориями, необходимые для изучения абелевых групп в рамках йонсоновости.

Определение 1. *Теория T называется йонсоновской, если*

(1) *T имеет бесконечную модель;*
(2) *T индуктивна, т.е. T эквивалентна множеству $\forall\exists$-предложений;*
(3) *T обладает свойством совместного вложения (JEP), то есть любые две модели $\mathfrak{A} \models T$ и $\mathfrak{B} \models T$ изоморфно вкладываются в некоторую модель $\mathfrak{C} \models T$;*
(4) *T обладает свойством амальгамируемости (AP), то есть если для любых $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \models T$ таких, что $f_1 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, $f_2 : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ - изоморфные вложения, существуют $\mathfrak{D} \models T$ и изоморфные вложения $g_1 : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$, $g_2 : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ такие, что $g_1 f_1 = g_2 f_2$.*

Дадим определение семантической модели. Данная модель играет важную роль в качестве семантического инварианта. Такая модель всегда существует для любой йонсоновской теории. В дальнейшем мы будем использовать так называемый семантический метод [16] при изучении йонсоновских абелевых групп. Суть этого метода заключается в трансляции элементарных свойств фиксированной полной теории (центра йонсоновской теории) на саму йонсоновскую теорию.

Изначально понятие семантической модели предполагало другое понятие однородности, но при этом для доказательства существования семантической модели необходимо было к аксиоматике теории множеств ZF добавить аксиому о существовании сильно недостижимого кардинала. Чтобы эту аксиому элиминировать, необходимо было изменить определение однородности семантической модели на приемлемый вариант. Это было сделано в работе [17] Е.Т.Мустафиным. При этом понятие универсальной модели не меняется. Напомним его.

Определение 2. *Пусть $\kappa \geq \omega$. Модель $\mathfrak{M}$ теории T называется κ- универсальной для T, если каждая модель T мощности строго меньше κ изоморфно вкладывается в $\mathfrak{M}$.*

Следующее определение κ-однородности для модели было введено в работе [17].

Определение 3. [17] *Пусть $\kappa \geq \omega$. Модель $\mathfrak{M}$ теории T называется κ-однородной для T, если при любых двух моделях $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_1$ теории T, являющихся подмоделями $\mathfrak{M}$, мощности строго меньше, чем κ, и изоморфизме $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_1$, для каждого расширения $\mathfrak{B}$ модели $\mathfrak{A}$, являющегося подмоделью $\mathfrak{M}$ и моделью T мощности строго меньше κ существует расширение $\mathfrak{B}_1$ модели $\mathfrak{A}_1$, являющееся подмоделью $\mathfrak{M}$, и изоморфизм $g : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_1$, продолжающий f.*

Однородной-универсальной моделью для T называется κ-однородная - универсальная модель для T мощности κ, где $\kappa \geq \omega$.

Теорема 6. [17] *Каждая йонсоновская теория T имеет κ^+-однородную - универсальную модель мощности 2^κ. Обратно, если T индуктивна, имеет бесконеную модель и имеет ω^+-однородную-универсальную модель, то теория T является йонсоновской теорией.*

Теорема 7. [17] *Пусть T йонсоновская теория. Две модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_1$ κ - однородные - универсальные для T являются элементарно экивалентными.*

Определение 4. [17] *Семантической моделью C_T йонсоновской теории T называется ω^+- однородная - универсальная модель теории T.*

Предложение 2. [17] *Любые две семантические модели йонсоновской теории T являются элементарно эквивалентными между собой.*

Определение 5. [16] *Семантическим пополнением (центром) йонсоновской теории T называется элементарная теория T^* семантической модели C_T теории T, т.е. $T^* = Th(C_T)$.*

Пусть T – некоторая йонсоновская теория фиксированной сигнатуры σ и $\mathrm{Mod}\, T$ – класс всех моделей теории T. Рассмотрим произвольную модель A из $\mathrm{Mod} T$. Определим следующее понятие, с помощью которого мы собираемся различать модели йонсоновской теории. Пусть $JSp(A) = \{T \,|\, T$ - йонсоновская теория в языке σ и $A \in \mathrm{Mod}\, T\}$ и назовём $JSp(A)$ йонсоновским спектром модели A.

Следующие определения 6, 7 принадлежат Т. Г. Мустафину.

Определение 6. [16] *Мы говорим, что йонсоновская теория T_1 косемантична йонсоновской теории T_2 ($T_1 \bowtie T_2$), если $C_{T_1} = C_{T_2}$, где C_{T_i} - семантическая модель T_i, $i = 1, 2$.*

Отношение косемантичности на множестве теорий является отношением эквивалентности. Тогда $JSp(A)/_{\bowtie}$ - фактор множество йонсоновского спектра модели A по отношению $\bowtie$.

Определение 7. [16] *Йонсоновская теория T называется совершенной, если каждая семантическая модель T является насыщенной моделью T^*.*

Определение 8. [1] *Теория T называется модельно полной, если для любых моделей $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ теории T любая подсистема $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ будет элементарной подсистемой $\mathfrak{B}$. Эквивалентно, каждое изоморфное вложение есть элементарное вложение.*

Теорема 8. [1] *Теория T модельно полна, если и только если теория $T \cup D(\mathfrak{M})$ полна для любой модели $\mathfrak{M}$ теории T.*

Определение 9. [1] *Пусть T, T^* – некоторые L-теории. Теория T^* называется модельным пополнением теории T, если:*

(a) T и T^* взаимно модельно совместны, т.е. любая модель теории T вкладывается в модель теории T^* и наоборот;

(b) T^* - модельно полная теория;

(c) если $\mathfrak{M} \models T$, то $T^* \cup Diagram(\mathfrak{M})$ – полная теория.

Теория T^* называется модельным компаньоном теории T, если выполнены условия (a) и (b).

Теорема 9. [1] *Теория T имеет не более одного модельного компаньона.*

Теорема 10 ([1], стр. 68, табл 1)**.** *Теория алгебраически замкнутых абелевых групп является модельным пополнением теории абелевых групп.*

Теорема 11. [16] *Пусть T - произвольная йонсоновская теория, тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *теория T - совершенна;*
(2) *T^* - модельный компаньон теории T.*

Пусть E_T – класс всех экзистенционально замкнутых моделей теории T.

Теорема 12. [16] *Если йонсоновская теория T совершенна, то $E_T = ModT^*$, где $T^* = Th(C_T)$.*

Пусть T - йонсоновская теория, $S^J(X)$ - множество всех экзистенциальных полных n-типов над X, совместных с T, для любого конечного n, где $X \subset C$.

Определение 10. [16] *Будем говорить, что йонсоновская теория T J-λ- стабильна, если для любой T-экзистенциально замкнутой модели $\mathfrak{A}$, для любого подмножества X из A, $|X| \leq \lambda \Rightarrow |S^J(X)| \leq \lambda$.*

Теорема 13. *Пусть T - совершенная йонсоновская теория, полная для $\exists$ - предложений, $\lambda \geq \omega$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *T – J-λ-стабильна;*
(2) *T^* – λ-стабильна, где T^* -центр йонсоновской теории T.*

Доказательство. Следует из теоремы 2.1 из [19]. □

4. Йонсоновские абелевы группы. Основной результат

В данном параграфе мы рассматриваем йонсоновские аналоги некоторых теоретико-модельных результатов для абелевых групп. А именно, мы рассмотрим йонсоновское свойство Шрёдера-Бернштейна и свойство косемантичности для абелевых групп.

Пусть M – класс моделей теории абелевых групп $T_{\text{АГ}}$.

Следующие леммы необходимы для доказательства предложения 3.

Лемма 1. *Если* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in M$*;* $\mathfrak{C} \in M$ *и* $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$*,* $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$*;* $|\mathfrak{C}| = |\mathfrak{A}| \cap |\mathfrak{B}|$*, то существует такая система* $\mathfrak{D} \in M$*, что* $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{D}$*,* $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{D}$*.*

Доказательство. Пусть A и B – абелевы группы и $A \cap B = C$, $C \subseteq A$, $C \subseteq B$. Пусть $A \underset{C}{\times} B$ - свободное произведение групп A и B с объединённой подгруппой C. Тогда $A \subseteq A \underset{C}{\times} B$ и $B \subseteq A \underset{C}{\times} B$. □

Лемма 2. *Если* M *абстрактный и удовлетворяет лемме 1, то* M *удовлетворяет и свойству амальгамируемости* (AP)*.*

Доказательство. Доказательство можно извлечь из теорем A, B работы [20], при этом надо лишь учитывать новое определение однородности. □

Предложение 3. *Теория* $T_{AГ}$ *– совершенная йонсоновская теория.*

Доказательство. Покажем сначала, что $T_{\text{АГ}}$ - йонсоновская теория. $T_{\text{АГ}}$ имеет бесконечную модель. Она индуктивна, т.к. объединение возрастающей цепочки абелевых групп – абелева группа. Т.е. условия (1) и (2) из определения 1 выполнены.

Если A и B – две абелевы группы, то их прямое произведение $A \times B$ - абелева группа. Множество элементов $< a, e^B >$, где $a \in A$, e^B - единичный элемент B, является подгруппой $A \times B$, изоморфной A. Аналогично, множество элементов $< e^A, b >$, где $b \in B$, e^A - единичный элемент A, является подгруппой $A \times B$, изоморфной B. Таким образом выполнено условие (3).

Проверим выполнимость условия (4). Т.к. класс абелевых групп – абстрактный, т.е. замкнут относительно изоморфизмов, то согласно лемме 1 и соответственно лемме 2, класс абелевых групп обладает свойством амальгамируемости (AP). Т.о. $T_{\text{АГ}}$ является йонсоновской теорией.

Проверим совершенность теории $T_{\text{АГ}}$. В силу теоремы 10 $T_{\text{АГ}}$ имеет модельное пополнение T^{MP}, которое по определению также является модельным компаньоном T^{MK} теории абелевых групп $T_{\text{АГ}}$. С другой стороны, в силу того, что $T_{\text{АГ}}$ – йонсоновская, существует центр $T^*_{\text{АГ}}$ теории $T_{\text{АГ}}$, где $T^*_{\text{АГ}} = Th(C)$, где C – семантическая модель теории $T_{\text{АГ}}$. Нам надо показать, что $T^*_{\text{АГ}}{=}T^{MK}$. Предположим противное, пусть эти теории не равны между собой. Тогда в силу полноты $T^*_{\text{АГ}}$ и модельной полноты T^{MK} для любого предложения φ сигнатуры $\sigma_{\text{АГ}}$ возможны два варианта: 1) $\varphi \in T$ и $\neg\varphi \in T^{MK}$ или 2) $\varphi \in T$ и $\varphi \notin T^{MK}$, $\neg\varphi \notin T^{MK}$. При этом все три теории $T_{\text{АГ}}$, $T^*_{\text{АГ}}$ и T^{MK} модельно совместны между собой по определению. Более того все модели мощности меньше, чем мощность семантической модели, перечисленных теорий, изоморфно вкладываются в C - семантическую модель теории $T_{\text{АГ}}$. Поэтому, в силу этого факта, для обоих вышеуказанных вариантов легко получить противоречие с нашим предположением, что теории $T_{\text{АГ}}$ и T^{MK} не равны между собой. Таким образом, $T^*_{\text{АГ}}$ является модельным компаньоном теории $T_{\text{АГ}}$. Тогда, в силу теоремы 9 и теоремы 11, $T_{\text{АГ}}$ является совершенной. □

Следующее понятие было рассмотрено Д. Гудриком в работе [21] и там же он обозначает его как свойство Шрёдера-Бернштейна (SB).

Определение 11. *Теория T допускает свойство SB если для любых двух взаимно элементарно-вложимых моделей теории T следует, что они изоморфны.*

Но при этом Д. Гудрик отмечает, что впервые данное свойство было рассмотрено для ω-стабильных теорий Нурмагамбетовым Т.А. в работах [22], [23]. В частности, Нурмагамбетовым Т.А. был получен следующий результат относительно свойства SB.

Теорема 1.2 из [22] Если T является ω-стабильной теорией, тогда T имеет SB свойство тогда и только тогда, когда T ограниченной размерности.

Д.Гудриком в работе [21] получено описание свойства SB для классифицируемой (суперстабильной, с NDOP и NOTOP) теории с ограниченной размерностью. В частности, в работе [24] Д.Гудрик и М.Ласковский описали свойство SB для слабо минимальных теорий.

В дальнейшем Д.Гудрик [15] нашёл необходимые и достаточные условия того, что теория абелевых групп допускает свойство SB. А именно, им была доказана следующая теорема:

Теорема 3.8 из [15] Если G - абелева группа, то следующие условия эквивалентны:

1. $Th(G,+)$ имеет свойство Шрёдера Бернштейна;

2. $Th(G,+)$ – ω-стабильна;

3. G есть прямая сумма делимой группы и группы с кручением ограниченной экспоненты;

4. $Th(G,+)$ - суперстабильна, и если $(\overline{G},+) \equiv (G,+)$ является насыщенной, тогда каждое отображение в $Aut(\overline{G}/\overline{G}^0)$ является унипотентным.

Нами было переопределено данное понятие для йонсоновских теорий и обозначено как JSB, а именно: йонсоновская теория T имеет свойство JSB, если для любых двух экзистенциально замкнутых моделей $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ теории T из того, что они взаимно изоморфно вкладываются друг в друга следует, что они изоморфны.

Следующий результат является йонсоновским аналогом теоремы 3.8 из работы [15], а именно:

Теорема 14. *Пусть T – йонсоновская теория абелевых групп, тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *T – J-ω-стабильна;*

(2) *T^* – ω-стабильна;*

(3) *T обладает свойством JSB.*

Доказательство. Эквивалентность пунктов (1) и (2) следует из теоремы 13, т.к. в теореме 13 используется $\exists$-полнота и тогда, в силу теоремы 1 мы можем применить теорему 13.

Покажем из (3) в (2). В силу предложения 3 теория абелевых групп – совершенная йонсоновская теория. Тогда в силу критерия совершенности 11 и теоремы 12 мы имеем, что $E_T = \mathrm{Mod}\, T^*$. Следовательно, любая модель центра теории T является экзистенциально замкнутой. В силу теоремы 11 T^* - центр теории T является модельным компаньоном теории T. Следовательно T^* - модельно полная теория и любое вложение является элементарным. Остаётся применить теорему 3.8 из [15].

Покажем из (2) в (3). Пусть центр T^* является ω-стабильным. Так как $T \subset T^*$ следует, что $\mathrm{Mod}\, T^* \subset \mathrm{Mod}\, T$. При этом в силу теоремы 3.8 из [15] T^* допускает SB. Но в силу теоремы 11 и совершенности теории T $\mathrm{Mod}\, T^* = E_T$. И это заканчивает доказательство в силу того, что йонсоновское свойство JSB определено только для моделей из E_T. □

Следующий результат, касающийся йонсоновских абелевых групп, является аналогом теоремы В.Шмелёвой об элементарной классификации абелевых групп. Мы знаем, что для любой абелевой группы G существует её стандартная группа G^0 так, что $G \equiv G^0$, при этом

$$G^0 = \oplus_{p,n} Z_{p^n}^{(\alpha^0_{p^n})} \oplus \oplus_p Z_p^{(\beta^0_p)} \oplus \oplus_p Z_{p^\infty}^{(\gamma^0_p)} \oplus Q^{(\delta^0)}.$$

Обозначим через $JSp(A)$ йонсоновский спектр абелевой группы A, где

$$JSp(A)=\{T \,|\, T \text{ - йонсоновская теория в языке } \sigma_{\mathrm{A\Gamma}} \text{ и } A \in \mathrm{Mod}\, T\}.$$

Следующий результат даёт описание семантической модели йонсоновской теории абелевых групп.

Теорема 15. *Пусть T – йонсоновская теория абелевых групп, тогда её центр $C_T \in E_T$, при этом C_T – делимая группа и её стандартная группа Шмелёвой представима в виде $\oplus_p \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\alpha_p)} \oplus \mathbb{Q}^{(\beta)}$, где $\alpha_p, \beta \in \omega^+$, $2^\omega = |C_T|$.*

Доказательство. Следует из теоремы 5, теоремы 2 и того, что любая йонсоновская теория имеет семантическую модель, которая является ω^+-однороднойуниверсальной моделью. □

Предложение 4. *Существуют континуум несовершенных подклассов класса всех абелевых групп.*

Доказательство. В работе [18] данное предложение было доказано с использованием старого определения семантической модели. Для нового определения 4 семантической модели можно повторить доказательство из [18] учитывая лишь мощностные оценки семантической модели. Для доказательства этого факта нам достаточно показать, что не элементарно эквивалентных между собой семантических моделей несовершенных йонсоновских теорий абелевых групп будет континуум. Из теоремы 15 семантическая модель любой абелевой группы будет прямой суммой соответственного числа копий групп двух видов: $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ и Q. В несовершенном случае отсутствовать может только Q, т.к. Q не может быть универсальной моделью. Количество копий $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ может быть любым подмножеством ω. □

Назовем пару $(\alpha_p, \beta)^A_{C_{[T]}}$ йонсоновским инвариантом абелевой группы A, если стандартная группа Шмелёвой группы A представима в виде $\oplus_p \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\alpha_p)} \oplus \mathbb{Q}^{(\beta)}$, где $C_{[T]}$ семантическая модель $[T] \in JSp(A)/_{\bowtie}$.

Дадим следующие определения понятий, которые уточняют в рамках изучения йонсоновских теорий, определение элементарной эквивалентности для полных теорий.

Пусть A и B – модели одной и той же сигнатуры.

Определение 12. *Мы будем говорить, что модель A йонсоновски элементарно эквивалентна модели B ($A \underset{J}{\equiv} B$), если $JSp(A) = JSp(B)$.*

Лемма 3. $\forall A, B \in Mod\sigma_{A\Gamma}$ $JSp(A) \cap JSp(B) \neq \emptyset$.

Доказательство. Это верно в силу того, что как минимум $T_{A\Gamma} \in JSp(A) \cap JSp(B)$. □

Определение 13. *Мы говорим, что модель A JSp-косемантична модели B ($A \underset{JSp}{\bowtie} B$), если $JSp(A)/_{\bowtie} = JSp(B)/_{\bowtie}$.*

Лемма 4. $A \underset{JSp}{\bowtie} B \Leftrightarrow JSp(A) \cap JSp(B) = JSp(A) \cup JSp(B)$.

Доказательство. Следует из определения. □

Легко понять, что понятия, введённые в определениях 12 и 13, обобщают понятие элементарной эквивалентности. В следующей лемме, в силу предложения 3, мы можем заметить, что верно следующее:

Лемма 5. *Пусть A и B произвольные абелевы группы, тогда*

$$A \equiv B \Rightarrow A \underset{J}{\equiv} B \Rightarrow A \underset{JSp}{\bowtie} B.$$

Доказательство. Следует из определения. □

Следующий результат является йонсоновским аналогом хорошо известной теоремы В. Шмелевой об элементарной классификации абелевых групп и является следствием теоремы 15 и леммы 5.

Определим следующее множество $\{(\alpha_p, \beta)^A_{C_{[T]}} : [T] \in JSp(A)/_{\bowtie}$, для всех простых $p\}$ как йонсоновский инвариант фактор-множества $JSp(A)/_{\bowtie}$ и обозначим его через $JInv(JSp(A)/_{\bowtie})$.

Теорема 16. *Если A и B — абелевы группы, то следующие условия эквивалентны:*

(1) $A \underset{JSp}{\bowtie} B$;

(2) $JInv(JSp(A)/_{\bowtie}) = JInv(JSp(B)/_{\bowtie})$.

Доказательство. Из (2) в (1). Если (2) выполнено, это означает, что стандартные группы Шмелёвой для A и B совпадают между собой, тогда в силу леммы 5 следует, что $A \underset{JSp}{\bowtie} B$, т.е. выполнено (1).

Пусть выполнено (1), тогда $JSp(A)/_{\bowtie} = JSp(B)/_{\bowtie}$. Предположим противное, т.е. $JInv(JSp(A)/_{\bowtie}) \neq JInv(JSp(B)/_{\bowtie})$. Тогда существует $(\alpha_p, \beta)^A_{C_{[T]}} \in JInv(JSp(A)/_{\bowtie})$ и $(\alpha_p, \beta)^A_{C_{[T]}} \notin JInv(JSp(B)/_{\bowtie})$. Следовательно, для каждого класса $[T'] \in JSp(B)/_{\bowtie}$ имеем $(\alpha_p, \beta)^A_{C_{[T]}} \neq (\alpha_p, \beta)^B_{C_{[T']}}$, т.е. нет ни одной йонсоновской теории группы B, семантической моделью которой является $C_{[T]}$. Но при этом известно, что любая йонсоновская теория однозначно определяется своей семантической моделью ([2], теорема 2.2 при $\alpha = 0$). Отсюда следует, что найдётся такая йонсоновская теория T, которая определяется йонсоновским инвариантом $(\alpha_p, \beta)^A_{C_{[T]}}$ и $T \notin JSp(B)$. А это противоречит условию (1), значит наше предположение неверно. □

References

[1] J. Barwise *Ed.*, *Handbook of mathematical logic*, Part 1. Model theory, Science, Moscow, 1982. Zbl 0623.03002

[2] T.G. Mustafin, *Generalized Jonsson Conditions and a Description of Generalized Jonsson Theories of Boolean Algebras*, Siberian Adv. Math., **10**:3 (2000), 1–58. Zbl 0957.03511

[3] A.R. Yeshkeyev, *On Jonsson stability and some of its generalizations*, Journal of Mathematical Sciences, **166**:5 (2010), 646–654. Zbl 1288.03025

[4] S. Shelah, *Classification theory and the number of non-isomorphic models*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 1978. Zbl 0388.03009

[5] A.R. Yeshkeyev, *The structure of lattices of positive existential formulae of (Δ-PJ)-theories*, Science Asia. Journal of The Science Society of Thailand, **39**:1 (2013), 19–24.

[6] V. Weispfenning, *The model-theoretic significance of complemented existential formulas*, The Journal of Symbolic Logic, **46**:4 (1981), 843–849. Zbl 0502.03017

[7] A.R. Yeshkeyev, *Categorical positive Jonsson theories*, Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, **4(44)** (2006), 10–16.

[8] I. Ben-Yaacov, *Positive model theory and compact abstract theories*, Journal of Mathematical Logic, **3**:1 (2003), 85–118. Zbl 1028.03034

[9] I. Ben-Yaacov, *Compactness and independence in non first order frameworks*, Bulletin of Symbolic logic, **11**:1 (2005), 28–50. Zbl 1098.03043

[10] W. Szmielew, *Elementary properties of Abelian groups*, Fundamenta Mathematica, **41** (1955), 203–271. Zbl 0064.00803

[11] Y.L. Ershov, *Problems of solubility and constructive models*, Science, Moscow, 1980. Zbl 0495.03009

[12] L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups*, Volume I, Publishing House of Mir, Moscow, 1974. Zbl 0274.20067

[13] P.C. Eklof, E.R. Fischer *The elementary theory of abelian groups*, Annals of Math logic, **4** (1972), 115–171. Zbl 0248.02049

[14] Y.L. Ershov, E.A. Palyutin *Mathematical logic*, Fizmatlit, Moscow, 2011.

[15] J. Goodrick, *The Schröder-Bernstein property for theories of abelian groups*, arXiv.org > math > arXiv:0705.1850v1, 2007.

[16] A.R. Yeshkeyev, *Jonsson theories*, KarGU, Karaganda (2009), 250pp.

[17] Y.T. Mustafin, *Quelques proprietes des theories de Jonsson*, The Journal of Symbolic Logic, **67**:2 (2002), 528–536. Zbl 1013.03046

[18] A.R. Yeshkeyev, *Jonsson classes of Abelian groups*, Buketov meeting: Interuniversity conference dedikaded to the 20th anniversary of the KarSU, Karaganda, **1** (1992), 127.

[19] A.R. Yeshkeyev, G.S. Begetayeva *Stability of Δ-PM-theory and its center*, Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, **4(56)** (2009), 29–34.

[20] B. Jonsson, *Homogeneous universal relational systems*, Math. Scand., **8** (1960), 137–142. Zbl 0173.00505

[21] J. Goodrick, *When are elementarily bi-embeddable models isomorphic?*, PhD thesis, University of California, Berkeley (2007).

[22] T.A. Nurmagambetov, *The mutual embeddability of models*, Theory of Algebraic Structures, Collection of scientific papers, Karaganda (1985), 109–115. Zbl 0641.03023

[23] T.A. Nurmagambetov, *Characterization of ω-stable theories with a bounded number of dimensions*, Algebra and Logika, **28**:5 (1989), 388–396. Zbl 0707.03025

[24] J. Goodrick, M.C. Laskowski, *The Schröder-Bernstein property for a-saturated models*, Proc. AMS, **142**:3 (2014), 1013–1023. Zbl 06268279

Aibat Rafhatovich Yeshkeyev
Academician E.A. Buketov Karaganda State University,
st. Universitetskaya, 28,
100028, Karaganda, Kazakhstan
E-mail address: modth1705@mail.ru

Olga Ivanovna Ulbrikht
Academician E.A. Buketov Karaganda State University,
st. Universitetskaya, 28,
100028, Karaganda, Kazakhstan
E-mail address: ulbrikht@mail.ru