Орынтаева У.Б., академик Е. А. Бөкетов атындағы Қарағанды Мемлекеттік университеті, математика және ақпараттық технологиялар факультеті, М-403 тобы, студент
(Ғылыми жетекші – ф.- м.ғ.д., профессор, Ақышев Ғ.А.)

l_p КЕҢІСТІГІ ЖӘНЕ ҮШБҰРЫШТЫҢ ҒАЖАЙЫП НҮКТЕЛЕРІ

1. Сандар жиынтығын (тобын) қалай салыстыруға болады?

Егер екі сан берілсе, онда оларды салыстырып және қайсысының үлкен болатынын анықтауға болады.

Ал екі сандар жиынтығын қалай салыстыруға болады? Оларды салыстырудың әртүрлі әдістері бар. Мектепте осы сандардың арифметикалық ортасын және геометриялық ортасын тауып салыстыруға болады.

Айталық $\overline{a}=(a_1,\ldots,a_n)$ және $\overline{b}=(b_1,\ldots,b_n)$ сандар жиынтықтары берілсін. Қайсысы үлкен?

Мысал. Ең қарапайым жағдай: екі таразының қайсысы жақсы жұмыс істейтінін анықтау керек. Айталық үш рет өлшеу жүргіздік. Бірінші таразы бірінші рет 10 граммға, екінші рет 3 граммға, үшінші рет 4 граммға қателесті. Екінші таразы сәйкесінше 5, 8 және 6 граммға қателесті.

Сонымен бізде сандардың екі жиынтығы $\overline{a}=(10,3,4)$ және $\overline{b}=(5,8,6)$ бар. Осы жиынтықтардың қайсысы кіші болса, сол таразы дәлірек болады. Қай таразы дәлірек?

Ең бірінші екі жиынтықтың әрқайсысының ең үлкен элементін табуға болады. Онда $\overline{a}$ жиынтығының ең үлкен элементі 10, ал $\overline{b}$ жиынтығының үлкені 8. Яғни бірінші таразы нашарлау (себебі тезірек қате өлшеді).

Екі жиынтықты басқаша салыстыруға болады: әрбір жиынтықтың элементтері өзара қосамыз. Онда $\overline{a}$ жиынтығы үшін қосынды 17, ал $\overline{b}$ жиынтығы үшін 19 болады. Онда $\overline{a}$ жиынтығы $\overline{b}$ жиынтығынан кіші болады. Яғни бірінші таразы дәлірек өлшеді.

Математиктерге көп жағдайда сандардың қосындысымен, не максимумдерімен жұмыс істегеннен, олардың квадраттық орташа мәнімен жұмыс жасау қолайлы, (яғни сандардың квадраттарының қосындысының түбірлері). Бұл жағдайда $\overline{a}$ және $\overline{b}$ жиынтықтары үшін $\sqrt{125}$. Яғни екі таразыда бірдей өлшеді.

Сонымен, өлшеу нәтижесі салыстыру әдісіне байланысты. Жоғарыда қарастырылған үш әдіс сандар жиынтығының l_p кеңістігіндегі нормаларын өлшедік. Яғни функционалдық анализді қолдандық.

Анықтама 1. $\vec{a}=(a_1,\ldots,a_n)$ сандар жиыны берілсін және $p\geq 1$ болсын. Онда бұл жиынның l_p нормасы деп: $\|\vec{a}\|_p=(|a_1|^p+\cdots+|a_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ аталады. l_∞ нормасы деп: $\|\vec{a}\|_\infty=\max\{|a_1|,\ldots,|a_n|\}$ аталады. ([1], 22 б.)

l әрпі функциялар теориясының негізін қалаушылардың бірі, француз математигі Анри Лебегтің құрметіне қойылған.

Таразылар мысалында $\|\vec{a}\|_\infty>\|\vec{b}\|_\infty$, $\|\vec{a}\|_1<\|\vec{b}\|_1$ және $\|\vec{a}\|_2=\|\vec{b}\|_2$ екенін байқадық. Сандар жиынын салыстыру қажеттілігі математиканың әр түрлі есептерінде жиі кездеседі. Көп жағдайда бұл l_p нормасымен анықталады. Р санынының қандай мәнін таңдауымыз есептің берілгеніне байланысты. Ықтималдықтар теориясында -l_1 нормасын, жуықтау теориясында -l_∞ нормасын, Фурье қатарларын зерттегенде -l_2 нормасын және т.б. алған ыңғайлы. Енді геометриялық есептерде l_p нормасын қалай қолдану керек екенін көрсетеміз.

2. Екі геометриялық есеп

Жазықтықта Евклид метрикасын қарастырайық және минимум (екі кіші мән) табуға екі геометриялық есепті қарастырайық.

Бірінші есеп: Үшбұрыштың төбелерінен ең кіші арақашықтықта жатқан нүктені табыңыз.

Екінші есеп: Берілген үшбұрышқа қабырғаларының ұзындықтары ең кіші болатын үшбұрышты іштей сызу керек.

Барлық жағдайда ұзындық Евклид метрикасы бойынша анықталады.

Есептердің қойылуы үйреншікті емес, себебі «үшбұрыштың төбелерінен ең кіші қашықтықта жатқан нүкте» дегенді қалай түсінуге болады $([6], 2-5б.)$? Үшбұрыштың үш төбесі бар, яғни берілген нүктеден осы төбелерге дейін үш арақашықтық бар. Олардың қайсысы кіші болуы керек? Немесе үшеуі де кіші болуы керек пе? Біз l_p кеңістігінің нормасын қолданып есепті дұрыс қоямыз. Біз үш төбеге дейінгі арақашықтықтардың l_p нормасы ең кіші болатын нүктені іздейміз. p параметрінің әртүрлі мәндерін алып, жауап ретінде үшбұрыштың әртүрлі ғажайып нүктелерін табамыз.

Енді үшбұрыштың төбелерінен бірдей қашықтықта орналасқан нүктелерді қарастырамыз.

Жалпы есеп: Берілген сүйір үшбұрыштың төбелеріне дейінгі арақашықтықтарды $l_p -$ нормасы ең кіші болатын нүктені табыңыз.

Яғни, $\Delta ABC -$ берілсін. M нүктесінен A, B, C нүктелеріне дейінгі Евклид қашықтықтары MA, MB, MC болады.

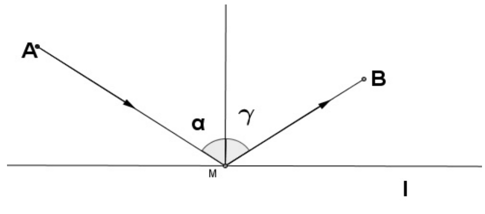
$\rho_{l_p}(M) = \left(MA^p + MB^p + MC^p\right)^{1/p}, \quad 1 \le p \le +\infty$ ең кіші болатын M' нүктесін табу керек.

Үшбұрыштың төбелерінен ең қысқа қашықтықта жатқан нүктелер туралы айталық. Енді осы есептің $p=1, p=2$ және $p=\infty$ жағдайлардағы шешімдерін қарастырайық. Ол үшін алдымен келесі тұжырымды қолданамыз.

Лемма 1. Берілген l түзуінен бір жарты жазықтықта жатқан A және B нүктелері үшін арақашықтықтардың қосындысы $MA + MB$ ең кіші болатын l түзуінде жатқан M нүктесін табыңыз. Ол үшін бұл есептің физикалық мағынасын қолданамыз. Геометриялық оптиканың теориялық негізі 17 ғ-дың соңында Ферма принципі ашылғаннан кейін қалыптасты.

Жарық бір ортадан екінші ортаға түскенде орталар шекарасында аз-көпті шағылады. Түскен жарық, шағылған жарық және түсу нүктесіне тұрғызылған түзу бір жазықтықта жатады.Түсу бұрышы шағылу бұрышына тең болады. $([2], 223$ б.$)$?

$\alpha = \gamma.$



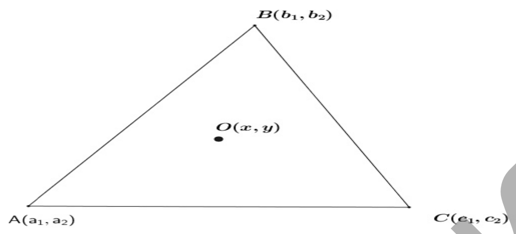
Есеп 1. ($p=1$). Берілген сүйір бұрышты үшбұрыштың төбелеріне дейінгі арақашықтықтарының қосындысы ең кіші болатын нүктені табыңыз. Ол *Торричелли нүктесі* деп аталады. Кез келген сүйір бұрышты үшбұрыш үшін Торричелли нүктесі жалғыз болатыны белгілі.

1 – есеп 350 жылдан бері белгілі. Оны ең алғаш рет 1659 жылы Галилейдің оқушысы, итальян физигі мен математигі Винченцо Вивиани (1608-1647) жариялады. Бірақ оған дейін сұйықтық қысым заңын ашқан Галилейдің тағы бір оқушысы Эванджелиста Торричелли

шығарған болатын. Торричелли бұл есепті ұлы француз математигі Пьер Фермадан (1601-1665) білді. Сондықтан Торричелли нүктесін Ферма нүктесі деп те атайды. Одан кейін 1-есептің геометриялық шешімін швейцар геометрі Якоб Штейнер (1796-1863) тапқан болатын.

Есеп 2. (p=2). Үшбұрыштың төбелеріне дейінгі арақашықтықтарының квадраттарының қосындысы ең кіші болатын нүктені табыңыз. Ол үшбұрыштың ауырлық центрі, яғни медианаларының қиылысуында жататын нүкте.

Шешімі. Үшбұрыштың төбелеріне жақын орналасқан нүкте туралы 1 есепте айнымалы ретінде x тұрақты саны емес жазықтықтағы нүкте қарастырылады. 2 есепте тіпті үш айнымалы – үшбұрыштың қабырғаларындағы нүктелер. Сондықтан бұл жерде бірнеше айнымалысы бар функцияның туындысын табу қажет болады.



$F(O) = (AO^p + BO^p + CO^p)^{\frac{1}{p}}$ l_p норма ең кіші болатын О нүктесін табу керек.

AO=$\sqrt{(a_1 - x)^2 + (a_2 - y)^2}$ BO=$\sqrt{(b_1 - x)^2 + (b_2 - y)^2}$ CO=$\sqrt{(c_1 - x)^2 + (c_2 - y)^2}$

$F(x, y) = \sqrt{(a_1 - x)^2 + (a_2 - y)^2 + (b_1 - x)^2 + (b_2 - y)^2 + (c_1 - x)^2 + (c_2 - y)^2}$ минимум табу керек. ([3], 112 б.)?

$\delta = {a_1}^2 + {a_2}^2 + {b_1}^2 + {b_2}^2 + {c_1}^2 + {c_2}^2$ $\delta_1 = a_1 + b_1 + c_1$ $\delta_2 = a_2 + b_2 + c_2$ деп белгілеп алсақ,

$$F(x, y) = \sqrt{3(x^2 + y^2) + \delta - 2(\delta_1 x + \delta_2 y)}$$

$$F_x'(x, y) = \frac{6x - 2\delta_1}{2\sqrt{3(x^2 + y^2) + \delta - 2(\delta_1 x + \delta_2 y)}} = 0$$

$$F_y'(x, y) = \frac{6y - 2\delta_2}{2\sqrt{3(x^2 + y^2) + \delta - 2(\delta_1 x + \delta_2 y)}} = 0$$

$$\begin{cases} 6x - 2\delta_1 = 0 \\ 6y - 2\delta_2 = 0 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} x = \frac{2\delta_1}{6} = \frac{\delta_1}{3} \\ y = \frac{2\delta_2}{6} = \frac{\delta_2}{3} \end{cases}$$

Функцияның минимумын табу үшін $AC - B^2 > 0$ теңдігі орындалуы керек. ([4], 480 б.)? Мұндағы $B = \frac{d^2F}{dxdy}$, $A = \frac{d^2F}{dx^2}$ және $C = \frac{d^2F}{dy^2}$.

$$A = F_{xx}''(x, y) = \frac{9y^2 - 6\delta_2 y + 3\delta - {\delta_1}^2}{(3(x^2 + y^2) + \delta - 2(\delta_1 x + \delta_2 y))^{\frac{3}{2}}}$$

$$C = F''_{yy}(x,y) = \frac{9x^2 - 6\delta_1 x + 3\delta - {\delta_2}^2}{(3(x^2+y^2)+\delta-2(\delta_1 x+\delta_2 y))^{\frac{3}{2}}},$$

$$B = F''_{xy}(x,y) = \frac{3\delta_1 y - 9xy + 3\delta_2 x - \delta_1\delta_2}{(3(x^2+y^2)+\delta-2(\delta_1 x+\delta_2 y))^{\frac{3}{2}}}.$$

Енді $x = \frac{\delta_1}{3}$, $\quad y = \frac{\delta_2}{3}$ орнына қойып A, B және C ықшамдаймыз.

$$A = \frac{-{\delta_2}^2 + 3\delta - {\delta_1}^2}{(3(x^2+y^2)+\delta-2(\delta_1 x+\delta_2 y))^{\frac{3}{2}}},$$

$$C = \frac{-{\delta_1}^2 + 3\delta - {\delta_2}^2}{(3(x^2+y^2)+\delta-2(\delta_1 x+\delta_2 y))^{\frac{3}{2}}},$$

$$B = 0$$

$$A\cdot C = (-{\delta_2}^2 + 3\delta - {\delta_1}^2)\left(-{\delta_1}^2 + 3\delta - {\delta_2}^2\right) > 0$$

$$-{\delta_1}^2 + 3\delta - {\delta_2}^2 > 0,$$

δ, δ_1 және δ_2 орнына a, b және c коэффициенттерін қоямыз.

$$3({a_1}^2 + {a_2}^2 + {b_1}^2 + {b_2}^2 + {c_1}^2 + {c_2}^2) - (a_1 + b_1 + c_1)^2 - (a_2 + b_2 + c_2)^2 =$$

$$= (a_1 - b_1)^2 + (a_1 - c_1)^2 + (b_1 - c_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_2 - c_2)^2 + (b_2 - c_2)^2 \geq 0$$

Демек, l_p норма ең кіші болатын O нүктесі үшбұрыштың медианаларының қиылысу нүктесі.

Әдебиеттер:

1.Наурызбаев. Қ.Ж. Функционалдық анализ. Бастапқы курс. Оқу құралы. Алматы, 2007 ж. – 171 б.

2.Физика: Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану - Ф49 математика бағытындағы 11 сыныбына арналған оқулық /С. Тұяқбаев, Ш. Насохова, Б. Кронгарт, т.б. — Алматы: "Мектеп" баспасы. — 384 бет, суретті

3.Жәутіков О.Ә. Математикалық анализ курсы. Қазақтың мемлекеттік оқу- педагогика баспасы. Алматы- 1958.- 784 б.

4.Ибрашев Х.И., Еркеғұлов Ш.Т. Математикалық анализ курсы.мектеп баспасы, Алматы, 2т., -1970.-528 б.

5.Темірғалиев Н. Математикалық анализ - Алматы: Мектеп, 1987 - №1 – 288 б.

6.В.Протасов, В. Тихомиров, Пространство L_p и замечательные точки треуголь-ника «Квант» №2, 2012, (стр. 2–11)