УДК 510.67

Р.А.Попков

Новосибирский государственный технический университет, Россия (E-mail: r-popkov@yandex.ru)

Алгебры 1-типов теории группы целых чисел, индуцируемые групповой операцией

В статье изучены алгебры 1-типов, возникающие при исследовании распределений счётных моделей аддитивной теории группы целых чисел. Приведены некоторые свойства алгебры 1-типов. Множество 1-типа разбито на некоторые три класса и показано, какие из ограничений алгебры 1-типов на данные классы являются её подалгебрами, дан пример ограничения, не являющегося подалгеброй. Даны некоторые оценки для числа простых и предельных моделей аддитивной теории группы целых чисел.

Ключевые слова: теория с континуальным числом типов, счётная модель, аддитивная группа целых чисел, алгебра 1-типов, простая модель, предельная модель.

В монографии [1] были исследованы распределения счётных моделей малых теорий и поставлен вопрос об описании счётных моделей теории с континуальным числом типов. В дальнейшем в работе [2] были описаны распределения счётных моделей теорий одноместных предикатов, а в работе [3] исследованы распределения счётных моделей теорий с континуумом типов в общем случае. Естественно возникает вопрос о распределениях счётных моделей теорий различных классов алгебраических систем (групп, булевых алгебр и т.д.). Одним из естественных объектов для исследования является теория группы целых чисел со сложением в качестве групповой операции и *0* в качестве единицы группы.

Целью исследования является выяснение числа простых над конечными множествами, предельных и остальных моделей теории группы целых чисел. В процессе работы над этой задачей возникает ряд проблем, которым и посвящена настоящая статья.

Определение 1 [4]. Модель $\mathfrak{M}_0$ теории T называется *простой*, если для любой модели $\mathfrak{M}_1$ теории T существует элементарная подмодель $\mathfrak{M}_2 \preceq \mathfrak{M}_1$, изоморфная модели $\mathfrak{M}_0$.

Определение 2 [4]. Модель $\mathfrak{M}$ теории T называется *предельной,* если $\mathfrak{M}$ не является простой моделью ни над каким конечным множеством и является объединением элементарной цепи простых моделей над некоторыми конечными множествами.

Самой привычной моделью рассматриваемой теории является *стандартная* модель $\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$, теория которой $Th(\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle)$ и исследуется. Можно рассматривать модель $\mathfrak{A}_1 = \langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$ как некоторую магистраль из целых чисел. Обозначим через $\mathfrak{A}_n$ модель, состоящую из n независимых магистралей. Можно заметить, что все модели $\mathfrak{A}_n$ имеют одну и ту же теорию, однако модели $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{A}_k$ изоморфны только тогда, когда $n = k$. Если присвоить элементу *1* (который мы никак не можем выделить с помощью формул) модели некоторое имя a_1, то стандартная модель является простой над a_1, так как любое целое положительное число n можно описать в виде суммы *n*-ного числа a_1. Если теперь присвоить элементу *1* из каждой магистрали $\mathfrak{A}_n$ некоторое имя a_n, то каждая модель $\mathfrak{A}_n$ будет простой над конечным множеством $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Объединение $\bigcup_{n \in \omega} \mathfrak{A}_n$ цепи простых моделей не будет изоморфно никакой простой модели $\mathfrak{A}_n$, следовательно, является предельной моделью. Таким образом, справедливо следующее

Предложение 1. Теория $\mathrm{Th}(\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle)$ имеет как минимум ω простых над конечными множествами моделей и как минимум одну предельную модель.

Далее будем рассматривать модели, имеющие, помимо стандартных целых чисел, некоторые элементы, которые назовём *аномальными*. Будем описывать простые числа с помощью формул, говорящих о том, что это число не делится ни на какое другое число, кроме *1*.

Определение 3. Элементы стандартной модели теории целых чисел будем называть *нормальными*, или *стандартными*, числами.

Репозиторий КузГТУ

Определение 4. Числа, которые не делятся ни на какое простое число и не равны *1* или *–1*, будем называть *аномально малыми*.

Замечание 1. Все аномально малые числа однотипны.

Замечание 2. Сумма конечного числа аномально малых чисел является нормальным числом. Действительно, если число a не делилось ни на какое число, то число $\underbrace{a+\ldots+a}_{n \text{ раз}}$ делится на n.

Определение 5. Числа, которые делятся на какие-то простые числа бесконечное число раз и не равны *0*, будем называть *аномально большими*.

Замечание 2. Число типов аномально больших чисел континуально, так как имеется континуальное число различных бесконечных множеств простых чисел.

Как известно, любое натуральное число можно описать с помощью разложения его на простые множители. Для любого натурального есть противоположное ему целое число. Таким образом, целые числа являются реализациями 1-типов, описывающих делимость и неделимость на простые числа.

Пусть p и q — некоторые неглавные 1-типы, описывающие делимость и неделимость на простые числа. Введём операцию сложения двух типов $p+q=X_{p,q}$, соответствующую групповой операции, где $X_{p,q}$ — множество 1-типов, реализации которых представляются в виде сумм $a+b$ при $a \models p$ и $b \models q$. По определению операции сложения типов соответствует групповая операция +. Так как при сложении разных (стандартных, аномально больших и аномально малых) могут получиться разные результаты, то и результат операции над типами p и q не определён однозначно, т.е. множество $p+q \subseteq S^1(\varnothing)$ может иметь более одного элемента. Пусть $X, Y \subseteq S^1(\varnothing)$, тогда $X+Y=\bigcup\{p+q \mid p \in X, q \in Y\}$. Ниже на рисунке приведена диаграмма Хассе для множеств реализаций соответствующих типов (без учёта знака числа).

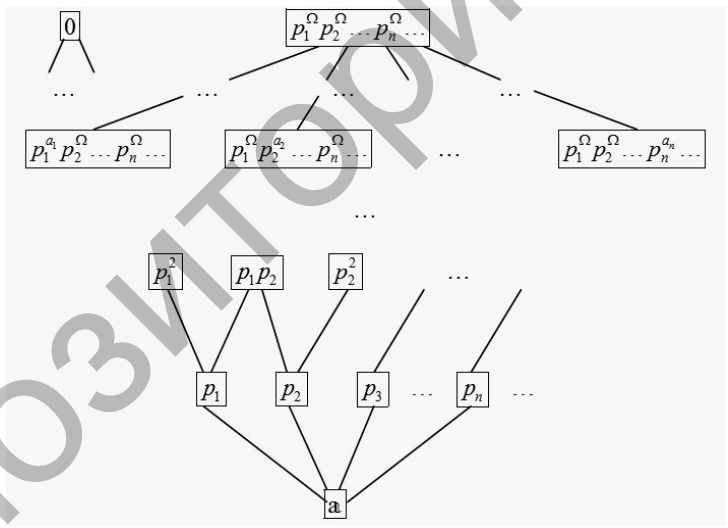

Рисунок. Диаграмма Хассе для множеств реализаций соответствующих типов (без учёта знака числа)

В нижней части диаграммы находятся 1-типы, описывающие делимость на конечное число простых чисел. В верхней части диаграммы находятся типы 1-типов, описывающие делимость на конечное число простых чисел. Оставшаяся часть — делимость на не конечное и не коконечное число простых чисел. Если рассмотреть типы, т.е. два максимальных элемента: тип p_0, описывающий *0* (который делится на всё), и тип, описывающий делимость на бесконечные степени бесконечного числа простых чисел. Минимальный элемент — тип, описывающий элементы, которые ни на что не делятся (т.е. элементы – 1, 1 и аномально малые числа).

Нетрудно заметить, что все типы можно разбить на 3 класса: типы, описывающие делимость на конечное число простых чисел и неделимость на бесконечное число простых чисел; типы, описывающие делимость на бесконечное число простых чисел и неделимость на конечное число простых

Репозиторий КарГУ

чисел; все остальные. Обозначим эти классы Fin, $Cofin$, $\neg(Fin \cup Cofin)$ соответственно. Очевидно, что $S^1(\varnothing) = Fin \cup Cofin \cup \neg(Fin \cup Cofin)$. Элементы, являющиеся реализациями типов из класса Fin, т.е. стандартные числа, будем записывать традиционным разложением $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$. Как следует из определения классов, мощность множества различных простых чисел, участвующих в разложении, является конечной, а мощность дополнения данного множества до множества всех простых чисел является бесконечной. Элементы, являющиеся реализациями типов из класса $Cofin$, будем записывать похожими разложениями:

$$p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n} \dots; \quad (1)$$

$$p_1^{a_1} p_2^{\Omega} \dots p_k^{a_k} p_n^{\Omega} \dots; \quad (2)$$

$$p_1^{\Omega} p_2^{\Omega} \dots p_n^{\Omega} \dots \quad (3)$$

Запись вида p^{Ω} означает делимость на простое число p бесконечное число раз. Разложениям вида (1) соответствуют делимости на конечные степени бесконечного числа разных простых чисел, (2) — делимости на конечные степени какого-то числа разных простых чисел и бесконечные степени каких-то простых чисел, (3) — делимости на бесконечные степени бесконечного числа простых чисел. Для всех реализаций типов из класса $Cofin$ мощность множества разных простых чисел, участвующих в разложении (в конечной или бесконечной) степени, бесконечна, а мощность дополнения данного множества до множества всех простых чисел конечна. Элементы, являющиеся реализациями типов из класса $\neg(Fin \cup Cofin)$, будем записывать аналогично реализациям типов класса $Cofin$, с тем только уточнением, что как мощность множества различных простых чисел, участвующих в разложении, так и мощность его дополнения до множества всех простых чисел являются бесконечными. Очевидно следующее

Замечание 3. Тип аномально малых чисел относится к классу Fin.

Таким образом, можно рассматривать алгебру $\mathfrak{P} = \langle \mathcal{P}(S^1(\varnothing)), + \rangle$ на подмножествах множества 1-типов с операцией, порождённой операцией сложения в группе целых чисел.

Если $a \vDash p$, то $-a \vDash p$, $p \in S^1(\varnothing)$, так как оба числа a и $-a$ имеют одно и то же разложение на простые множители. Следовательно, $p_0 \in p + p$, $p_0, p \in S^1(\varnothing)$ и p_0 — тип элемента 0. Кроме того, $p_0 + p = p + p_0 = p$. Таким образом, справедливо следующее

Предложение 2. Алгебра $\mathfrak{P} = \langle \mathcal{P}(S^1(\varnothing)), + \rangle$ является моноидом с типом p_0 элемента 0 в качестве единицы.

Из свойств операции сложения на целых числах естественно следуют свойства операции + в алгебре $\mathfrak{P}$. То есть справедливо

Предложение 3. Операция + алгебры $\mathfrak{P}$ ассоциативна и коммутативна.

Рассмотрим ограничения алгебры $\mathfrak{P} = \langle \mathcal{P}(S^1(\varnothing)), + \rangle$ на Fin и $Cofin$, т.е. $\mathfrak{P}_{Fin} = \langle \mathcal{P}(S^1(\varnothing)), + \rangle \restriction Fin$ и $\mathfrak{P}_{Cofin} = \langle \mathcal{P}(S^1(\varnothing)), + \rangle \restriction Cofin$ соответственно. Посмотрим, к чему приведёт выполнение операции сложения на данных множествах.

Пусть $A = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$, $B = q_1^{b_1} q_2^{b_2} \dots q_k^{b_k}$, тогда A и B являются реализациями некоторых типов из класса Fin. Рассмотрим их сумму $A + B$. Если $\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \cap \{q_1, q_2, \dots, q_n\} = \varnothing$, то число $A + B$ либо делится на какие-то простые из $\mathbb{P} \setminus (\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \cup \{q_1, q_2, \dots, q_n\})$, либо само является простым из этого множества. Это верно, так как рассматривается класс Fin, следовательно, все простые числа точно не исчерпаны. Если $\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \cap \{q_1, q_2, \dots, q_n\} = \{r_1, r_2, \dots, r_l\}$, то $A + B$ представимо в виде $r_1^{\min\{a_1, b_1\}} r_2^{\min\{a_2, b_2\}} \dots r_l^{\min\{a_l, b_l\}} \left(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n} + q_1^{b_1} q_2^{b_2} \dots q_k^{b_k} \right)$, где степени слагаемых в скобках естественным образом изменены после вынесения общего множителя за скобки. Таким образом, число $A + B$ представимо в виде произведения конечных степеней конечного числа простых чисел, т.е. операция над элементами класса Fin не выводит за пределы данного класса. Следовательно, справедливо следующее

Репозиторий КарГУ

Предложение 4. $\mathfrak{P}_{Fin} = \left\langle \mathcal{P}\left(S^1(\varnothing)\right), + \right\rangle \restriction Fin$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{P} = \left\langle \mathcal{P}\left(S^1(\varnothing)\right), + \right\rangle$.

Пусть теперь A и B являются реализациями некоторых типов из класса *Cofin*. Тогда A и B могут быть представлены одним из трёх разложений (см. выше). Пусть $A = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n} \dots$, $B = q_1^{b_1} q_2^{b_2} \dots q_k^{b_k} \dots$ Так как дополнение каждого из множеств простых чисел, участвующих в разложениях до множества всех простых чисел, конечно, можно утверждать, что $\{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\} \cap \{q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\} \neq \varnothing$ и мощность множества $\{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\} \cap \{q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$ бесконечны. Тогда $A + B$ представимо в виде $r_1^{\min\{a_1, b_1\}} r_2^{\min\{a_2, b_2\}} \dots r_l^{\min\{a_l, b_l\}} \dots \left(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n} + q_1^{b_1} q_2^{b_2} \dots q_k^{b_k} \right)$, где степени слагаемых в скобках естественным образом изменены после вынесения общего множителя за скобки, а сам этот общий множитель содержит бесконечное число сомножителей, дополнение которого конечно. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Разница возможна только в степенях разложения на простые общего множителя, которые могут оказаться равны Ω. Таким образом, справедливо следующее утверждение

Предложение 5. $\mathfrak{P}_{Cofin} = \left\langle \mathcal{P}\left(S^1(\varnothing)\right), + \right\rangle \restriction Cofin$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{P} = \left\langle \mathcal{P}\left(S^1(\varnothing)\right), + \right\rangle$.

Естественно возникает вопрос, является ли $\mathfrak{P}_{\neg(Fin \cup Cofin)} = \mathfrak{P} \setminus \left(\mathfrak{P}_{Fin} \cup \mathfrak{P}_{Cofin} \right)$ подалгеброй алгебры $\mathfrak{P}$. Рассмотрим следующий

Пример 1. Пусть $A = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot p_{2n+1} \cdot \ldots$, $B = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot p_{2n} \cdot \ldots$, т.е. в разложении числа A задействованы все простые числа с нечётными номерами, в разложении числа B — все простые числа с чётными номерами. Очевидно, A и B являются реализациями типов из класса $\neg(Fin \cup Cofin)$. Рассмотрим сумму $A + B$. Числа A и B не имеют общих множителей, поэтому число $A + B$ либо само является простым, либо делится на какие-то простые числа, не входящие в разложения A и B. Но все простые числа исчерпаны, следовательно, $A + B$ не делится ни на одно простое число. Так как $A + B \neq 1$ и $A + B \neq -1$, то $A + B$ является аномально малым, а значит, является реализацией типа из класса *Fin*.

Рассмотренный пример позволяет сформулировать следующее

Предложение 6. $\mathfrak{P}_{\neg(Fin \cup Cofin)} = \left\langle \mathcal{P}\left(S^1(\varnothing)\right), + \right\rangle \restriction \neg(Fin \cup Cofin)$ не является подалгеброй алгебры

$$\mathfrak{P} = \left\langle \mathcal{P}\left(S^1(\varnothing)\right), + \right\rangle.$$

На множестве $\mathcal{P}\left(S^1(\varnothing)\right)$ можно ввести точные верхние и нижние грани относительно теоретико-множественных объединений и пересечений, являющиеся обобщениями точных верхних и нижних граней для натуральных чисел (которые являются реализациями 1-типов). Отличие будет заключаться в том, что возможны бесконечные степени в разложении на простые числа. Тогда множество $\mathcal{P}\left(S^1(\varnothing)\right)$ с введёнными бинарными операциями является решёткой, а $\mathcal{P}\left(S^1(\varnothing)\right) \restriction Fin$ $\mathcal{P}\left(S^1(\varnothing)\right) \restriction Cofin$ с теми же операциями являются её подрешётками.

В модели $\mathfrak{A}_n$, состоящей из n магистралей целых чисел, можно выбрать некоторый базис, например, $a_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $a_2 = (0, 1, \dots, 0)$, …, $a_n = (0, 0, \dots, 1)$, где $|a_i| = n$ для всех i от *1* до n. Тогда множество всевозможных комбинаций $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$ также будет моделью $\mathfrak{B}$ теории $\mathrm{Th}\left(\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle\right)$, отличной от моделей $\mathfrak{A}_n$, $n \in \omega$, и являющейся простой над конечным множеством. Объединение $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{A}_n$ изоморфно $\mathfrak{A}_{n+1}$.

Рассмотрим, какое счётное множество 1-типов определяет модель изучаемой теории. Нетрудно заметить, что всякое множество натуральных чисел, наибольший общий делитель которых равен *1*, является системой образующих для группы целых чисел. Таким образом, 1-типы, описывающие делимость на первые степени всех простых чисел (наибольший общий делитель которых, очевидно, *1*), будут определять модели как со стандартными, так и с аномально большими числами.

Репозиторий КарГУ

Рассмотрим счётное множество одноместных предикатов $P_2, P_3, \ldots, P_n$, говорящих, что число x делится на $2, 3, \ldots, n$, $n \in \omega$, соответственно. Выполняется $P_a(x) \equiv P_b(x) \wedge P_c(x)$ тогда и только тогда, когда $a = bc$. Кроме того, $P_a(x)$ вытекает из $P_{2a}(x), P_{3a}(x), \ldots, P_{ka}(x)$, $k \in \omega \setminus \{0,1\}$. Таким образом, взаимосвязь данных предикатов можно проиллюстрировать с помощью диаграммы Хассе решётки целых чисел.

Рассмотрим ограничение $\mathrm{Th}(\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle) \ddot{E} P_n$. Одной из моделей $\mathfrak{A}$ данной теории будет магистраль целых чисел, делящихся на n $(\mathfrak{A} \vDash P_n(a))$, другой моделью $\mathfrak{B}$ — магистраль всех целых чисел, не делящихся на n $(\mathfrak{B} \vDash \neg P_n(a))$. Аналогично изначальной теории, моделями $\mathfrak{A}_k$ и $\mathfrak{B}_k$ также будут непересекающиеся k магистрали целых чисел, делящихся и не делящихся на n соответственно. Так как в ограничении теории нет операции $+$, невозможно составить линейные комбинации и невозможно при ограничении $+$ проинтерпретировать.

References

1 *Sudoplatov S.V.* The Lachlan problem. — Novosibirsk: Publ. NSTU, 2009. — P. 336.

2 *Popkov R.A.* Classification of countable models for complete theories of unary predicates with a substitution of a bounded // Algebra and Model Theory 8. — Collection of papers. — Novosibirsk: Publ. NSTU, 2011. — P. 73–82.

3 *Sudoplatov S.V., Popkov R.A.* Distributions of countable models of complete theories with continuum many types // http://arxiv.org/abs/1210.4043.

4 *Sudoplatov S.V., Ovchinnikova E.V.* Mathematical Logic and Theory of Algorithms. — Novosibirsk: Publ. NSTU, 2012.

Р.А.Попков

Группалық амалдармен индукцияланатын бүтін сандар группалары теорияларының 1-типті алгебралары

Мақалада бүтін сандар группалары аддитивті теориясының саналымды модельдерін үлестіруді зерттеу кезінде пайда болатын 1-типті алгебра қарастырылған. 1-типті алгебраның кейбір қасиеттері келтірілген. 1-типті жиын үш класқа бөлініп, 1-типті алгебраның берілген класқа қойылған қандай шектеулері оның ішкі алгебрасы болатыны зерттеліп, ішкі алгебрасы болмайтын шектеу мысалы берілген. Бүтін сандар группалары аддитивті теориясының қарапайым және шектік модельдері сандары үшін кейбір бағалар анықталған.

R.A.Popkov

Algebras of 1-types of theory of group of integers, induced by group operation

We study algebras of 1-types arising in investigations of distributions for countable models of theory of additive group of integers. Some properties of the 1-types algebra are presented. The 1-type set is divided into three classes, showing which of 1-types algebra's restrictions in these classes are its subalgebras and an example of the restriction is given that are not a subalgebra. Some estimates for a number of prime and limit models of additive group of integers theory are established.

Репозиторий КарГУ