А.Н.Адекенова, Л.В.Устинова, Ж.Б.Шакманова

Применение технологии VRML при создании электронного учебника по химии

В работе рассмотрено создание электронного учебника по химии. Собраны материалы по одному из важнейших разделов химии — переодической таблице Д.И.Менделеева. Учитывая важность данного раздела, в статье сделан упор на использование технологии VRML для создания таблицы Д.И.Менделеева с трехмерными представлениями строения элементов атомов. Данная технология позволяет наглядно продемонстрировать свойства химических элементов, их удельный вес. Также рассмотрены основные скрипты по созданию VRML объекта, перечислены основные теги языка HTML, использованные при создании электронного учебника, использованы фреймы, гиперссылки, имеются рисунки, таблицы.

A.N.Adekenova, L.V.Ustinova, Zh.B.Shakmanova

Application for creation technology VRML e-book on chemistry

In the article the creation of an electronic textbook on chemistry is considered. The materials of one of the most important parts of chemistry — periodically Mendeleev's table are collected. Taking into accerent the importance of this section, this paper focuses on the usig of VRML technology to create a table of Mendeleev with three-dimensional representations of the structure elements of the atoms. Using this technology allows to demonstrate the properties of chemical elements, their specific gravity. Also, the basic scripts for creating VRML object are considered. Also main tags of HTML, used for the creation of electronic textbooks are enumerated. In the textbooks frames, hyperlinks is used. On many pages there are tables and figures.

УДК 517.58

Т.Б.Ахажанов

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана (E-mail: talgat_a2008@mail.ru)

Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье-Уолша функции ограниченной s-вариации

В работе приведено достаточное условие для сходимости ряда $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{mn}\left|\hat{f}(m,n)\right|^{r}$, где $r \in (0,2)$ и γ_{mn} — двойная числовая последовательность, удовлетворяющая некоторму условию A_α, $\hat{f}(m,n)$ — коэффициенты Фурье-Уолша, а функция $f(x,y)$ имеет ограниченную s-вариацию. Гоголадзе и Месхия обобщили классические результаты Бернштейна, Саса, Зигмунда и других авторов об абсолютной сходимости одномерных рядов Фурье. Наша цель распространение этих результатов на кратные ряды по системе Уолша.

Ключевые слова: абсолютная сходимость, кратные ряды, Фурье, Уолш, ограниченная s-вариация, последовательность, разбиение.

Приведем определение системы Уолша. Рассмотрим на полуинтервале $[0;1)$ функцию

$$r_0(x)=\begin{cases}1, & x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right)\\ -1, & x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)\end{cases}$$

и продолжим ее периодически с периодом 1 на всю числовую ось.

Определим функции $r_k(x)=r_0(2^k x)$, k = 0,1,2…, представляющие собой сжатия функции $r_k(x)$ в 2^k раз. Функции $r_k(x)$ называются функциями Радемахера.

Систему функций Уолша $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ в нумерации Пэли [1] получим в результате всевозможных перемножений между собой функций Радемахера.

Представим натуральное число n в двоичной записи, т.е. в виде

$$n=\sum_{i=0}^{k}\varepsilon_i\cdot 2^i,$$

где $\varepsilon_k=1, \varepsilon_i=0$ или 1 при $i=0,1,...,k-1$.

Положим

$$w_n(x)=\prod_{i=0}^{k}\left(r_i(x)\right)^{\varepsilon_i}.$$

Функции системы Уолша принимают два значения: 1 и -1. В точках разрыва они непрерывны справа.

Пусть $\bar{x}\in R_k$, $\bar{n}\in Z^k$, $\bar{x}=(x_1,...,x_k)$, $\bar{n}=(n_1,...,n_k)$. Тогда кратную систему Уолша определим следующим образом:

$$w_{\bar{n}}(\bar{x})=\prod_{i=1}^{k}w_{n_i}(x_i).$$

Для $x\in[0,1)$, $y\in[0,1)$ имеют место представления

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{x_k}{2^k},\ y=\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{y_k}{2^k},$$

где $x_k=0$ или 1, $y_k=0$ или 1.

Сумма $x\oplus y$ определяется равенством

$$x\oplus y=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x_k+y_k)(\mathrm{mod}\,2)}{2^k}.$$

Пусть $f(x,y)\in L_1[0,1)^2$ — функция двух переменных, определенная на квадрате $[0,1)^2=[0,1)\times[0,1)$ с рядом Фурье-Уолша

$$f(x,y)\sim\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\hat{f}(m,n)w_m(x)w_n(y),$$

где $\hat{f}(m,n)$ — коэффициенты Фурье-Уолша.

Положим

$$\Delta_1(f,x,y,h_1,h_2)=f(x\oplus h_1,y\oplus h_2)-f(x,y\oplus h_2)-f(x\oplus h_1,y)+f(x,y),\ h_1,h_2>0.$$

Для $f\in C[0,1)^2$ модулем непрерывности называется следующая величина:

$$\omega(f,\delta_1,\delta_2)=\sup\left\{\left|\Delta_1(f,x,y,h_1,h_2)\right|:(x,y)\in[0,1)^2,0\le h_1\le\delta_1,0\le h_2\le\delta_2,\delta_1,\delta_2>0\right\}.$$

Говорят, что двойная последовательность неотрицательных чисел $\{\gamma_{m,n}\}$, $(m,n)\in N_+^2$, принадлежит классу A_α при неотрицательном $\alpha\ge 1$, если имеет место неравенство

$$\left(\sum_{m\in D_\mu}\sum_{n\in D_\nu}\gamma_{mn}^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\le C2^{(\mu+\nu)(1-\alpha)/\alpha}\sum_{m\in D_{\mu-1}}\sum_{n\in D_{\nu-1}}\gamma_{m,n} \tag{1}$$

для всех $\mu,\nu\ge 0$, где $D_\mu:=\left\{2^{\mu-1},2^{\mu-1}+1,...,2^{\mu}-1\right\}$, $D_0=1$ $\mu,\nu\in N_+$, С не зависит от μ и ν.

Положим

$$\Gamma_{\mu\nu}=\sum_{m\in D_\mu}\sum_{n\in D_\nu}\gamma_{mn},$$

где $\mu,\nu\ge -1$.

Класс последовательностей A_α для случая одномерных рядов был рассмотрен в [2].

Рассмотрим произвольное разбиение квадрата $[0,1)^2$. $\tau=\tau_1\times\tau_2$;

$$\tau_1: 0=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=1 \quad \tau_2: 0=y_0<y_1<y_2<\ldots<y_m=1.$$

Функция $f(x,y)$ называется функцией ограниченной s-вариации, $f\in BV_s[0,1)^2$, $(1\le s<\infty)$, если

$$V_s(f)=\sup_\tau\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\left|f(x_k,y_l)-f(x_{k-1},y_l)-f(x_k,y_{l-1})+f(x_{k-1},y_{l-1})\right|^s<\infty,$$

где супремум берется по всем разбиениям.

Теорема 1. Пусть $f\in BV_s[0,1)^2\cap C[0,1)^2$ для некоторого $s\in(0,2)$, и пусть $\gamma=\{\gamma_{m,n}\}\in A_{2/(2-r)}$ для некоторого $r\in(0,2)$. Тогда из сходимости ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}2^{-(\mu+\nu)r}\sum_{m\in D_{\mu-1}}\sum_{n\in D_{\nu-1}}\gamma_{m,n}\omega^{(2-s)r/2}\left(f;\frac{1}{2^\mu};\frac{1}{2^\nu}\right)<\infty$$

следует сходимость ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{mn}\left|\hat f(m,n)\right|^r<\infty$$

и выполняется неравенство

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{mn}\left|\hat f(m,n)\right|^r\le kCV_s^{r/2}(f)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}2^{-(\mu+\nu)r}\sum_{m\in D_{\mu-1}}\sum_{n\in D_{\nu-1}}\gamma_{m,n}\omega^{(2-s)r/2}\left(f;\frac{1}{2^\mu};\frac{1}{2^\nu}\right).$$

Доказательство. Из определения функции ограниченной *s*-вариации имеем

$$\sum_{k=1}^{2M}\sum_{l=1}^{2N}\left|f\left(x\oplus\frac{k}{M},y\oplus\frac{l}{N}\right)-f\left(x\oplus\frac{k-1}{M},y\oplus\frac{l}{N}\right)-f\left(x\oplus\frac{k}{M},y\oplus\frac{l-1}{N}\right)+f\left(x\oplus\frac{k-1}{M},y\oplus\frac{l-1}{N}\right)\right|^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{2M}\sum_{l=1}^{2N}\left|f\left(x\oplus\frac{k}{M},y\oplus\frac{l}{N}\right)-f\left(x\oplus\frac{k-1}{M},y\oplus\frac{l}{N}\right)-f\left(x\oplus\frac{k}{M},y\oplus\frac{l-1}{N}\right)+\right.$$

$$\left.+f\left(x\oplus\frac{k-1}{M},y\oplus\frac{l-1}{N}\right)\right|^{2-s}\cdot\left|f\left(x\oplus\frac{k}{M},y\oplus\frac{l}{N}\right)-f\left(x\oplus\frac{k-1}{M},y\oplus\frac{l}{N}\right)-\right.$$

$$\left.-f\left(x\oplus\frac{k}{M},y\oplus\frac{l-1}{N}\right)+f\left(x\oplus\frac{k-1}{M},y\oplus\frac{l-1}{N}\right)\right|^s=\sum_{k=1}^{2M}\sum_{l=1}^{2N}\left|f\left(x'\oplus\frac{1}{M},y'\oplus\frac{1}{N}\right)-f\left(x'\oplus\frac{1}{M},y'\right)-\right.$$

$$\left.-f\left(x',y'\oplus\frac{1}{N}\right)+f\left(x',y'\right)\right|^{2-s}\left|f\left(x'\oplus\frac{1}{M},y'\oplus\frac{1}{N}\right)-f\left(x'\oplus\frac{1}{M},y'\right)-f\left(x',y'\oplus\frac{1}{N}\right)+f\left(x',y'\right)\right|^s\le$$

$$\le\sup_{\substack{0<h_1\le\frac{1}{M}\\0<h_2\le\frac{1}{N}}}\left|f\left(x'\oplus\frac{1}{M},y'\oplus\frac{1}{N}\right)-f\left(x'\oplus\frac{1}{M},y'\right)-f\left(x',y'\oplus\frac{1}{N}\right)+f\left(x',y'\right)\right|^{2-s}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{2M}\sum_{l=1}^{2N}\left|f\left(x'\oplus\frac{1}{M},y'\oplus\frac{1}{N}\right)-f\left(x'\oplus\frac{1}{M},y'\right)-f\left(x'\oplus\frac{1}{M},y'\oplus\frac{1}{N}\right)+f\left(x',y'\right)\right|^s=$$

$$=\omega^{2-s}\left(f,\frac{1}{N},\frac{1}{M}\right)V_s(f)$$

для всех $M,N\ge1$. Интегрируем обе стороны этого неравенства по $[0,1)^2$ и заметим, что каждый интеграл в левой части равен следующему:

$$I_{MN}\equiv\int_0^1\int_0^1\left|f\left(x\oplus\frac{k}{M},y\oplus\frac{l}{N}\right)-f\left(x\oplus\frac{k-1}{M},y\right)-f\left(x\oplus\frac{k-1}{M},y\oplus\frac{l}{N}\right)+\right.$$

$$\left.+f\left(x\oplus\frac{k-1}{M},y\oplus\frac{l-1}{N}\right)\right|^2dxdy=\int_0^1\int_0^1\left|f\left(x''\oplus\frac{1}{2M},y''\oplus\frac{1}{2N}\right)-f\left(x''\otimes\frac{1}{2M},y''\oplus\frac{1}{2N}\right)-\right.$$

$$-f\left(x^{"}\oplus\frac{1}{2M},y^{"}\otimes\frac{1}{2N}\right)+f\left(x^{"}\otimes\frac{1}{2M},y^{"}\otimes\frac{1}{2N}\right)\Bigg|^{2}dxdy\,.$$

Следовательно,

$$4MNI_{MN}\le\omega^{2-s}\left(f,\frac{1}{N},\frac{1}{M}\right)V_s(f);$$

$$I_{MN}\le\frac{1}{4MN}\omega^{2-s}\left(f,\frac{1}{N},\frac{1}{M}\right)V_s(f). \tag{2}$$

Используя равенство Парсеваля и полагая $h_1=\frac{1}{2M}$ и $h_2=\frac{1}{2N}$, получим:

$$I_{MN}=16\sum_{m\in Z}\sum_{n\in Z}\left|\hat{f}(m,n)\right|^2. \tag{3}$$

Из неравенств (2) и (3) следует, что

$$\sum_{m\in Z}\sum_{n\in Z}\left|\hat{f}(m,n)\right|^2=\frac{1}{16}I_{MN}\le\frac{1}{4MN}\omega^{2-s}\left(f,\frac{1}{M},\frac{1}{N}\right)V_s(f)=\frac{4}{MN}\omega^{2-s}\left(f,\frac{1}{M},\frac{1}{N}\right)V_s(f).$$

Положим

$$M=2^{\mu}\ \text{и}\ N=2^{\nu},\ \mu,\nu\in N,$$

тогда

$$\frac{1}{4}<\frac{m}{2^{\mu+1}}\le\frac{1}{2}\ \text{для}\ m\in D_{\mu}. \tag{4}$$

Из этого неравенства, учитывая (4), получим:

$$\sum_{m\in D_\mu}\sum_{n\in D\nu}\left|\hat{f}(m,n)\right|^2\le 2^2 2^{-\mu}2^{-\nu}\omega^{2-s}\left(f,\frac{1}{2^{\mu}},\frac{1}{2^{\nu}}\right)V_s(f).$$

Далее на основании неравенства Гельдера имеем

$$S_{\mu\nu}=\sum_{m\in D_\mu}\sum_{n\in D\nu}\gamma_{mn}\left|\hat{f}(m,n)\right|^r\le\left(\sum_{m\in D_\mu}\sum_{n\in D\nu}\gamma_{mn}\left|\hat{f}(m,n)\right|^2\right)^{\frac{r}{2}}\left(\sum_{m\in D_\mu}\sum_{n\in D\nu}\gamma_{mn}^{\frac{2}{2-r}}\right)^{\frac{2-r}{2}}\le$$

$$\le 2^r 2^{-(\mu+\nu)\frac{r}{2}}\omega^{(2-s)\frac{r}{2}}\left(f,\frac{1}{2^{\mu}},\frac{1}{2^{\nu}}\right)V_s^{\frac{r}{2}}(f)\left(\sum_{m\in D_\mu}\sum_{n\in D_\nu}\gamma_{mn}^{\frac{2}{2-r}}\right)^{\frac{2-r}{2}}. \tag{5}$$

В случае $\max\{\mu,\nu\}\ge 1$ мы, используя (1) с $\alpha=\frac{2}{2-r}$ и (5), находим:

$$S_{\mu\nu}\le 2^r 2^{-(\mu+\nu)\frac{r}{2}}\omega^{(2-s)\frac{r}{2}}\left(f,\frac{1}{2^{\mu}},\frac{1}{2^{\nu}}\right)V_s^{\frac{r}{2}}(f)k2^{-(\mu+\nu)\frac{r}{2}}\Gamma_{\mu-1,\nu-1}=$$

$$=k2^r 2^{-(\mu+\nu)}\omega^{(2-s)\frac{r}{2}}\left(f,\frac{1}{2^{\mu}},\frac{1}{2^{\nu}}\right)V_s^{\frac{r}{2}}(f)\Gamma_{\mu-1,\nu-1}.$$

В случае $\mu=\nu=0$ из (5) следует

$$S_{00}\le 2^r\omega^{(2-s)\frac{r}{2}}(f,1,1)V_s^{\frac{r}{2}}(f)\gamma_{1,1};$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{mn}\left|\hat{f}(m,n)\right|^r=\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}S_{\mu\nu}.$$

Отсюда $C=2^r$.

Следствие. При выполнении условий теоремы имеет место неравенство

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_{mn}\left|\hat{f}(m,n)\right|^r\le cV_s^{\frac{r}{2}}(f)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(mn)^{-r}\gamma_{mn}\omega^{(2-s)\frac{r}{2}}\left(f,\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right).$$

Доказательство. Ясно, что

$$\sum_{m=2^{\mu-1}}^{2^{\mu}-1}\sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1}(mn)^{-\frac{r}{q}}\omega^{r}\left(f,\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)_{p}\geq\left(2^{\mu}2^{\nu}\right)^{-\frac{r}{q}}\omega^{r}\left(f,\frac{1}{2^{\mu}},\frac{1}{2^{\nu}}\right)_{p}\sum_{m=2^{\mu-1}}^{2^{\mu}-1}\sum_{n=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1}\gamma_{mn}=$$

$$=2^{-(\mu+\nu)\frac{r}{q}}\omega^{r}\left(f,\frac{1}{2^{\mu}},\frac{1}{2^{\nu}}\right)\Gamma_{\mu-1,\nu-1}.$$

Отсюда и из доказанной теоремы вытекает неравенство. Следствие доказано.

Теорему 1 можно распространить на случай функции многих переменных. Для этого сначала приведем соответствующие определения.

Пусть $f=f\left(x_{1},x_{2},...,x_{N}\right)$ — функция N переменных, определенная на множестве $\left[0,1\right)^{N}$. Рядом Фурье-Уолша называется следующая величина:

$$f\left(x_{1},x_{2},...,x_{N}\right)\sim\sum_{m_{1}\in Z}...\sum_{m_{N}\in Z}\hat{f}\left(x_{1},x_{2},...,x_{N}\right)w_{m_{1}}(x_{1})w_{m_{2}}(x_{2})...w_{m_{N}}(x_{N}),\ \left(x_{1},x_{2},...,x_{N}\right)\in\left[0,1\right)^{N},$$

где $\hat{f}\left(x_{1},x_{2},...,x_{N}\right)\sim\int_{0}^{1}...\int_{0}^{1}f\left(x_{1},x_{2},...,x_{N}\right)w_{m_{1}}(x_{1})w_{m_{1}}(x_{2})...w_{m_{N}}(x_{N})dx_{1}...dx_{N}$; $\left(m_{1},...,m_{N}\right)\in Z^{N}$ — коэффициенты Фурье-Уолша. Положим

$$\Delta_{1}\left(f,x_{1},x_{2},...,x_{N};h_{1},h_{2},...,h_{N}\right)=\sum_{\eta_{1}=0}^{1}...\sum_{\eta_{N}=0}^{1}\left(-1\right)^{\eta_{1}+...+\eta_{N}}\hat{f}\left(x_{1}+\eta_{1}h_{1},..,x_{N}+\eta_{N}h_{N}\right),$$

где $\left(x_{1},x_{2},...,x_{N}\right)\in\left[0,1\right)^{N}$ и $h_{1},h_{2},...,h_{N}>0$. Для $f\in C\left[0,1\right)^{N}$ модулем непрерывности называется следующая величина:

$$\omega\left(f;\delta_{1},...,\delta_{N}\right)_{p}:=\sup\left\{\left(\int_{0}^{1}...\int_{0}^{1}\left|\Delta_{1}\left(f,x_{1},x_{2},...,x_{N};h_{1},h_{2},...,h_{N}\right)\right|^{p}dx_{1}...dx_{N}\right)^{\frac{1}{p}}:0<h_{j}\leq\delta_{j},j=1,...,N\right\};$$

$$\delta_{1},\delta_{2},...,\delta_{N}>0.$$

Говорят, что N — кратная последовательность неотрицательных чисел $\gamma=\left\{\gamma_{m_{1}},...,\gamma_{m_{N}}:\left(m_{1},m_{2},...,m_{N}\right)\in N_{+}^{N}\right\}$ принадлежит классу A_{α} при неотрицательным $\alpha\geq1$, если имеет место неравенство

$$\left(\sum_{m_{1}\in D_{\mu_{1}}}...\sum_{m_{N}\in D_{\mu_{N}}}\gamma_{m_{1},...,m_{N}}^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leq k2^{\left(\mu_{1}+\mu_{2}+...+\mu_{N}\right)\frac{(1-\alpha)}{\alpha}}\sum_{m_{1}\in D_{\mu_{1}-1}}...\sum_{m_{N}\in D_{\mu_{N}-1}}\gamma_{m_{1},...,m_{N}}$$

для всех $\mu_{1},\mu_{2},...,\mu_{N}\in N$, $D_{\mu}:=\left\{2^{\mu-1},2^{\mu-1}+1,...,2^{\mu}-1\right\}$, $\mu\in N_{+}$. Функция $f=f\left(x_{1},x_{2},...,x_{N}\right)$ называется функцией ограниченной s-вариации, $f\in BV_{s}\left(0,1\right]^{N}$, если

$$V_{s}\left(f\right)=\sup\sum_{r_{1}=1}^{s_{1}}...\sum_{r_{N}=1}^{s_{N}}\left|\Delta_{1}\left(f,x_{1}^{r_{1}-1},...,x_{N1}^{r_{N}-1};h_{1}^{r_{1}},h_{2},...,x_{N}^{r_{N}}\right)\right|^{s}<\infty,$$

где супремум берется по всем разбиениям $\rho:=\rho_{1}\times...\times\rho_{N}$ множества $\left[0,1\right)^{N}$, где

$$\rho_{j}:0=x_{j}^{0}<x_{j}^{1}<...<x_{j}^{s_{j}}=1,\ s_{j}\geq1,\ j=1,2,...,N.$$

Теорема 1□. Пусть $f\in C\left(0,1\right]^{N}\cap BV_{s}\left(0,1\right]^{N}$ для некоторых $s\in(0,2)$. Если $\gamma=\left\{\gamma_{m_{1},...,m_{N}}\right\}\in A_{2/(2-r)}$ для некоторых $r\in(0,2)$, тогда из сходимости ряда

$$\sum_{m_{1}=1}^{\infty}...\sum_{m_{N}=1}^{\infty}2^{-\left(\mu_{1}+....+\mu_{N}\right)r}\sum_{m_{1}\in D_{\mu_{1}}}...\sum_{m_{N}\in D_{\mu_{N}}}\gamma_{m_{1},...,m_{N}}\omega^{(2-s)\frac{r}{2}}\left(f;\frac{1}{2^{\mu_{1}}},...,\frac{1}{2^{\mu_{N}}}\right)$$

следует сходимость ряда

$$\sum_{m_{1}=1}^{\infty}...\sum_{m_{N}=1}^{\infty}\gamma_{m_{1},...,m_{N}}\left|\hat{f}(m_{1},...,m_{N})\right|^{r}$$

и выполняется неравенство

$$\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_N=1}^{\infty}\gamma_{m_1,\dots,m_N}\left|\hat{f}\left(m_1,\dots,m_N\right)\right|^r\le\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_N=1}^{\infty}2^{-(\mu_1+\dots+\mu_N)r}\sum_{m_1\in D_{\mu_1}}\cdots\sum_{m_N\in D_{\mu_N}}\gamma_{m_1,\dots,m_N}\omega^{(2-s)\frac{r}{2}}\left(f;\frac{1}{2^{\mu_1}},\dots,\frac{1}{2^{\mu_N}}\right).$$

Следствие. При выполнении условий теоремы имеет место неравенство

$$\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=0}^{\infty}\gamma_{m_1,\dots,m_N}\left|\hat{f}\left(m_1,\dots,m_N\right)\right|^r\le CV_s^{\frac{r}{2}}(f)\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=0}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{N}m_j^{-r}\right)\gamma_{m_1,\dots,m_N}\omega^{(2-s)\frac{r}{2}}\left(f;\frac{1}{m_1},\dots,\frac{1}{m_n}\right).$$

Теоремы 1 и 1' для кратных тригонометрических рядов ранее доказаны в [3].

References

1 *Golubov B.J., Efimov A.V., Skvortsov V.A.* Walsh series and transforms: theory and applications. — M.: Science, 1987. — 344 p.

2 *Moricz F., Veres A*. Absolute convergence of multiple Fourier series revisited // Mathematical analysis. — 2007. — Vol. 34. — P. 145–162.

3 *Gogoladze L., Meskhia R*. On the absolute convergence of trigonometric Fourier series // Math. Inst. — 2006. — Vol. 141. — P. 29–40.

Т.Б.Ахажанов

S-вариациясы шектелген функциялардың Фурье-Уолш еселі қатарларының абсолюттік жинақталуы туралы

Мақалада $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{mn}\left|\hat{f}(m,n)\right|^r$ қатары жинақталуының жеткілікті шарты келтіріледі, мұндағы $r\in(0,2)$ және γ_{mn} — қандайда бір A_α шартын қанағаттандыратын екі еселі тізбек; $\hat{f}(m,n)$ — Фурье-Уолш коэффициенті; $f(x,y)$ — s-вариациялы шектелген функция. Гоголадзе және Месхия Фурье қатарларының абсолюттік жинақталуы туралы Бернштейн, Сас, Зигмунд және де басқа авторлардың классикалық нәтижелерін жалпылады. Біздің мақсатымыз — осы нәтижелерді көп еселі жағдайға Уолш жүйесінде қарастыру.

T.B.Ahazhanov

Absolute convergence of multiple Walsh-Fourier series of functions with bounded s-variations

In the work the sufficient condition for convergence of series $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{mn}\left|\hat{f}(m,n)\right|^r$, where $r\in(0,2)$ and γ_{mn} — the double numerical sequence satisfying some condition A_α, $\hat{f}(m,n)$ — coefficients of Foure-Walsh, and function $f(x,y)$ has a bounded s-variation is presented. In a recent paper Gogoladze and Meskhia generalized the classical results of Bernstein, Szasz, Zygmund and others about absolute convergence of single Fourier series. Our goal consist in spreading these results for multiple series by Walsh system.