

- [11] Ешкеев А.Р., Мейрембаева Н.К. Свойства $(\Sigma_{n+1}^+, \Sigma_{n+1}^+)$ -атомных моделей $T - \Delta - PM$ -теории. Вестник КазНУ. - Серия математика, механика, информатика, № 3, Специальный выпуск. – 2008.- С. 74-77.
- [12] А.Р.Ешкеев Категоричные позитивные теории, Синтаксис и семантика логических систем // Материалы российской школы-семинара, посвященной 100 летию – со дня рождения Курта Геделя, 23-27 август 2006 г., Иркутск, Институт математики СО РАН, Изд-во гос. Пед. Ун-т, 2006, 124 с., - С. 28-32
- [13] Itay Ben-Yaacov. Positive model theory and compact abstract theories.- Journal of Mathematical Logic 3 (2003), no. 1, 85-118.
- [14] Itay Ben-Yaacov. Compactness and independence in non first order frameworks. - Bulletin of Symbolic logic, volume 11 (2005), no. 1, 28-50.

О КОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Жамалова Ж.Т., магистрант; Мергембаева А.Ж., магистрант;
Хайркулова А.А., студент
Карагандинский государственный университет им. академика Е.А.Букетова
г. Караганда, Республика Казахстан

В работе рассматривается первая краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности, в четверти плоскости. Нагруженное слагаемое является дробной производной порядка ν , $0 < \nu < 1$, на многообразии $x = t$.

Показано, что эта краевая задача имеет единственное решение при $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, являющегося коэффициентом при нагруженном слагаемом.

Ключевые слова: нагруженное уравнение теплопроводности, краевая задача, интегральное уравнения Вольтерра.

В работе рассматривается краевая задача для одномерного по пространственной переменной нагруженного уравнения теплопроводности в четверти плоскости. Общее определение нагруженных дифференциальных операторов (уравнений) было в работах А.М.Нахушева [1] - [3].

Заданное в n -мерной области Ω евклидова пространства R^n точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (матричное или скалярное) уравнение

$$Au(x) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (1)$$

называется нагруженным, если оно содержит след некоторых операций от искомого решения $u(x)$ на принадлежащих замыканию $\bar{\Omega}$ области Ω многообразиях, размерность которых строго меньше n .

Нагруженное уравнение (1) называется нагруженным дифференциальным уравнением в области $\Omega \subset R^n$, если оно содержит, хотя бы одну производную от искомого решения $u(x)$ на принадлежащих многообразиях ненулевой меры.

В работах [4] - [8] содержатся различные применения нагруженных уравнений как метода исследования задач математической физики, математического моделирования, физики фракталов, теории упругих оболочек, математической биологии и др.

В работе [3] отмечено, что в основе математических моделей нелокальных физико-биологических процессов фрактальной организации, как правило, лежат нагруженные дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка [6], [7].

Пусть $R_+ = (0, \infty)$. Рассмотрим в области $Q = \{(x, t), x \in R_+, t \in R_+\}$ следующую краевую задачу:

$$L_\lambda u = f \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda [D_x^\nu u(x, t)]|_{x=t} = f(x, t) \\ u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $D_x^\nu u$ - нагруженное слагаемое - дробная производная Римана-Лиувилля функции $u(x, t)$ по переменной x порядка ν , которая определяется равенством

$$D_x^\nu u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\{\nu\})} D_x^{[\nu]+1} \int_0^x \frac{u(\xi, t) d\xi}{(x-\xi)^{\{\nu\}}}$$

где $[\nu], \{\nu\}$ – соответственно целая и дробная части числа ν , $0 \leq \{\nu\} < 1$, так что $\nu = [\nu] + \{\nu\}$.

В данной работе рассматривается случай $0 < \nu < 1$, т.е. $[\nu] = 0$, $\{\nu\} = \nu$. Также предполагаем, что $\lambda \in \mathbb{C}$ – комплексный спектральный параметр,

$$f \in M(Q), \left(D_x \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \right) |_{x=t} \in M(R_+) \quad (3)$$

заданные функции,

$$M(Q) = L_\infty(Q) \cap C(Q), \quad M(R_+) = L_\infty(R_+) \cap C(R_+).$$

Функция $G(x, \xi, t - \tau)$ – функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности определяется соотношением:

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4(t - \tau)}\right) - \exp\left(-\frac{(x + \xi)^2}{4(t - \tau)}\right) \right\}$$

Определим функциональный класс \mathcal{U} для решения краевой задачи (2), а также область определения оператора $L - D(L)$ следующим образом:

$$\mathcal{U} = \left\{ u \mid (x + \sqrt{t})^{-1} \cdot u, (u_t - u_{xx}) \in M(Q), (D_x^\nu u)|_{x=t} \in M(R_+) \right\} \quad (4)$$

$$D(L_\lambda) = \{u, u \in \mathcal{U}, u(x, 0) = 0, u(0, t) = 0\}.$$

Задача. Требуется исследовать вопросы разрешимости краевой задачи (2) при условиях (3) – (4).

Особенностью данной задачи является то, что спектральный параметр λ является коэффициентом нагруженного слагаемого, и точка нагрузки движется по линейному закону $x = t$.

Считая нагруженное слагаемое в (2) временно известным и перенеся его в правую часть уравнения обратим дифференциальную часть краевой задачи (2), [9]:

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\xi \frac{u(\xi, \tau)}{(\xi - \zeta)^\nu} d\xi \right\} |_{\xi=\tau} \cdot G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau + F(x, t), \quad (5)$$

где

$$F(x, t) = \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Соотношение (5) перепишем в виде

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^\xi \frac{u(\xi, \tau)}{(\xi - \zeta)^\nu} d\xi \right\} |_{\xi=\tau} d\tau \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) d\xi + F(x, t) \quad (6)$$

Вычислим внутренний интеграл в соотношении (6)

$$\int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t - \tau)}}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\tau)}\right) \right\} d\xi = \\
& = \left\| \eta = \frac{x \pm \xi}{2\sqrt{t-\tau}}, z = \frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} \right\| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\eta^2} d\eta - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-\eta^2} d\eta = \\
& = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\eta^2} d\eta = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right).
\end{aligned}$$

Введём обозначения:

$$\varphi(t) = \left[\frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \frac{u(\xi, t)}{(x-\xi)^\nu} d\xi \right]_{x=t}, \quad (7)$$

$$F_1(t) = \left[\frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \frac{F(\xi, t)}{(x-\xi)^\nu} d\xi \right]_{x=t}$$

Получим следующее интегральное соотношение для искомого решения задачи (2)

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \cdot \varphi(\tau) d\tau + F_1(t). \quad (8)$$

Возьмем производную порядка ν от обеих частей равенства (8) и положим $x = t$, тогда используя обозначения (7) получим

$$\varphi(t) + \lambda \int_0^t K_\nu(t, \tau) \cdot \varphi(\tau) d\tau = F_1(t) \quad (9)$$

где ядро этого интегрального уравнения Вольтерра $K_\nu(t, \tau)$ имеет вид:

$$K_\nu(t, \tau) = \left[\frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \cdot \frac{d\eta}{(x-\eta)^\nu} d\xi \right]_{x=t}$$

Найдем явный вид ядра $K_\nu(t, \tau)$, т.е. вычислим следующий интеграл

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \cdot \frac{d\eta}{(x-\eta)^\nu} = \|x - \eta = z\| = \\
& = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x \operatorname{erf}\left(\frac{x-z}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \frac{dz}{z^\nu} = \\
& = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{t-\tau}} \cdot e^{-\frac{(x-z)^2}{4(t-\tau)}} \frac{dz}{z^\nu} = \left\| \frac{x-z}{2\sqrt{t-\tau}} = y \right\| = \\
& = \frac{2}{\sqrt{2}\Gamma(1-\nu)} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}} (x - y \cdot 2\sqrt{t-\tau})^{-\nu} e^{-y^2} dy =
\end{aligned}$$

$$= \frac{2^{1-\nu}}{\sqrt{\pi} \Gamma(1-\nu)(t-\tau)^{\frac{\nu}{2}}} \cdot \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}} \left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} - y \right)^{-\nu} e^{-y^2} dy = \|[10], 3.48 (3)\| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(2-\nu)} \cdot \frac{x^{1-\nu}}{\sqrt{t-\tau}} {}_2F_2 \left(\frac{1}{2}, 1; \frac{2-\nu}{2}, \frac{3-\nu}{2}; -\frac{x^2}{4(t-\tau)} \right).$$

Таким образом имеем:

$$K_\nu(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(2-\nu)} \cdot \frac{t^{1-\nu}}{\sqrt{t-\tau}} {}_2F_2 \left(\frac{1}{2}, 1; \frac{2-\nu}{2}, \frac{3-\nu}{2}; -\frac{x^2}{4(t-\tau)} \right)$$

где

$${}_2F_2(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k (\alpha_2)_k}{(\beta_1)_k (\beta_2)_k} \cdot \frac{z^k}{k!}$$

обобщенный гипергеометрический ряд, который сходится в области $|z| < \infty$, $(c)_k$ – символ Похгаммера - $(c)_k \cdot c(c+1) \dots (c+k-1)$.

Для функции $K_\nu(t, \tau)$ справедлива следующая оценка

$$|K_\nu(t, \tau)| < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{t^{1-\nu}}{\sqrt{t-\tau}}; \quad 0 < \nu < 1,$$

откуда следует, что ядро интегрального уравнения (9) имеет слабую особенность, т.е. при условиях (3), оно имеет единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Подставив найденное решение интегрального уравнения (9) в равенство (8) найдем решение краевой задачи (2). Таким образом, справедлива

Теорема. Для любого значения $\lambda \in \mathbb{C}$, $\forall f \in M(Q)$, (3) краевая задача (2) имеет единственное решение $u(x, t) \in \mathcal{U}$.

Литература:

1. Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1976. Т.12, №1. С.103-108.
2. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
3. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.
4. Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. Алматы: Ғылым, 2010. 334 с.
5. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.
6. Нахушева В.А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006. 174 с.
7. Псху А.В. Уравнение в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
8. Сербина Л.И. Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. М.: Наука, 2007. 167 с.
9. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001, 5769 с.
10. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений М.: Физматгиз, 1963. – 982 с.