УДК 512. 664.3: 517.986.5

Вторые группы когомологий простых модулей над $SO_7(k)$ в положительной характеристике

The second cohomology groups of simple modules over $SO_7(k)$ in positive characteristic

Ибраев Ш.Ш.

Университет «Болашак», Кызылорда (E-mail: ibrayevsh@mail.ru)

G группасы үшін V G-модулінің екінші когомология группасы G-дің V бойынша кеңеюлерінің эквивалентті кластарының группасы ретінде интерпретацияланады. Сондықтан нақты группа үшін жай модульдердің екінші когомология группаларын толық анықтау осындай группаларды жіктеу есебінде маңызды роль атқарады. Сипаттамасы оң өрістегі жай бір байланысқан алгебралық группалар үшін бұл есеп тек рангы аз алгебралық группалар үшін шешілген. Рангы 3-ке тең алгебралық группалар үшін бұл есеп зерттелмеген. Мақалада сипаттамасы $p>7$ алгебралық тұйық k өрісіндегі рангы 3-ке тең жай бір байланысқан $SO_7(k)$ алгебралық группасы үшін жай модульдердің екінші когомология группалары толық есептелді.

For the group G the second cohomology group of the G-module V is interpreted as the group of the cosets of equivalent extensions G by V. Therefore the explicitly description of all second cohomology groups of simple modules for concrete group plays important role in the classification problem of such groups. In the case when G is the simple and simply connected algebraic group this problem was solved only for small algebraic groups. For the algebraic groups of rank 3 this problem remained open. In the present paper the second cohomology groups of simple modules for the simple and simply connected algebraic group $SO_7(k)$ of rank 3 over an algebraically closed field k of characteristic $p>7$ are calculated explicitly.

Когомологии простых модулей конкретных простых односвязных алгебраических групп над алгебраически замкнутым полем положительной характеристики изучаются сравнительно недавно. Общие свойства расширения простых модулей изучены в работах [1–3]. Когомологии первой степени простых модулей полностью вычислены только для следующих простых односвязных алгебраических групп: $SL_2(k)$ [4], $SL_3(k)$ [5], $Sp_4(k)$ [6], $SL_4(k)$ [7], $SO_7(k)$ [8]. Для когомологий второй степени аналогичные результаты получены для $SL_2(k)$ [4], $SL_3(k)$ [9], $Sp_4(k)$ [10], $SL_4(k)$ [11]. Для простых модулей, размерности которых не превосходят *p*, вторые когомологии вычислены для всех простых алгебраических групп [12]. Вторые группы когомологий простых модулей других групп не описаны. Целью данной работы является изучение вторых групп когомологий простой односвязной алгебраической группы $SO_7(k)$ над алгебраически замкнутым полем k положительной характеристики с коэффициентами в простых модулях. Постановка такой задачи интересна тем, что вторая группа когомологии модуля V над алгебраической группы G полностью описывает все векторные расширения данной алгебраической группы с помощью G-модуля V.

Пусть $G=SO_7(k)$, где k — алгебраически замкнутое поле характеристики $p>7$; G_1 — ядро отображения Фробениуса F: $G\to G$. Обозначим через B и T соответственно подгруппу Бореля и максимальный тор группы G. Будем считать, что унипотентный радикал B соответствует отрицательным корням системы корней R группы G. Множества доминантных и ограниченных весов определяются соответственно равенствами $X_+(T)=\{\lambda\in X(T)\,|\,\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle\geq 0$ для всех $\alpha\in S\}$, $X_1(T)=\{\lambda\in X(T)\,|\,0\leq\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle<p$ для всех $\alpha\in S\}$, где $X(T)$ — группа характера максимального тора T, а S — множество простых корней.

Обозначим через $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ фундаментальные веса и будем использовать сокращенную запись (m_1,m_2,m_3) для $m_1\lambda_1+m_2\lambda_2+m_3\lambda_3\in X(T)$. Так как из фундаментальных весов наименьшим является только λ_3, то имеются ровно $|W|/2=24$ альковы аффинной группы Вейля с ограниченными весами. Обозначим их через $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{24}$. Они определяются следующими элементами аффинной группы Вейля W_p: $w_1=1$, $w_2=s_0$, $w_3=w_2s_1$, $w_4=w_3s_2$, $w_5=w_4s_3$, $w_6=w_5s_2$, $w_7=w_6s_1$ [8; 6].

Для рационального G-модуля L кручение Фробениуса степени d обозначается через $L^{(d)}$. Тогда существует единственный $d > 0$ и рациональный G-модуль V такой, что $V^{(d)} = L$. Обозначим его через $L^{(-d)}$.

Для простого G-модуля $L(\lambda)$ спектральная последовательность Линдона-Хохшильда-Серра имеет вид [13], 1.6.6.(3). Когомологии алгебраических групп и их алгебр Ли

$$E_2^{nm} = H^n(G, H^m(G_1, L(\lambda))^{(-1)}) \Rightarrow H^{n+m}(G, L(\lambda)). \quad (1)$$

Если E_∞^{nm} — ее стабилизированное значение, то

$$H^i(G, L(\lambda)) = \bigoplus_{n+m=i} E_\infty^{nm}. \quad (2)$$

Для $\mu \in X_1(T)$ определим следующие множества простых модулей:

$$M_{H_G^{n+m}}^{nm}(\mu) = \left\{ L(\mu + p\gamma) \middle| H^n(G, H^m(G_1, L(\mu + p\gamma))^{(-1)})) \neq 0, \gamma \in X_+(T) \right\}; \quad (3)$$

$$M_{Ext_G^1}(\mu) = \left\{ L(\gamma) \middle| Ext_G^1(L(\mu), L(\gamma)) \neq 0, \gamma \in X_+(T) \right\}. \quad (4)$$

Из (1) и теоремы Стейнберга о тензорном произведении следует, что

$$M_{H_G^{n+m}}^{nm} = \bigcup_{\mu \in \left\{ \gamma \in X_1(T) \middle| H^m(G_1, L(\gamma))^{(-1)} \neq 0 \right\}} M_{H_G^{n+m}}^{nm}(\mu). \quad (5)$$

Пусть $\omega_i \in Y_i$. Введем на рассмотрение множества весов:

$$\Gamma_{01} = \{\omega_2, \omega_6, \omega_{11}, \omega_{13}, \omega_{17}, \omega_{22}, \omega_{24}\}, \text{ если } \omega_1 = (0,0,0);$$
$$\Gamma_{11} = \{\omega_{11}, \omega_{19}\}, \text{ если } \omega_1 = (0,0,p-6);$$
$$\Gamma_{02} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_8, \omega_{10}, \omega_{15}, \omega_{16}, \omega_{18}, \omega_{20}, \omega_{21}, \omega_{23}\}, \text{ если } \omega_1 = (0,0,0);$$
$$\Gamma_{12} = \{\omega_8, \omega_{12}, \omega_{18}, \omega_{20}, \omega_{21}, \omega_{23}, \omega_{24}\}, \text{ если } \omega_1 = (0,0,p-6).$$

Основным результатом является следующая

Теорема 1. Пусть G — односвязная алгебраическая группа $SO_7(k)$ над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 7$ и $L(\lambda)$ — конечномерный простой G-модулъ. Тогда

$$H^2(G, L(\lambda)) = \begin{cases} k, \text{если } \ L(\lambda) \in (M_{H_G^2}^{02} \cup M_{H_G^2}^{11} \cup M_{H_G^2}^{20}) \setminus (M_{02}^{/} \cup M_{12}^{/} \cup M_{12}^{//}), \\ 2k, \text{ если } L(\lambda) \in M_{02}^{/} \cup M_{12}^{/}, \\ 3k, \text{ если } L(\lambda) \in M_{12}^{//}, \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $M_{12}^{/} = \{L(\omega_{20})^{(d)} \otimes L(\lambda_3)^{(d+1)} \mid \omega_{20} \in \Gamma_{12}, d \geq 0\}$, $M_{12}^{//} = \{L(\omega_{21})^{(d)} \otimes L(\lambda_3)^{(d+1)} \mid \omega_{21} \in \Gamma_{12}, d \geq 0\}$, $M_{02}^{/} = \{L(\mu)^{(d)} \otimes L(\lambda_1)^{(d+1)} \mid \mu \in \{\omega_{18}, \omega_{23}\} \in \Gamma_{02}, d \geq 0\}$.

Введем на рассмотрение следующие элементы аффинной группы Вейля:

$$w^{/} = s_0 s_1 s_2 s_3, \quad w^{//} = s_0 s_1 s_2 s_3 s_2, \quad w^{///} = s_0 s_1 s_2 s_3 s_2 s_1.$$

Лемма 1. Пусть $p > 7$ и

$$M_i = \{L(s_0 \cdot \lambda_i), L(s_0 s_1 s_2 s_0 s_1 \cdot \lambda_i), L(w^{/} w^{/} s_0 s_1 \cdot \lambda_i), L(w^{///} w^{//} \cdot \lambda_i), L((w^{//})^2 s_0 s_1 \cdot \lambda_i), L(w^{///} w^{//} (w^{/})^2 \cdot \lambda_i),$$
$$L((w^{//})^3 w^{/} \cdot \lambda_i), L(w^{/} w^{//} w^{/} s_0 s_1 s_2 \cdot \lambda_i), L(w^{//} (w^{/})^2 s_0 s_1 \cdot \lambda_i)\},$$
$$N_i = \{L(\lambda_i) \otimes L(\mu^{/})^{(1)} \mid L(\mu^{/}) \in M_{Ext_G^1}(0)\}.$$

Тогда во всех перечисленных ниже нетривиальных случаях $Ext_G^1(L(\lambda), L(\mu)) \approx k$:

(i) $\lambda = 0$ и $M_{Ext_G^1}(0) = M_{H_G^1}^{01} \cup M_{H_G^1}^{10}$;

(ii) $\lambda = \lambda_i$ и $M_{Ext_G^1}(\lambda_i) = M_i \cup N_i$ для всех $i = 1,2,3$.

Доказательство. Известно, что $Ext_G^1(L(0), L(\mu)) \approx H^1(G, L(\mu))$. Тогда согласно (4) утверждение *(i)* следует из теоремы 2 работы [8].

(ii) Для $\lambda = \lambda^0 + p\lambda'$ и $\mu = \mu^0 + p\mu'$, где $\lambda^0, \mu^0 \in X_1(T)$, $\lambda', \mu' \in X_+(T)$, имеет место следующий изоморфизм G-модулей ([1], теорема 5.2; [6], (1.4)):

$$Ext_G^1(L(\lambda), L(\mu)) \approx \begin{cases} Hom_G(L(\mu'), Ext^1_{G_1}(L(\lambda^0), L(\mu^0))^{(-1)} \otimes L(\lambda')), \text{ если } \lambda^0 \neq \mu^0; \\ Ext^1_G(L(\lambda'), L(\mu')), \text{ если } \lambda^0 = \mu^0. \end{cases} \tag{6}$$

Пусть $\lambda = \lambda^0 = \lambda_i \neq \mu^0$. Тогда по формуле (6) $Ext^1_G(L(\lambda_i), L(\mu)) \neq 0$, если $L(\mu) \in M_i = \{L(\mu) = L(\mu^0 + p\mu') \mid Hom_G(L(\mu'), Ext^1_{G_1}(L(\lambda_i), L(\mu^0)^{(-1)}) \neq 0\}$. Так как все фундаментальные веса лежат в нижнем фундаментальном алькове, то по принципу связанности старшие веса модулей множества M_i получаются из $M^{01}_{H^1_G}$ заменой веса $\omega_1 = 0$ на $\omega_1 = \lambda_i$. Согласно теореме 2 работы [8]

$$M^{01}_{H^1_G} = \{L(s_0 \cdot 0), L(s_0 s_1 s_2 s_0 s_1 \cdot 0), L(w'' w' s_0 s_1 \cdot 0), L(w''' w'' \cdot 0), L((w'')^2 s_0 s_1 \cdot 0), L(w''' w'' (w')^2 \cdot 0);$$
$$L((w'')^3 w' \cdot 0), L(w' w'' w' s_0 s_1 s_2 \cdot 0), L(w'' (w')^2 s_0 s_1 \cdot 0)\}.$$

Заменив нулевой вес на λ_i, получаем все элементы множества M_i, перечисленные в данной лемме.

Пусть теперь $\lambda = \lambda^0 = \lambda_i = \mu^0$. По формуле (6) $Ext^1_G(L(\lambda_i), L(\mu)) \neq 0$, если $L(\mu) \in N_i = \{L(\lambda_i) \otimes L(\mu')^{(1)} \mid Ext^1_G(L(0), L(\mu')) \neq 0, \mu' \in X_+(T)\}$. Используя утверждения *(i)* данной леммы, получим $N_i = \{L(\lambda_i) \otimes L(\mu')^{(1)} \mid L(\mu') \in M_{Ext^1_G}\}$. Таким образом, по (6) $M_{Ext^1_G}(\lambda_i) = M_i \cup N_i$ для всех $i = 1, 2, 3$.

Наконец, по предложению 4 работы [14] во всех перечисленных выше случаях $Ext^1_G(L(\lambda), L(\mu)) \approx k$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $p > 7$, тогда

$$\textit{(i)}\ M^{11}_{H^2_G}(\mu) = M_{Ext^1_G}(\lambda_1), \text{ если } \mu \in \{\omega_6, \omega_{13}, \omega_{24}\} \subset \Gamma_{01};$$

$$\textit{(ii)}\ M^{11}_{H^2_G}(\mu) = M_{Ext^1_G}(\lambda_2) \cup M_{Ext^1_G}(0), \text{ если } \mu = \omega_{17} \in \Gamma_{01};$$

$$\textit{(iii)}\ M^{11}_{H^2_G}(\mu) = M_{Ext^1_G}(\lambda_3), \text{ если } \mu \in \{\omega_{11}, \omega_{19}\} = \Gamma_{11};$$

$$\textit{(iv)}\ M^{11}_{H^2_G}(\mu) = M_{Ext^1_G}(0), \text{ если } \mu \in \{\omega_2, \omega_{11}, \omega_{22}\} = \Gamma_{01}.$$

Доказательство. (*i*) Пусть $\mu \in \{\omega_6, \omega_{13}, \omega_{24}\} \subset \Gamma_{01}$. По (3)

$$M^{11}_{H^2_G}(\mu) = \{L(\mu) \otimes L(\gamma)^{(1)} \big| H^1(G, H^1(G_1, L(\mu) \otimes L(\gamma)^{(1)})^{(-1)} \neq 0, \gamma \in X_+(T)\}.$$

По предложению 5*(ii)* работы [14] и по лемме 1.1 работы [15]

$$M^{11}_{H^2_G}(\mu) = \{L(\mu) \otimes L(\gamma)^{(1)} \big| H^1(G, L(\lambda_1) \otimes L(\gamma)) \neq 0\} =$$
$$= \{L(\mu) \otimes L(\gamma)^{(1)} \big| Ext^1_G(L(\lambda_1), L(\gamma)) \neq 0\} = M_{Ext^1_G}(\lambda_1).$$

(*ii*) Пусть $\mu = \omega_{17} \in \Gamma_{01}$. По (3)

$$M^{11}_{H^2_G}(\mu) = \{L(\mu) \otimes L(\gamma)^{(1)} \big| H^1(G, H^1(G_1, L(\mu) \otimes L(\gamma)^{(1)})^{(-1)} \neq 0, \gamma \in X_+(T)\}.$$

Далее, по предложению 5(*iii*) работы [14] и по лемме 1.1 работы [15]

$$M^{11}_{H^2_G}(\mu) = \{L(\mu) \otimes L(\gamma)^{(1)} \big| H^1(G, (L(\lambda_2) \oplus k) \otimes L(\gamma)) \neq 0\} =$$
$$= \{L(\mu) \otimes L(\gamma)^{(1)} \big| H^1(G, L(\lambda_2) \otimes L(\gamma)) + H^1(G, L(\gamma)) \neq 0\} =$$
$$= \{L(\mu) \otimes L(\gamma)^{(1)} \big| Ext^1_G(L(\lambda_2), \otimes L(\gamma)) + Ext^1_G(k, L(\gamma)) \neq 0\} = M_{Ext^1_G}(\lambda_2) \cup M_{Ext^1_G}(0).$$

(*iii*) и *(iv)* доказываются аналогично предыдущему случаю (*i*). Доказательство леммы завершено.

Лемма 3. Пусть $p > 7$, тогда

$$\textit{(i)}\ M^{02}_{H^2_G}(\mu) = \{L(\mu) \otimes L(\lambda_1)^{(1)}\}, \text{ если } \mu \in \{\omega_5, \omega_{10}, \omega_{18}\} \subset \Gamma_{02};$$

$$\textit{(ii)}\ M^{02}_{H^2_G}(\mu) = \{L(\mu), L(\mu) \otimes L(\lambda_2)^{(1)}\}, \text{ если } \mu \in \{\omega_{16}, \omega_{20}\} \subset \Gamma_{02};$$

$$\textit{(iii)}\ M^{02}_{H^2_G}(\mu) = \{L(\mu), L(\mu) \otimes L(\lambda_1)^{(1)}, L(\mu) \otimes L(\lambda_2)^{(1)}\}, \text{ если } \mu = \omega_{15} \in \Gamma_{02};$$

$$\textit{(iv)}\ M^{02}_{H^2_G}(\mu)=\{L(\mu)\otimes L(\lambda_3)^{(1)}\},\ \text{если}\ \mu\in\{\omega_8,\omega_{12},\omega_{18},\omega_{20},\omega_{24}\}\subset\Gamma_{12};$$

$$\textit{(v)}\ M^{02}_{H^2_G}(\mu)=\{L(\mu)\},\ \text{если}\ \mu\in\{\omega_3,\omega_8\}\subset\Gamma_{02};$$

$$\textit{(vi)}\ M^{02}_{H^2_G}(\mu)=\{L(\mu),L(\mu)\otimes L(\lambda_1)^{(1)}\},\ \text{если}\ \mu=\omega_{21}\in\Gamma_{02};$$

$$\textit{(vii)}\ M^{02}_{H^2_G}(\mu)=\{L(\mu)\otimes L(\lambda_i)^{(1)}\,\big|\,i=1,2,3\},\ \text{если}\ \mu=\omega_{23}\in\Gamma_{02};$$

$$\textit{(viii)}\ M^{02}_{H^2_G}(\mu)=\{L(\mu)\otimes L(\lambda_3)^{(1)},L(\mu)\otimes L(\lambda_1+\lambda_3)^{(1)}\},\ \text{если}\ \mu\in\{\omega_{21},\omega_{23}\}\subset\Gamma_{12};$$

$$\textit{(ix)}\ M^{02}_{H^2_G}(0)=\{L(\tilde\alpha)\}.$$

Доказательство. Докажем утверждения (*i*). Остальные утверждения доказываются аналогично. Пусть $\mu\in\{\omega_5,\omega_{10}\}\subset\Gamma_{02}$. По (3)

$$M^{02}_{H^2_G}(\mu)=\{L(\mu)\otimes L(\gamma)^{(1)}\,\big|\,H^0(G,H^2(G_1,L(\mu)\otimes L(\gamma)^{(1)})^{(-1)}\neq 0,\gamma\in X_+(T)\}.$$

По предложению 6*(vi)* работы [14] и по лемме 1.1 работы [15]

$$M^{02}_{H^2_G}(\mu)=\{L(\mu)\otimes L(\gamma)^{(1)}\,\big|\,H^0(G,L(\lambda_1)\otimes L(\gamma))\neq 0\}=$$
$$=\{L(\mu)\otimes L(\gamma)^{(1)}\,\big|\,Hom_G(L(\lambda_1),L(\gamma))\neq 0\}=\{L(\mu)\otimes L(\lambda_1)^{(1)}\}.$$

Если $\mu=\omega_{18}\in\Gamma_{02}$, то по предложению 6*(vii)* работы [4] и по лемме 1.1 работы [5]

$$M^{02}_{H^2_G}(\mu)=\{L(\mu)\otimes L(\gamma)^{(1)}\,\big|\,H^0(G,2L(\lambda_1)\otimes L(\gamma))\neq 0\}=$$
$$=\{L(\mu)\otimes L(\gamma)^{(1)}\,\big|\,Hom_G(2L(\lambda_1),L(\gamma))\neq 0\}=\{L(\mu)\otimes L(\lambda_1)^{(1)}\}.$$

Доказательство леммы завершено.

Лемма 4. Пусть $p>7$, тогда $M^{20}_{H^2_G}(0)=\{L(\gamma)^{(r)}\,\big|\,H^2(G,L(\gamma))\neq 0,\gamma\in X_+(T)\}$.

Доказательство. Так как $\mu=0$, то по (3)

$$M^{20}_{H^2_G}(\mu)=\{L(0)\otimes L(\gamma)^{(1)}\,\big|\,H^2(G,H^0(G_1,L(0)\otimes L(\gamma)^{(1)})^{(-1)}\neq 0,\gamma\in X_+(T)\}=$$
$$=\{L(\gamma)^{(1)}\,\big|\,H^2(G,L(\gamma))\neq 0,\gamma\in X_+(T)\}.$$

Лемма 5. Пусть $p>7$, тогда

$$\textit{(i)}\ M^{02}_{H^1_G}=\cup_{\mu\in\Gamma_{02}\cup\Gamma_{12}}M^{02}_{H^2_G}(\mu);$$

$$\textit{(ii)}\ M^{11}_{H^2_G}=\cup_{\mu\in\Gamma_{01}\cup\Gamma_{11}}M^{11}_{H^2_G}(\mu);$$

$$\textit{(iii)}\ M^{20}_{H^2_G}=\{L(\lambda)^{(d)}\,\big|\,\lambda\in M^{02}_{H^2_G}\cup M^{11}_{H^2_G},d>0\}.$$

Доказательство. (*i*) следует из (5) и предложения 6 работы [14]. Аналогично, *(ii)* следует из (5) и предложения 5 работы [14]. Утверждение *(iii)* вытекает из леммы 4 и утверждений (*i)* и *(ii)* данной леммы. Лемма доказана.

Предложение 5. Пусть $p>7$ и $L(\lambda)$ — конечномерный простой *G*-модулъ. Тогда

$$\textit{(i)}\ E_2^{11}=E_\infty^{11};$$

$$\textit{(ii)}\ E_2^{20}=E_\infty^{20};$$

$$\textit{(iii)}\ E_2^{02}=E_\infty^{02};$$

$$\textit{(iv)}\ H^2(G,L(\lambda))=E_2^{02}\oplus E_2^{11}\oplus E_2^{20}.$$

Доказательство. По теореме Стейнберга о тензорном произведении λ можно представить в следующем виде: $\lambda=\lambda^0+p\lambda'$, где $\lambda^0\in X_1(T)$ и $\lambda'\in X_+(T)$. По определению, E_3^{nm} является когомологией последовательности $E_2^{n-2,m+1}\to E_2^{nm}\to E_2^{n+2,m-1}$. Тогда $E_2^{nm}=E_3^{nm}$, если

$$E_2^{n-2,m+1}=E_2^{n+2,m-1}=0,\ \text{когда}\ E_2^{nm}\neq 0. \tag{7}$$

(i) Так как для любой спектральной последовательности вида (1) $E_3^{11}=E_\infty^{11}$, то достаточно показать, что $E_2^{11}=E_3^{11}$. Предположим, что $E_2^{3,0}\neq 0$. Используя (1) и лемму 1.1 работы [15], получим:

$$E_2^{3,0}=H^3(G,H^0(G_1,L(\lambda^0))^{(-1)}\otimes L(\lambda'))=H^3(G,H^0(G_1,L(0))^{(-1)}\otimes L(\lambda'))=H^3(G,L(\lambda')). \tag{8}$$

Согласно предложению 6*(i)* работы [14] $E_2^{02} = H^0(G, H^2(G_1, L(0))^{)(-1)} \otimes L(\lambda^{/})) = Hom_G(L(\tilde{\alpha}), L(\lambda^{/}))$. Откуда следует, что $L(\lambda^{/}) \approx L(\tilde{\alpha})$, если $E_2^{11} \neq 0$. Следовательно, по принципу связанности для G $H^3(G, L(\lambda^{/})) = 0$. Тогда по (8) $E_2^{3,0} = 0$. В таком случае согласно (7) $E_2^{11} = E_3^{11}$.

(ii) Доказательство аналогично предыдущему случаю.

(iii) Докажем, что $E_2^{-2,3} = E_2^{2,1} = 0$, если $E_2^{02} \neq 0$. Тривиальность $E_2^{-2,3}$ очевидна. Пусть $E_2^{2,1} \neq 0$. Используя формулу (1) и лемму 1.1 работы [15], получим: $E_2^{2,1} = H^2(G, H^1(G_1, L(\lambda))^{(-1)}) = H^2(G, H^1(G_1, L(\lambda^0))^{(-1)} \otimes L(\lambda^{/}))$. Тогда согласно предложениям 5 и 6 работы [14] $H^1(G_1, L(\lambda^0))^{(-1)} = 0$. Следовательно, $E_2^{21} = 0$ и по (7) $E_2^{02} = E_3^{02}$. Так как $E_4^{02} = E_\infty^{02}$, остается показать, что $E_3^{02} = E_4^{02}$. E_4^{02} является когомологией последовательности $E_3^{-3,2} \to E_3^{02} \to E_3^{30}$. Поэтому докажем, что $E_2^{30} = 0$, если $E_2^{02} \neq 0$.

Предположим, что $E_2^{3,0} \neq 0$ и $E_2^{02} \neq 0$. Тогда по (8) и предложению 6 работы [14] $E_2^{3,0} = H^3(G, L(\tilde{\alpha})) = 0$.

Утверждение *(iv)* следует из утверждений *(i)–(iv)* данной леммы и формулы (2). Предложение доказано.

Доказательство теоремы 1. Согласно леммам 1–5 множества простых G-модулей $M_{H_G^2}^{02}(\mu), \mu \in \Gamma_{02} \cup \Gamma_{12}$, $M_{H_G^2}^{11}(\mu), \mu \in \Gamma_{01} \cup \Gamma_{11}$, $M_{H_G^2}^{20}$ попарно не пересекаются. Кроме того, из лемм 1, 2 и 5*(ii)* следует, что

$$E_2^{11} \approx \begin{cases} k, \text{ если } L(\lambda) \in M_{H_G^2}^{11}, \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

А также по предложению 6 работы [4] и лемме 5*(i)*

$$E_2^{02} \approx \begin{cases} k, \text{ если } L(\lambda) \in M_{H_G^2}^{02} \setminus (\{L(\mu) \otimes L(\lambda_1)^{(1)} \mid \mu \in \{\omega_{18}, \omega_{23}\} \subset \Gamma_{02}\} \cup \{L(\mu) \otimes L(\lambda_3)^{(1)} \mid \mu \in \{\omega_{20}, \omega_{21}\} \subset \Gamma_{12}\}), \\ 2k, \text{ если } L(\lambda) \in \{L(\mu) \otimes L(\lambda_1)^{(1)} \mid \mu \in \{\omega_{18}, \omega_{23}\} \subset \Gamma_{02}\} \cup \{L(\omega_{20}) \otimes L(\lambda_3)^{(1)}, \omega_{20} \in \Gamma_{12}\}, \\ 3k, \text{ если } L(\lambda) = L(\omega_{21}) \otimes L(\lambda_3)^{(1)}, \textit{ где } \omega_{21} \in \Gamma_{12}, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Аналогично, по лемме 5*(iii)* и предыдущим двум формулам:

$$E_2^{20} \approx \begin{cases} k, \text{ если } L(\lambda) \in M_{H_G^2}^{20} \setminus (M_{02}^{/} \cup M_{12}^{/} \cup M_{12}^{//}), \\ 2k, \text{ если } L(\lambda) \in M_{02}^{/} \cup M_{12}^{/}, \\ 3k, \text{ если } L(\lambda) \in M_{12}^{//}, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда утверждение теоремы следует из предложения 5. Доказательство теоремы 1 завершено.

Согласно теореме 1 размерности вторых групп когомологий не превосходят ранга группы G. Аналогичное утверждение имеет место для алгебраической группы $SL_4(k)$ [11]. Из результатов работ [4, 9, 10] также следует, что таким свойством обладают вторые группы когомологий алгебраических групп ранга 2.

Используя теорему 1 и результаты работы [14], можно сравнить вторые группы когомологий группы G и ее алгебры Ли g. По теореме 1 группа G обладает бесконечным дискретным семейством простых модулей, вторые группы когомологий которых нетривиальны. Кроме того, количество таких простых модулей с ограниченными старшими весами конечно. Для алгебры Ли g наблюдается иная картина. Известно, что 2-особые простые модули над алгеброй Ли g ограничены и количество 2-особых модулей конечно [16, 17]. Поэтому следует сравнить только когомологии ограниченных простых модулей. По теореме 1 только 7 простых модулей со старшими ограниченными весами имеют нетривиальную вторую когомологию: $L(\omega_3)$, $L(\omega_8)$ $L(\omega_{15})$, $L(\omega_{16})$ $L(\omega_{20})$, $L(\omega_{21})$ и $L(\omega_{23})$ при $\omega_1 = (0,0,0)$. Согласно предложениям 4 *(ii),(iv)* и 6*(x)* работы [14] вторые группы когомологий алгебры Ли g для этих модулей также нетривиальны, но совпадают с соответствующими вторыми когомологиями группы G только в двух случаях, когда $L(\lambda) = \omega_3$ и $L(\lambda) = \omega_8$.

Таким образом, хотя для двух простых модулей имеются совпадения, вторые группы когомологий алгебраических группы G и ее алгебры Ли g существенно различаются.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы фундаментальных исследований Ф. 0508 МОиН РК.

References

1. *Andersen H.H.* Extensions of modules for algebraic groups // Amer. J. Math. — 1984. — Vol. 106. — P. 489–504.
2. *Lin Z.* Extensions between simple modules for Frobenius kernels // Math. Z. — 1991. — Vol. 207. — P. 485–499.
3. *Bendel C.P., Nakano D.K., Pillen C.* Extensions for finite Chevalley groups II // Trans. AMS. — 2002. — Vol. 354. — №11. — P. 4421–4454.
4. *Stewart D.I.* The second cohomology of simple SL_2-modules // Proc. Amer. Math. Soc. — 2010. — Vol. 138. — P. 427–434.
5. *Yehia S.El.* Extensions of simple modules for the universal Chevalley group and parabolic subgroup. — Warwick: Ph.D. Thesis, 1982.
6. *Ye Jiachen.* Extensions of simple modules for the group Sp (4,K) // J. London Math. Soc. — 1990. — Vol. 2 (41). — P. 51–62.
7. *Ibraev S.S.* The second cohomology groups of $SL_5(k)$ in positive characteristic // Search, ser. nat. and techn. scien. — 2010. — № 4 (2). — P. 136–141.
8. *Ibraev S.S.* The first cohomology groups of simple modules over the algebraic group of type B_3 in positive characteristic // Young scientist. — 2011. — T. 2. — 2 (25). — P. 6–10.
9. *Stewart D.I.* The second cohomology of simple SL_3-modules // arXiv:0907.4626vl [math.RT], 2009.
10. *Ibraev S.S.* The second cohomology groups of simple modules for *$Sp_4(k)$* // Abstracts of the Int. Algebraic Conf. dedicated to the 70th birthday of A.V. Yakovlev. St. Peterburg, Russia. — 2010. — P. 113–114.
11. *Ibraev S.S.* On the second cohomology groups of simple modules over $SL_4(k)$ in positive characteristic // Rep. of the II-th Int. Conf. «Science in the modern world» (30 July, 2010). — M., 2010. — P. 273–278.
12. *McNinch G.J.* The second cohomology of small irreducible modules for simple algebraic group // Pacific. J. Math. — 2002. — Vol. 204. — № 2. — P. 459–472.
13. *Jantzen J.C.* Representations of algebraic groups. Boston: Pure and Applied Mathematics. — Vol. 131. — 1987.
14. *Ibraev S.S.* On the cohomology of simple modules for the Frobenius kernel // Rep. of the Int. Sci. and Pract. Conf. «Actual problems of teaching natural and mathematical sciences” (19–20 November, 2010). — Kyzylorda. — 2011. — P. 363–368.
15. *Sullivan J.B.* Frobenius operations on Hochschild cohomology // Amer. J. Math. — 1980. — Vol. 102. — № 4. — P. 765–780.
16. *Dzhumadil'daev A.S.* On the cohomology of modular Lie algebras // Math. collection. — 1982. — Vol. 119 (161). — № 9. — P. 132–149.
17. *Dzhumadil'daev A.S.* Cohomology and nonsplit extensions of modular Lie algebras // Contemp. Math. — 1992. — Vol. 131, Part. 2. — P. 31–43.