

- 3 Razumov E.M., Belova L.D., Epatov M.E., Proskuryakov A.V. *Network graphs in planning: the manual book*, Moscow: High School, 1981, p. 168.
- 4 Ahyudzha H. *Network methods of management in designing and production* / Transl. from Engl., Moscow: Mir, 1979, p. 639.
- 5 Terekhov L.L., Kutsenko V.A., Sidnev S.P. *Economic-mathematical methods and models in planning and management*, Kiev: Vishcha school, 1987, p. 231.
- 6 Borozdin E.G. *Network planning and management in construction: The manual book*, Moscow: Stroyizdat, 1972, p. 288.
- 7 Kholod N.E., Kuznetsov A.V., Zhikhar Y.N., etc. *Economic-mathematical methods and models: The manual book*, Minsk: BGEU, 1999, p. 413.
- 8 Melnik M.M. *Economic-mathematical methods and models in planning and inventory management: Textbook*, Moscow: High school, 1990, p. 208.
- 9 Vasilyeva L.N., Muravyeva E.A. *Methods of control innovative activities: the manual book*, Moscow: KNORUS, 2005, p. 320.
- 10 Upravlenie proektom. *Project management. Bases of project management: Textbook* / Under the M.L.Razu's editorship, Moscow: KNORUS, 2006, p. 301.
- 11 Karasev A.E., Kremer N.S., Savelyeva T.E. *Mathematical methods and models in planning: The manual book*, Moscow: Economics, 1987, p. 172.

УДК 519.683.85

М.М.Букенов, А.Н.Москаленко

*Каргандинский государственный университет им. Е.А.Букедова (E-mail: crasy_bee89@mail.ru)***Численная реализация алгоритма для динамической задачи теории упругости**

Авторами реализован алгоритм решения трёхмерной динамической задачи теории упругости «в скоростях-напряжениях», использующий расщепление оператора Ламе. Рассмотрена сеточная задача «в скоростях-напряжениях» в трёхмерном случае, где доказаны теорема аддитивности схем и теорема о консервативности схем. Трёхмерная динамическая задача теории упругости в «скоростях-напряжениях» решена с помощью метода прогонки, алгоритм реализован на языке программирования Delphi 7.0 с построением графиков функций тестового и приближённых решений на сетках различной точности. Целью авторов было реализовать алгоритм решения трёхмерной динамической задачи теории упругости «в скоростях-напряжениях» и сравнить тестовое и приближённое решения при расчётах с различной степенью точности. Цель полностью достигнута.

Ключевые слова: алгоритм решения трёхмерной динамической задачи, расщепление оператора Ламе, сеточная задача «в скоростях-напряжениях», трёхмерная задача «в скоростях-напряжениях», метод прогонки, гильбертово пространство, ковариантное дифференцирование, аддитивное разложение, разностная схема, сеточный закон сохранения.

1. Сеточная задача «в скоростях-напряжениях». Ради некоторых упрощений в обозначениях мы положим $f = 0$ и рассмотрим трёхмерный случай. Тогда

$$R = \begin{pmatrix} \nabla_1 & 0 & 0 & \nabla_2 & \nabla_3 & 0 \\ 0 & \nabla_2 & 0 & \nabla_1 & 0 & \nabla_3 \\ 0 & 0 & \nabla_3 & 0 & \nabla_1 & \nabla_2 \end{pmatrix}^T; \quad (1.1)$$

$$R = - \begin{pmatrix} \nabla_1 & 0 & 0 & \nabla_2 & \nabla_3 & 0 \\ 0 & \nabla_2 & 0 & \nabla_1 & 0 & \nabla_3 \\ 0 & 0 & \nabla_3 & 0 & \nabla_1 & \nabla_2 \end{pmatrix}.$$

В декартовой $\left(\nabla_i \equiv \frac{\partial}{\partial y_i}\right)$ и цилиндрической системах координат разностные схемы для поста-

новки «в скоростях-напряжениях» впервые, по-видимому, рассматривались в [1]. В декартовой системе координат, начиная с [2] (см. также [3–5]), (2.20, ч. I), приводится к симметрической t -гиперболической, по Фридриху, системе

$$\frac{A_0 \partial W}{\partial t} + \frac{A_1 \partial W}{\partial y_1} + \frac{A_2 \partial W}{\partial y_2} + \frac{A_3 \partial W}{\partial y_3} = 0, W = (v / \sigma), A_0 = A_0^T > 0, A_i = A_i^T, \quad (1.2)$$

которая и служит основой при численном решении динамической задачи.

Однако при таком подходе упускается из виду следующее обстоятельство. Оператор $\frac{\partial}{\partial y_i}$ является в (1.2) как в результате применения оператора $R^* : H \rightarrow H^*$ к вектору $\sigma \in H(\eta)$, так и в результате применения оператора $R^* : H^* \rightarrow H$ к вектору $v \in H^*(w)$. Поясним сказанное на простейшем примере. Для скалярных функций при соответствующих краевых условиях (либо в случае финитных функций) формула интегрирования по частям даёт

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y_i}, v \right)_D = - \left(u, \frac{\partial v}{\partial y_i} \right)_D. \quad (1.3)$$

Поэтому оператор $-\frac{\partial}{\partial y_i}$ можно считать сопряжённым, по Лагранжу, к оператору $\frac{\partial}{\partial y_i}$. В дискретном случае в стандартных обозначениях [6] вместо (1.3) будем иметь $(u_{y_i}, v)_{D_h} = - (u, v_{g_i})_{D_h}$ и сопряжённым к оператору $(\cdot)_{y_i}$ следует считать оператор $-(\cdot)_{g_i}$. Поэтому хотя в непрерывном случае (2.20, ч. I) и (1.2) эквивалентны, но для сохранения структуры (2.20, ч. I) в дискретной модели (1.2) не может использоваться одна и та же аппроксимация оператора $\frac{\partial}{\partial y_i}$ для всех компонент вектора W_h . Например, если для компонент вектора v_h в (1.2) используется аппроксимация $(\cdot)_{y_i}$, то для компонент вектора σ_h в (1.2) следует принять аппроксимацию $(\cdot)_{g_i}$ и наоборот.

По существу именно из этих соображений для одномерных уравнений акустики (частный случай модели (2.20, ч. I), когда H и H^* совпадают) в декартовой и в стандартных ортогональных системах координат построены и обоснованы полностью консервативные разностные схемы с сеточным законом сохранения типа (2.27, ч. I)

$$\left[\|v_h\|_{D_h}^2 + (\sigma_h, \varepsilon_h)_{D_h} \right]_i = 0. \quad (1.4)$$

Пусть \bar{D} — криволинейный параллелепипед: $\bar{D} = D \cup \gamma = \{(y_1, y_2, y_3) | 0 \leq y_m \leq l_m, m = 1, 2, 3\}$. Введём в \bar{D} равномерную по каждой криволинейной координате y_m сетку: $h_m > 0, N_m h_m = l_m$. Узлы сетки $\bar{D}_h : (y_{1i_1}, y_{2i_2}, y_{3i_3}) \in \bar{D}_h$ определим как пересечение координатных линий $y_{1i_1} = i_1 h_1, y_{2i_2} = i_2 h_2, y_{3i_3} = i_3 h_3, 0 \leq i_m \leq N_m$. Пусть $r > 0$, тогда $\bar{Q}_{\tau, h} = \bar{Q}_h = \{D_h \times [0 \leq t = n\tau \leq t_1]\}$. От векторов непрерывных аргументов перейдём к векторам дискретных аргументов, заданных на сетке $\bar{Q}_h : v(M_h, n\tau) = v_h^n, M_h \in \bar{D}_h; \varepsilon(M_h, n\tau) = \varepsilon_h^n$ и т.д. По аналогии с непрерывным случаем определим сеточные гильбертовы пространства $H_h(\eta_h), H_h^*(w_h)$. Для опорного оператора $R : H^* \rightarrow H$ выберем какую-либо аппроксимацию $R_h : H_h^* \rightarrow H_h$. Сеточную аппроксимацию оператора $R^* : H \rightarrow H^*$, сопряжённого, по Лагранжу, к R , определим из соотношения (ср. с (2.1, ч. I))

$$[R_h w_h, \eta_h]_{H_h} = [w_h, R_h^* \eta_h]_{H_h^*}. \quad (1.5)$$

При введении сеточных гильбертовых пространств H_h, H_h^* следует соответствующим образом определить сеточные скалярные произведения $[\cdot]_{H_h}$ и $[\cdot]_{H_h^*}$. Это, в свою очередь, сводится к построению соответствующего сеточного скалярного произведения $(\cdot)_{D_h}$ для $w_h \in H_h^*, \eta_h \in H_h$. Способы определения $(\cdot)_{D_h}$ в (1.5) существенно зависят как от конкретного выбора R_h , так и от краевых условий (1.13, ч. I) динамической задачи, то есть от $U(R_h), U(R_h^*)$. Пока мы констатируем принципиальную

возможность построения нужных $(\cdot)_{D_h}$ для H_h, H_h^* . Все необходимые для понимания комментарии будут даны по ходу дальнейшего изложения.

Для задачи «в скоростях-напряжениях» (2.26, ч. I) при $f = 0$ рассмотрим разностную схему

$$\begin{aligned} v_i^{n+1} + 0,5R_h^*(\sigma_h^n + \sigma_h^{n+1}) &= 0, v_h^0 = \psi_h(M_h); \\ \varepsilon_i^{n+1} + 0,5R_h(v_h^n + v_h^{n+1}) &= 0, \sigma_h = K_h \varepsilon_h, \varepsilon_h(M_h, 0) = \varepsilon_h^0 = R_h \phi_h(M_h). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Под K_h следует понимать какую-либо проекцию K на D_h , неразъясняемые обозначения являются стандартными в теории разностных схем [7]. Там, где это не вызывает недоразумений, часть индексов может быть опущена.

Из (1.6) вытекает, что $J_1 + J_2 = 0,5[\sigma_h^n + \sigma_h^{n+1}, \varepsilon_i^{n+1}]_{H_h} = 0$. Всегда можно считать, что $K = K^T > 0$ влечёт за собой и $K_h = K_h^T > 0$. Поэтому $J_1 = 0,5[\sigma_h^{n+1}, \varepsilon_h^{n+1}]_{H_h}$. Далее $J_2 = -0,25[R_h^*(\sigma_h^n + \sigma_h^{n+1}), v_h^n + v_h^{n+1}]_{H_h}$, что в силу первого уравнения из (1.6) даёт $J_2 = 0,5[v_h^{n+1}, v_h^{n+1}]_{H_h} = 0,5(\|v_h^{n+1}\|_{H_h}^2)$. Следовательно,

$$(J_3^{n+1})_i = (\|v_h^{n+1}\|_{H_h}^2 + [\sigma_h^{n+1}, \varepsilon_h^{n+1}]_{H_h})_i = 0, \quad (1.7)$$

что в точности совпадает с (1.4). В соответствии с терминологией из [8, 9] соотношение (1.7) означает, что справедлива

Теорема 1.1. Разностная схема (1.6) полностью консервативна.

Принципиальным здесь является тот факт, что при доказательстве теоремы 1.1 нигде в явном виде не используется конкретный вид операторов R_h и R_h^* . Существенно лишь то, что конкретная аппроксимация опорного оператора R в силу (1.5) порождает конкретную аппроксимацию сопряжённого оператора R^* . Это и позволяет на сеточном уровне сохранить структуру дифференциальной задачи (2.26, ч. I) и структуру интеграла энергии (2.27, ч. I) для этой задачи.

Можно трактовать J_3 как некоторую составную норму (полунорму) сеточной вектор-функции упругих перемещений $u_h : J_3 = [u_i, u_i]_{H_h} + [u_h, A_h u_h]_{H_h}$, $A_h = R_h^* K_h R_h$. Тогда из (1.7) вытекает устойчивость разностной схемы (1.6) по начальным данным в норме J_3 . Отсюда стандартным образом вытекает и устойчивость по правой части ($f_h \neq 0$) и как следствие теорема сходимости.

Любая аппроксимация опорного оператора R в силу (1.1) связана с аппроксимацией оператора ∇_α ковариантного дифференцирования. Здесь за основу примем определения (2.17, ч. I), (2.18, часть I). Пусть $w_h \in H_h^*(w_h)$ и $T_{\pm i} w = w(y_i \pm h_i)$. Сеточную ковариантную производную «назад» ∇_i^- ковариантной компоненты w_j вектора w_h зададим следующим образом:

$$\nabla_i^- w_j \equiv (w_{y_i}^-, e_j)_{H_h} = (w_j)_{y_i}^- + (T_{-i} w_m)(e_{y_i}^m, e_j)_{H_h}. \quad (1.8)$$

Первая часть формулы (1.8) связана (ср. с (2.17, ч. I)) с определением ∇_i^- , а вторая даёт способ фактического вычисления. Векторы e_j, e^m в (1.8) и далее определяют согласованный с ∇_i^- сеточный базис и кобазис. Теперь в соответствии с (1.8) будем иметь

$$\begin{aligned} R_h &= \begin{pmatrix} \nabla_1^- & 0 & 0 & \nabla_2^- & \nabla_3^- & 0 \\ 0 & \nabla_2^- & 0 & \nabla_1^- & 0 & \nabla_3^- \\ 0 & 0 & \nabla_3^- & 0 & \nabla_1^- & \nabla_2^- \end{pmatrix}^T; \\ R_h^* &= - \begin{pmatrix} \nabla_1^+ & 0 & 0 & \nabla_2^+ & \nabla_3^+ & 0 \\ 0 & \nabla_2^+ & 0 & \nabla_1^+ & 0 & \nabla_3^+ \\ 0 & 0 & \nabla_3^+ & 0 & \nabla_1^+ & \nabla_2^+ \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где ковариантная производная «вперёд» ∇_i^+ от контравариантной компоненты σ_h^{mj} определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla_i^+ \sigma^{mj} \equiv (\Sigma_h)_{y_i} \cdot (e^m \otimes e^j) = (\sigma^{mj})_{y_i} + (T_{+i} \sigma^{mj})((e_\alpha)_{y_i}, e^m) + \\ + (T_{+i} \sigma^{m\beta})(T_{+i} e^m, e^m)((e_\beta)_{y_i}, e^j). \end{aligned} \quad (1.10)$$

При ковариантном дифференцировании векторы локального базиса (кобазиса), а также компоненты метрического тензора G следует рассматривать как постоянные. Сеточные аппроксимации (1.8), (1.10) оператора ∇_i эти свойства сохраняют [10]. И, наконец, отметим, что в соответствии с выбранным способом аппроксимации опорного оператора R сеточными аналогами скалярного произведения $(\cdot)_D$ в H_h и H_h^* являются $(\cdot)_{D_h}$ и $(\cdot)_{D_h}$, где, как обычно,

$$(\cdot)_{D_h} = h_1 h_2 h_3 \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \sum_{i_3=1}^{N_3} (\cdot)_{i_1, i_2, i_3}; \quad (\cdot)_{D_h} = h_1 h_2 h_3 \sum_{i_1=0}^{N_1-1} \sum_{i_2=0}^{N_2-1} \sum_{i_3=0}^{N_3-1} (\cdot)_{i_1, i_2, i_3}.$$

Основные проблемы при численной реализации полностью консервативной разностной схемы (1.6) связаны с обращением многомерных операторов. Для задачи (2.26, ч. I) построим полностью консервативную разностную схему с законом сохранения (1.7), в которой обращению подлежат лишь одномерные операторы. Эта схема основана на методе расщепления в одной из его первоначальных редакций [11–14].

$$\begin{aligned} R_h = \begin{pmatrix} \nabla_1^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_1^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_1^- & 0 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \nabla_2^- & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_2^- & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_2^- \end{pmatrix}^T + \\ + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_3^- & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_3^- \\ 0 & 0 & \nabla_3^- & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = R_{1h} + R_{2h} + R_{3h}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

которое порождает аддитивное разложение для сопряжённого сеточного оператора R_h^* :

$$\begin{aligned} R_h^* = - \begin{pmatrix} \nabla_1^+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_1^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_1^+ & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \nabla_2^+ & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_2^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_2^+ \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_3^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla_3^+ & 0 & 0 & \nabla_3^+ \end{pmatrix} = R_{1h}^* + R_{2h}^* + R_{3h}^*. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Следуя [11–14], переход $v^n, \sigma^n \rightarrow v^{n+1}, \sigma^{n+1}$ ($n \rightarrow n+1$) будем осуществлять с помощью последовательных переходов $n \rightarrow n + \frac{1}{3} \rightarrow n + \frac{2}{3} \rightarrow n+1$. Каждому такому переходу поставим в соответствие одномерную сеточную динамическую задачу «в скоростях-напряжениях», порождаемую аддитивным разложением (1.11), (1.12).

Итак, при заданных v^n, ε^n переход $n \rightarrow n + \frac{1}{3}$ будем осуществлять с помощью одномерной разностной схемы

$$\begin{aligned} v_i^{n+1/3} + \frac{1}{3} R_{1h_1}^* (\sigma^n + \sigma^{n+1/3}) = 0, \tau(\cdot)_i^{n+1/3} = (\cdot)^{n+1/3} - (\cdot)^n; \\ \varepsilon_i^{n+1/3} + \frac{1}{3} R_{1h_1} (v^n + v^{n+1/3}) = 0, \sigma^{n+1/3} = K_h \varepsilon^{n+1/3}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Далее при заданных $v^{n+1/3}, \varepsilon^{n+1/3}$ опять-таки с помощью одномерной разностной схемы

$$\begin{aligned} v_i^{n+2/3} + \frac{1}{3} R_{2h_2}^* (\sigma^{n+1/3} + \sigma^{n+2/3}) = 0, \tau(\cdot)_i^{n+2/3} = (\cdot)^{n+2/3} - (\cdot)^{n+1/3}; \\ \varepsilon_i^{n+2/3} + \frac{1}{3} R_{2h_2} (v^{n+1/3} + v^{n+2/3}) = 0, \sigma^{n+2/3} = K_h \varepsilon^{n+2/3}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

осуществляется переход $n + \frac{1}{3} \rightarrow n + \frac{2}{3}$.

И, наконец, при заданных $v^{n+2/3}, \varepsilon^{n+2/3}$ с помощью одномерной разностной схемы

$$\begin{aligned} v_i^{n+1} + \frac{1}{3} R_{3h}^* (\sigma^{n+2/3} + \sigma^{n+1}) &= 0, \tau(\cdot)_i^{n+1} = (\cdot)^{n+1} - (\cdot)^{n+2/3}; \\ \varepsilon_i^{n+1} + \frac{1}{3} R_{3h} (v^{n+2/3} + v^{n+1}) &= 0, \sigma^{n+1} = K_h \varepsilon^{n+1}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

осуществляется переход $n + \frac{2}{3} \rightarrow n + 1$.

Наиболее простые реализации сеточных задач (1.13), (1.14) и (1.15) связаны, как и в задачах газовой динамики [14], с методами бегущего счёта. Возможен также предварительный переход к сеточным инвариантам Римана. И, наконец, для (1.13), (1.14) возможно применение метода «распада разрыва» С.К.Годунова. Все эти методы достаточно детально описаны в [12], поэтому справедливо утверждение: для (1.13), (1.14) и (1.15) существуют экономичные реализации.

Практически очевидной, но, тем не менее, принципиальной является

Теорема 1.2. Аддитивная разностная схема (1.13), (1.14) и (1.15) обладает сеточным законом сохранения (1.7).

Очевидность этой теоремы связана с тем, что на каждом из переходов $n \rightarrow n + \frac{1}{3}, n + \frac{1}{3} \rightarrow n + \frac{2}{3}, n + \frac{2}{3} \rightarrow n + 1$ удалось сохранить структуру исходной дифференциальной задачи (2.26, ч. I). Поэтому, как и при доказательстве теоремы 1.1, для (1.13) будем иметь

$$\|v_h^{n+1/3}\|_{H_h^*}^2 + [\sigma_h^{n+1/3}, \varepsilon_h^{n+1/3}]_{H_h} = \|v_h^n\|_{H_h^*}^2 + [\sigma_h^n, \varepsilon_h^n]_{H_h}; \quad (1.16)$$

для (1.14) —

$$\|v_h^{n+2/3}\|_{H_h^*}^2 + [\sigma_h^{n+2/3}, \varepsilon_h^{n+2/3}]_{H_h} = \|v_h^{n+1/3}\|_{H_h^*}^2 + [\sigma_h^{n+1/3}, \varepsilon_h^{n+1/3}]_{H_h}; \quad (1.17)$$

а для (1.15) —

$$\|v_h^{n+1}\|_{H_h^*}^2 + [\sigma_h^{n+1}, \varepsilon_h^{n+1}]_{H_h} = \|v_h^{n+2/3}\|_{H_h^*}^2 + [\sigma_h^{n+2/3}, \varepsilon_h^{n+2/3}]_{H_h}. \quad (1.18)$$

Теперь из (1.16), (1.17) и (1.18) для аддитивной разностной схемы (1.13), (1.14), (1.15) вытекает справедливость сеточного закона сохранения (1.7)

$$J_3^{n+1} = J_3^n = \dots = J_3^0. \quad (1.19)$$

Остаётся заметить, что при дальнейших стандартных рассуждениях, приводящих от (1.19) к теореме сходимости, следует рассматривать аппроксимацию задачи (2.26, ч. I) разностной схемой (1.13), (1.14) и (1.15) как суммарную. Отметим также, что как для (1.6), так и для аддитивной разностной схемы (1.13), (1.14) и (1.15) справедлив «дополнительный» сеточный закон сохранения типа (2.28,

ч. I): $\left(\left\| (K_h^{1/2} \varepsilon_h^{n+1})_i \right\|_{H_h}^2 + \left\| R_h^* \sigma_h^{n+1} \right\|_{H_h^*}^2 \right)_i = 0$. Это позволяет получать теоремы сходимости в более сильных нормах, чем J_3 .

2. Метод прогонки. Используя метод прогонки, решим задачу, где $\tau = 0,5/k$; k — время распространения волны в горном массиве. Затем найдём α_{i+1} и β_{i+1} .

$$U = \cos \pi x_1 \cos \pi x_2 \cos \pi x_3 \sin \pi t \quad \text{— тестовое решение и } \nabla_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \text{ найдём } \nabla_1, \nabla_2 \text{ и } \nabla_3:$$

$$\nabla_1 = -\pi \sin \pi x_1 \cos \pi x_2 \cos \pi x_3 \sin \pi t;$$

$$\nabla_2 = -\pi \cos \pi x_1 \sin \pi x_2 \cos \pi x_3 \sin \pi t;$$

$$\nabla_3 = -\pi \cos \pi x_1 \cos \pi x_2 \sin \pi x_3 \sin \pi t,$$

где $0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 1$. Далее найдём v и σ_i :

$$v = \frac{\partial U}{\partial t} = -\pi \cos \pi x_1 \cos \pi x_2 \cos \pi x_3 \cos \pi t.$$

Так как $\sigma = K\varepsilon$ и $\varepsilon = Ru$, то

$$\sigma_1 = \nabla_1 u_1 (\lambda + 2\mu_1) + \lambda (\nabla_2 u_2 + \nabla_3 u_3);$$

$$\sigma_2 = \nabla_2 u_2 (\lambda + 2\mu_1) + \lambda (\nabla_1 u_1 + \nabla_3 u_3);$$

$$\sigma_3 = \nabla_3 u_3 (\lambda + 2\mu_1) + \lambda (\nabla_1 u_1 + \nabla_2 u_2);$$

$$\sigma_4 = 2\mu_1 (\nabla_1 u_2 + \nabla_2 u_1);$$

$$\sigma_5 = 2\mu_1 (\nabla_1 u_3 + \nabla_3 u_1);$$

$$\sigma_6 = 2\mu_1 (\nabla_2 u_3 + \nabla_3 u_2).$$

Данный алгоритм реализован на языке программирования Delphi 7.0, на рисунке 1 а, б выведен график функций при шаге $h = 0,1$ по трём переменным x_1, x_2, x_3 , построенный по тестовому и по приближенному решениям.

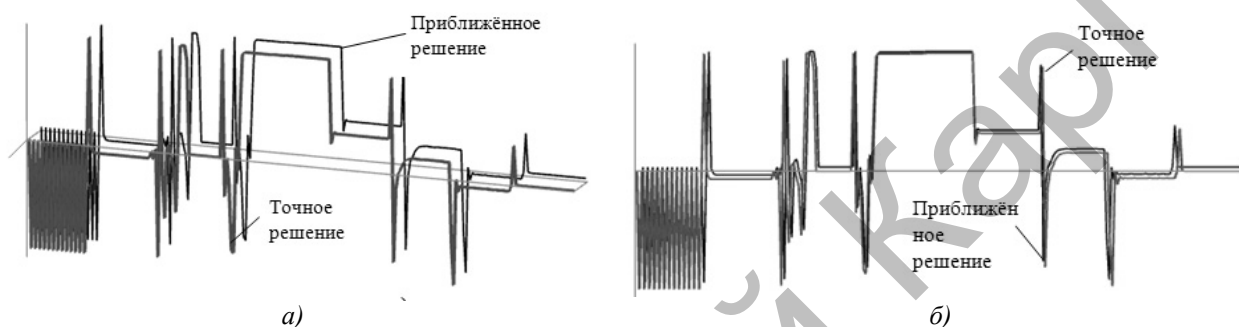


Рисунок 1. График функций при шаге $h = 0,1$

При шаге $h = 0,01$ по трём переменным x_1, x_2, x_3 (рисунок 2 а, б):

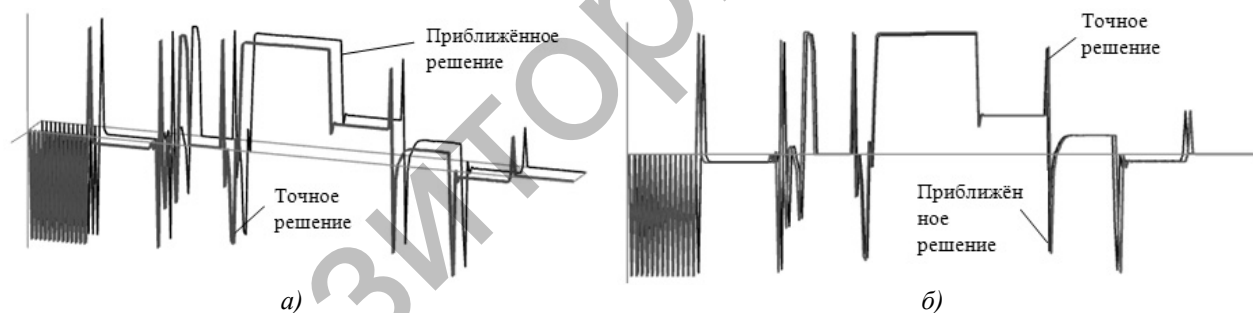


Рисунок 2. График функций при шаге $h = 0,01$

При шаге $h = 0,001$ по трём переменным x_1, x_2, x_3 (рисунок 3 а, б):

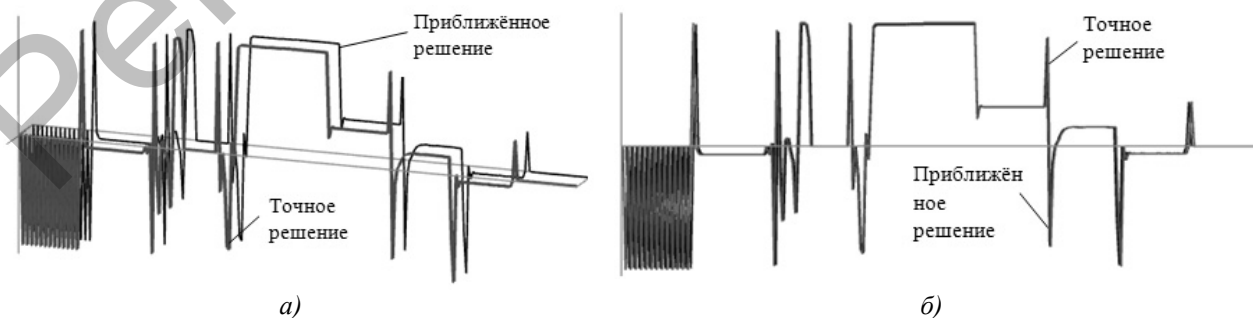


Рисунок 3. График функций при шаге $h = 0,001$

Сравнение тестового и приближённого решений показало удовлетворительное совпадение в пределах заданной точности и аппроксимации.

Список литературы

- 1 Коновалов А.Н., Сорокин С.Б. Структура уравнений теории упругости. Статика: Учеб. пособие / Новосибирск: Изд. НГУ, 1986. — 26 с.
- 2 Цуриков Н.В. Численное решение задач теории упругости в произвольной криволинейной системе координат: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Новосибирск: Изд. НГУ, 1992. — 362 с.
- 3 Букенов М.М. Малые параметры в алгоритмах задач теории упругости: Дис. ... канд. физ.-мат. наук / Новосибирск: Изд. НГУ, 1986. — 360 с.
- 4 Коновалов А.Н. Сопряженно-согласованные аппроксимации и экономичные дискретные реализации для динамической задачи линейной теории упругости // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46. — № 7. — С. 1004–1010.
- 5 Коновалов А.Н. Задачи теории упругости в напряжениях: Вычислит. методы в мат. физике, геофизике и оптимальном управлении. — Новосибирск: Наука, 1978. — С. 130–133.
- 6 Коновалов А.Н. Решение задач теории упругости в напряжениях: Учеб. пособие. — Новосибирск: Наука, 1979. — 345 с.
- 7 Попов Ю.П., Самарский А.А. Полностью консервативные разностные схемы // Вычислит. методы в математике и мат. физике. — 1969. — Т. 9. — № 4. — С. 953–958.
- 8 Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики: Учеб. пособие. — М.: Наука, 1975. — 351 с.
- 9 Коновалов А.Н. Численные методы в динамических задачах теории упругости // Сиб. мат. журн. — 1997. — Т. 38. — № 3. — С. 551–569.
- 10 Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Использование метода опорных операторов для построения разностных аналогов операций тензорного анализа // Дифференциальные уравнения. — 1982. — Т. 18. — № 7. — С. 1251–1256.
- 11 Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. и др. Разностные схемы на нерегулярных схемах: Учеб. пособие. — Минск: Критерий, 1996. — 353 с.
- 12 Букенов М.М. Метод фиктивных областей для среды Максвелла: Численные методы и пакеты программ для решения уравнений математической физики. — Новосибирск: Изд. НГУ, 1985. — С. 117–125.
- 13 Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости: Учеб. пособие. — М.: Мир, 1974. — 160 с.
- 14 Филлин А.П. Прикладная механика твёрдого деформируемого тела: Учебник. — Т. III. — М.: Наука, 1978. — 832 с.

М.М.Букенов, А.Н.Москаленко

Динамикалық серпімділік теориясының есебіне арналған алгоритмнің сандық жүзеге асуы

Авторлар Ламе операторын бөліктеуді қолданатын үш өлшемді динамикалық серпімділік теориясының «жылдамдық-кернеу» есебін шешудің алгоритмін жүзеге асырды. Үш өлшемді жағдайда «жылдамдық-кернеуіндегі» торлық есеп қарастырылды, онда сызбалардың аддитивтілік және консервативтілік теоремалары дәлелденді. Үш өлшемді динамикалық серпімділік теориясының «жылдамдық-кернеу» есебі қуалау әдісінің көмегімен шешілді, алгоритм Delphi 7.0 программалау тілінде жүзеге асырылды, әр түрлі дәлдіктегі торда тестік және жуық шешімдерінің функцияларының графиктері салынды. Мұндағы негізгі мақсат үш өлшемді динамикалық серпімділік теориясының «жылдамдық-кернеу» есебін шешу алгоритмін жүзеге асыру және әр түрлі дәрежедегі дәлдіктегі есептеулердің тестік және жуық шешімдерін салыстыру болды. Қойылған мақсат толығымен орындалды.

Numerical implementation of the algorithm for the dynamic problem of elasticity

Authors have implemented an algorithm of three-dimensional dynamic problem of elasticity «in the speeds-pressures» that uses an operator splitting Lamé. We consider the grid problem «in the speeds-pressures» within the three-dimensional case, where we prove a theorem and the theorem of additivity of conservative schemes. Three-dimensional dynamic problem of elasticity theory in «speeds-pressures» solved by the sweep method, the algorithm is implemented in the programming language Delphi 7.0 with the construction of graphs of functions test and approximate solutions on grids of different accuracy. The authors' objective was to implement the algorithm of three-dimensional dynamic problem of elasticity «in the speeds-pressures» and to compare test and approximate solutions in the calculations, with varying degrees of accuracy. The purpose been achieved entirely.

References

- 1 Konovalov A.N., Sorokin S.B. *Structure of the equations of the theory of elasticity. Statics*, Novosibirsk: Publ. NGU, 1986, p. 10–23.
- 2 Tsurikov N.V. *Numerical solution of elasticity in arbitrary curvilinear coordinates*, Novosibirsk: Nauka, 1992, p. 111–120.
- 3 Bukenov M.M. *Small parameters in the algorithms of elasticity*, Novosibirsk: Publ. NGU, 1986, p. 125–132.
- 4 Konovalov A.N. *Journal of Differential Equations*, 2010, 46 (7), p. 1004–1010.
- 5 Konovalov A.N. *Elasticity problem in pressures*, Novosibirsk: Publ. NGU, 1978, p. 130–133.
- 6 Konovalov A.N. *Solution of elasticity in pressures*, Novosibirsk: Nauka, 1979, p. 233–240.
- 7 Popov Yu.P., Samarskii A.A. *Journal of Numerical Mathematics and Mathematical Physics*, 1969, 9 (4), p. 953–958.
- 8 Samarskii A.A., Popov Yu.P. *Difference schemes of gas dynamics*, Moscow: Nauka, 1975, p. 242–256.
- 9 Konovalov A.N. *Numerical methods in dynamic problems of the theory of elasticity* // *Siberian Mathematical Journal*, 1997, 38 (3), p. 551–569.
- 10 Samarskii A.A., Tishkin V.F., Favorskii A.P., Shashkov M.Yu. *Journal of Differential Equations*, 1982, 18 (7), p. 1251–1256.
- 11 Samarskii A.A., Koldoba A.V., Poveshchenko Yu.A. et al. *Difference schemes for nonlinear schemes*, Minsk: Kriterii, 1996, p. 263–275.
- 12 Bukenov M.M. *Fictitious domain method for Maxwell medium*, Novosibirsk: Publ. NGU, 1985, p. 117–125.
- 13 Fichera G. *Existence theorems in the theory of elasticity*, Moscow: Mir, 1974, p. 110–112
- 14 Filin A.P. *Applied mechanics of solid deformable body: Textbook*, Moscow: Nauka, 1978, p. 458–519.

УДК 517.51

Е.Д.Нурсултанов¹, Д.К.Дарбаева²¹Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова (Казахстанский филиал);²Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана (E-mail: d.darbaeva@yandex.kz)

Об операторе свертки в пространствах типа Морри

В статье исследованы верхние оценки нормы оператора свертки в пространствах типа Морри. Введены пространства $M_{p,q}^\alpha$, которые охватывают классические пространства Морри, исследованы их свойства вложения, описаны интерполяционные свойства. Доказаны неравенства типа Юнга-О'Нейла в обобщенных пространствах типа Морри.

Ключевые слова: пространства Морри, оператор свертки, неравенство Юнга-О'Нейла, интерполяционные теоремы.

1. Введение. Пусть $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$ и $0 < p < \infty$. Множество всех измеримых по Лебегу функций

$f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ называется пространством Морри, если конечна следующая величина:

$$\|f\|_{M_p^\lambda} = \|f\|_{M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{r > 0} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(B_r(x))} < \infty.$$