УДК 51.531.72

К.А.Турсунов, А.Н.Мергенбекова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: asel_45520@mail.ru)

Расчет защемленной балки на действие произвольной нагрузки

В работе приведены линии влияния внутренних усилий и перемещений защемленной балки. Получены результаты при действии трех видов нагрузок. Решена задача изгиба балки, загруженной линейной нагрузкой на части пролета. Функции, описывающие законы изменения факторов в зависимости от положения единичной подвижной силы, имеют универсальный характер. Использование их для расчета балок позволяет легко учесть влияние разнообразных нагрузок при определении напряженно-деформированного состояния балочных конструкций.

Ключевые слова: защемленная балка, нагрузка, сечение, сосредоточенные силы, изгибающий момент, напряженно-деформированное состояние.

Для расчета защемленной балки используем результаты, приведенные в [1]. Факторы, возникающие в фиксированном сечении $x = \alpha$ (рис. 1),

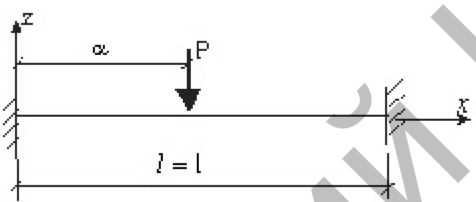

Рисунок 1. Защемленная балка

будем определять формулами при $\tilde{\delta} \le \alpha$ (левая ветвь):

$$\begin{cases} W_1(x,\alpha) = \dfrac{W_0}{6}\beta^2\tilde{\delta}^2\left[3\alpha-(1+2\alpha)\,x\right]; \; W_0 = \dfrac{l^3}{EJ}; \\ \theta_1(x,\alpha) = \dfrac{\theta_0}{2}\beta\;\tilde{\delta}^2\left[1-3\alpha+2\alpha\cdot x\right]; \quad \theta_0 = \dfrac{l^2}{EJ}; \\ M_1(x,\alpha) = M_0[(2-3\alpha)x^2-(1-2\alpha)x^3], \; M_0 = l; \\ Q_1(x,\alpha) = -Q_0(3x^2-2x^3), \quad Q_0 = 1; \end{cases} \tag{1}$$

при $\tilde{\delta} \ge \alpha$ (правая ветвь):

$$\begin{cases} W_2(x,\alpha) = \dfrac{W_0}{6}\alpha^2(1-x)^2\left[-\alpha+(3-2\alpha)x\right]; \\ \theta_2(x,\alpha) = \dfrac{\theta_0}{2}(1-x)^2\,\alpha\left[-\alpha+2\beta x\right]; \; \beta = 1-\alpha; \\ M_2(x,\alpha) = M_0(1-x)^2[\alpha-(1-2\alpha)x]; \\ Q_2(x,\alpha) = Q_0(1-3x^2+2x^3), \end{cases}$$

где x — координата подвижной силы $P=1$; α — параметр, определяющий положение фиксированного сечения балки; l — длина защемленной балки; W_1 — прогиб балки при $\tilde{\delta} \le \alpha$; θ_1 — угол поворота при $\tilde{\delta} \le \alpha$; M_2 — изгибающий момент при $\tilde{\delta} \ge \alpha$; Q_2 — поперечная сила при $\tilde{\delta} \ge \alpha$.

На основании линий влияния факторов защемленной балки можно ее рассчитывать на действие любой нагрузки. Пусть на данную балку действуют: а) слева от сечения (участок $\tilde{\delta} \le \alpha$) — распределенные нагрузки; [$q_i(x)$ — интенсивность; a_i, b_i — координаты начальной и конечной точек участка, где приложена нагрузка; $i = 1,...,k_1$, k_1 — количество нагрузок]; сосредоточенные силы [P_i — значения сил; x_i^1 — координаты точек, где приложены сосредоточенные силы; $i = 1,...,\ell_1$, ℓ_1 — количество сосредоточенных сил]; сосредоточенные моменты [m_i — значения моментов; x_i^2 — координаты точек, где приложены сосредоточенные моменты; $i = 1,...,m_1$, m_1 — количество сосредоточенных моментов]; б) справа от сечения (участок $\tilde{o} \geq \alpha$) — распределенные нагрузки [$q_j(x), a_j, b_j; j = 1,...,k_2$]; сосредоточенные силы [$P_j, x_j^1, j = 1,...,\ell_2$]; сосредоточенные моменты [$m_j, x_j^2, j = 1,...,m_2$]. Левая $S_1(x)$ и правая $S_2(x)$ ветви исследуемого фактора в заданном сечении $x = \alpha$ считаются известными. Величина данного фактора, обусловленная системой указанных нагрузок, определяется общей формулой

$$S(\alpha) = \sum_{i=1}^{k_1} \int_{a_i}^{b_i} q_i(x) \cdot S_1(x) dx + \sum_{i=1}^{\ell_1} P_i \cdot S_1(x_i^1) + \sum_{i=1}^{m_1} m_i \cdot S_1'(x_i^2) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k_2} \int_{a_i}^{b_i} q_i(x) \cdot S_2(x) dx + \sum_{i=1}^{\ell_2} P_i \cdot S_2(x_i^1) + \sum_{i=1}^{m_1} m_i \cdot S_2'(x_i^2), \qquad (2)$$

где $S_1'(x), S_2'(x)$ — первые производные левой и правой ветвей фактора S; $S = W, \theta, M, Q$ — составляющие моменты и силы, направленные по часовой стрелке и сверху вниз, считаются положительными; отсчет координат ведется от левого конца.

Применение (2) к расчету защемленной балки рассмотрим на следующих примерах.

Пример 1. Определить угол поворота в заданном сечении $x = \alpha$ балки от указанных нагрузок с использованием линии влияния этого фактора (рис. 2).

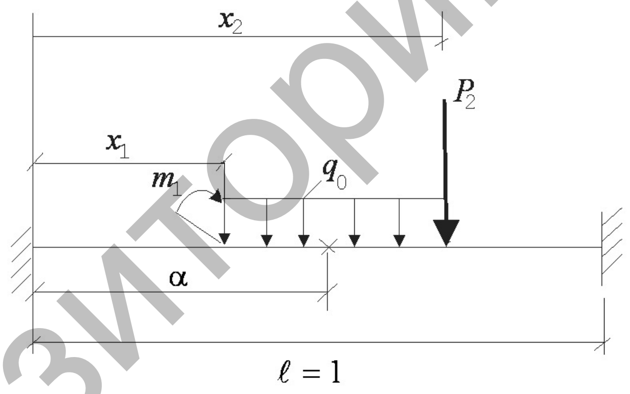

Рисунок 2. Защемленная балка с тремя видами нагрузки

На основании общей формулы (2) определяем угол поворота балки в заданном сечении

$$\theta(\alpha) = m_1 \cdot \theta_1'(x_1, \alpha) + q_0 \cdot l \cdot J_\theta + P_2 \cdot \theta_2(x_2, \alpha);$$

$$J_\theta = \int_{x_1}^{\alpha} \theta_1(x, \alpha) dx + \int_{\alpha}^{x_2} \theta_2(x, \alpha) dx, \qquad (3)$$

где m_1, q_0, P_2 — значения силовых факторов; ℓ — длина защемленной балки; x_1, x_2 — координаты начальной и конечной точек участка с распределенной нагрузкой.

Учитывая выражения функций (2), определяем составляющие (3)

$$J_\theta = \frac{\theta_0}{2} \left\{ \beta \left[\left(\frac{1}{3}\alpha^3 - \alpha^4 + \frac{\alpha^5}{2} \right) - \frac{1}{3}(1 - 3\alpha)x_1^3 - \frac{\alpha}{2} x_1^4 \right] + \alpha \left[-\alpha \left(-\alpha + \alpha^2 - \frac{\alpha^3}{3} \right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \beta \left(-\alpha^2 + \frac{4}{3}\alpha^3 - \frac{\alpha^4}{2} \right) - \alpha \left(x_2 - x_2^3 + \frac{x_2^3}{3} \right) + \beta \left(x_2{}^2 - \frac{4}{3} x_2{}^3 + \frac{x_2{}^4}{2} \right) \right] \right\};$$

$$\theta_2(x_2,\alpha)=\frac{\theta_0}{2}(1-x_2)^2\alpha(-\alpha+2\beta x_2);\quad \theta_1^{/}(x_1,\alpha)=\frac{\theta_0}{2}\beta\left[(1-3\alpha)x_1+3\alpha x_1^2\right].$$

Как частные случаи из (3) следуют решения следующих задач изгиба защемленной балки:

1) при действии равномерно распределенной нагрузки по всей длине балки

$$(x_1=p_2=m_1=0,\ x_2=1);$$

$$\theta(\alpha)=\frac{q_0 l^3}{12EJ}(\alpha-3\alpha^2+2\alpha^3);\quad 0\le\alpha\le 1;$$

2) при действии сосредоточенной силы

$$(p_2=p,\quad m_1=q_0=0,\ \ x_2=\frac{2}{3});$$

$$\theta(x,\alpha)=\frac{Pl}{9EJ}(-\alpha^2+\frac{4}{3}\alpha\beta);\quad 0\le\alpha\le\frac{2}{3};$$

3) при действии сосредоточенного момента

$$(p_1=0,\ m_1=m,\ q_0=0,\ x_1=\frac{1}{3});$$

$$\theta(\alpha)=\frac{ml}{3EJ}\beta(1-2\alpha);\quad \frac{1}{3}\le\alpha\le\frac{2}{3}.$$

Задавая значения параметру α, можно построить эпюру углов поворотов на участках для вышеприведенных трех случаев. Рассмотренный пример наглядно демонстрирует преимущество линии влияния перед другими методами решения задачи изгиба балок.

Пример 2. Определить изгибающий момент в заданном сечении $x=\alpha$ балки при действии распределенной нагрузки (рис. 3).

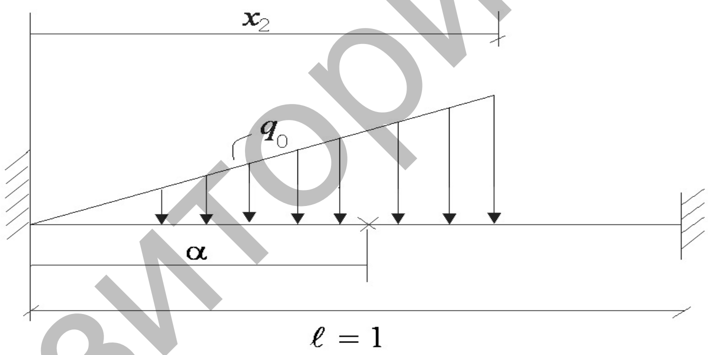

Рисунок 3. Действие линейной нагрузки

На основании (2) и учитывая (1), находим следующие интегралы:

$$J_W^1=\int_0^\alpha q_1(x)W_1(x,\alpha)dx=\int_0^\alpha\frac{x}{x_2}\frac{W_0}{6}\beta^2x^2\left[3\alpha-(1+2\alpha)x\right]dx=-\frac{W_0\beta^2\alpha^5(11-8\alpha)}{120x_2};$$

$$J_W^2=\int_0^{x_2}q_2(x)W_2(x,\alpha)dx=\int_0^{x_2}\frac{x}{x_2}\frac{W_0}{6}\alpha^2(1-x)^2(-\alpha+(3-2\alpha)x)dx=$$

$$=\frac{W_0\alpha^2}{6x_2}\frac{-10\alpha^3-30\alpha^4+27\alpha^5-8\alpha^6+10\alpha x_2^2-20x_2^3+30x_2^4-15\alpha x_2^4-12x_2^5+8\alpha x_2^5}{20},$$

где α — координата сечения балки; $W_1(x),W_2(x)$ — левая и правая ветви линии влияния прогибов; W_0 — множитель линии влияния прогибов. Суммируя эти интегралы, получим

$$J_W=J_W^1+J_W^2=\frac{W_0\alpha^2}{120x_2}\cdot\left\{\left(-10\alpha x_2^2+20x_2^3+15x_2^4(-2+\alpha)+4x_2^5(3-2\alpha)-(10\alpha^3-30\alpha^4+27\alpha^5-8\alpha^6)\right)\right\}.$$

Таким образом, функции, описывающие законы изменения факторов, в зависимости от положения единичной подвижной силы, имеют универсальный характер. Использование их к расчету балок позволяет легко учесть влияние разнообразных нагрузок при определения напряженно-деформированного состояния балочных конструкций.

References

1 *Tursunov K.A.* Mechanics of beam structures: Monograph. — Karaganda: KarSU, 2009. — 144 p.
2 *Tursunov K.A.* Mechanics of the theory of beams: teaching aid. — Karaganda: KarSU, 2007. — 115 p.
3 *Darkov A.V.* Structural Mechanics. — M.: High School, 1976. — 346 p.

К.А.Тұрсынов, А.Н.Мергенбекова

Қатаң бекітілген арқалықтың шоғырланған күш әсерін есептеу

Мақалада қатты бекітілген арқалықтың әсер сызықтары келтірілген. Үш түрлі жүктеме әсерінен пайда болған нәтижелер алынған арқалықтың бөлігіне түскен сызықтық жүктememен жүктелген арқалықтың иілу есебі шығарылған. Бірлік күшінің орнына тәуелді факторлардың өзгеру заңын сипаттайтын функциялар әмбебап сипатқа ие. Оларды арқалықты есептеуіне қолдану арқалық констукцияларының кернеулік-деформациялық күйін анықтау кезінде әр түрлі жүктемелердің әсерін оңай ескеруге мүмкіндік береді.

K.A.Tursynov, A.N.Mergenbekova

Calculation of clamped beam by action of an arbitrary load

The work presents the influence lines of internal forces and displacements of a clamped beam. Results are obtained under the action of three kinds of loads. The problem of beam bending which loaded linear load on the parts of the span is solved. Functions, having described the laws of variation of factors in depending on positions of single rolling power, have a universal character. Using them to calculate the beam makes it easy to take into account the influence of various loads in determining the stress-strain state of beam structures.