УДК 510.67

А.Р.Ешкеев

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова;
РГКП «Институт прикладной математики» КН МОН РК, Караганда (E-mail: modth1705@mail.ru)

Йонсоновские множества и их некоторые теоретико-модельные свойства

Исследования, проведенные в данной статье, связаны с описанием теоретико-модельных свойств некоторых, вообще говоря, неполных классов теорий, которые являются подклассом индуктивных теорий. Эти теории хорошо изучаются и в алгебре, и в теории моделей. Они называются йонсоновскими. Для изучения этих теорий вводится новый подход исследования. А именно, на подмножествах семантической модели йонсоновской теории выделяются особые множества, которые во-первых, являются реализациями некоторой экзистенциальной формулы, а во-вторых, замыкание этих множеств дает нам основное множество некоторой экзистенциально-замкнутой подмодели семантической модели. Помимо этого развивается техника для изучения центральных орбитальных типов.

Ключевые слова: йонсоновское множество, форкинг, алгебраическое замыкание, определимое замыкание, центральный тип, орбитальный тип.

Наши научные интересы связаны с описанием теоретико-модельных свойств некоторых, вообще говоря, неполных классов теорий, которые являются подклассом индуктивных теорий. Эти теории хорошо изучаются и в алгебре, и в теории моделей.

Как правило, мы всегда имеем дело с двумя объектами:

1) йонсоновской теорией и

2) классом ее экзистенциально-замкнутых моделей.

Хорошо известно, что совершенные йонсоновские теории достаточно удобны для теоретико-модельных исследований. Практически, в случае совершенности, мы можем сказать, что с помощью семантического метода мы можем дать определенное описание указанных выше объектов (йонсоновской теории и класса ее экзистенциально-замкнутых моделей).

Это позволяет нам предположить, что было бы интересно научиться выделять у произвольной теории ее фрагмент, который будет йонсоновской теорией. Такой подход нетривиален, хотя бы из-за того, что у произвольной теории множество ее универсально-экзистенциальных следствий не обязательно является йонсоновской теорией.

С другой стороны, для любой теории в некоторых специальных обогащениях всегда можно добиться, во-первых, йонсоновости, а затем и ее совершенности. Как минимум, это выполняется для таких операций, как скулемизация и морлизация. Причем в обоих случаях класс экзистенциально-замкнутых моделей полученных йонсоновских теорий совпадает с классом этих моделей первоначальных теорий [1].

Морлизация и скулемизация — это действия, примененные к рассматриваемой теории.

В данной статье предлагается идея рассмотрения нового подхода к подмножествам некоторой модели, который позволяет, во-первых, расширить семантический аспект и, во-вторых, перенести многие идеи из техники полных теорий для йонсоновских фрагментов, что само по себе обобщает рассматриваемую проблематику и ставит новые задачи.

Сделаем следующие договоренности:

1. В данном проекте рассматриваются только совершенные йонсоновские теории, полные для экзистенциальных предложений.

2. В данном проекте рассматриваются только классы экзистенциально-замкнутых моделей изучаемых теорий.

3. В случае структуры предполагается, что это модель некоторой сигнатуры.

Естественно, когда мы говорим о произвольной сигнатуре (языке) без теории, пункт 1) из указанных выше договоренностей не имеет значения.

Следующий подход к определению реляционной структуры некоторой сигнатуры хорошо известен. Он позволяет рассматривать только предикатные сигнатуры. Например, как в случае с морлизацией.

Начнём с определения реляционной структуры сигнатуры некоторой йонсоновской теории. Определяя семейства определимых подмножеств структуры, мы будем следовать терминологии и обозначениям из [2], но в [2] все определения даны для полных теорий, мы же будем работать с йонсоновскими теориями и их позитивными обобщениями.

Реляционная структура $M = \langle M, (B_i)_{i\in I} \rangle$ состоит из (непустого) множества M и семейства подмножеств $(B_i)_{i\in I}$ из $\bigcup_{n>1} M^n$, причём каждое (B_i) является подмножеством некоторого $M^{n_i}, n_i \geq 1$. Добавим дополнительное условие, что одно из множеств (B_i) является диагональю множества $M2$. Все B_i называются атомными подмножествами M.

Пусть $M = \langle M, (B_i)_{i\in I} \rangle$ — реляционная структура. Введём понятие семейства определимых подмножеств структуры M, обозначаемого $Def(M)$. Это наименьшее семейство подмножеств в $\bigcup_{n>1} M^n$ со следующими свойствами.

Для каждого $i \in I$ выполнено включение $B_i \in Def(M)$.

Множество $Def(M)$ замкнуто относительно конечных булевых комбинаций, т.е. из включений $A, B \subseteq M^n$, $A, B \in Def(M)$ следует, что $A \cup B \in Def(M)$, $A \cap B \in Def(M)$ и $M^n \setminus A \in Def(M)$.

Множество $Def(M)$ замкнуто относительно декартова произведения, т.е. из включений следует, что $A \times B \in Def(M)$.

Множество $Def(M)$ замкнуто относительно проекции, т.е. если $A \subseteq M^{n+m}$, $A \in Def(M)$, то $\pi_n(A)$ — проекция множества A на M^n, $\pi_n(A) \in Def(M)$.

Множество $Def(M)$ замкнуто относительно специализации, т.е. если $A \in Def(M)$, $A \subseteq M^{n+k}$ и $\overline{m} \in M^n$, то $A(\overline{m}) = \{\overline{b} \in M^k : (\overline{m}, \overline{b}) \in A\} \in Def(M)$.

Множество $Def(M)$ замкнуто относительно перестановки координат, т.е. если $A \in Def(M)$, а σ — перестановка множества $1,...,n$, то $\sigma(A) = \{(a_{\sigma(1)}),...a_{\sigma(n)}) \mid (a_1,...a_n) \in A\} \in Def(A)$.

Скажем теперь, что $S \subseteq M^n$ — атомное подмножество, если

$$S = \{(a_1,...,a_n) \in M^n \mid M \vDash \varphi(a_1,...,a_n,b_1,...,b_m)\}$$

для некоторой атомарной формулы $\varphi(x_1,...,x_n,x_{n+1},...,x_{n+m})$ и некоторого $\overline{b} \in M^m$. Мы говорим, что подмножество S определено с параметрами $\overline{b}$ или над $\overline{b}$.

Скажем теперь, что $D \subseteq M^n$ — определимое подмножество L-структуры M, если существуют $\overline{b} \in M^m$ (здесь $\overline{b}$ может быть пустым) и формула $\varphi(x_1,...,x_n,x_{n+1},...,x_{n+m})$ такие, что

$$D = \{(a_1,...,a_n) \in M^n \mid M \vDash \varphi(a_1,...,a_n,b_1,...,b_m)\}.$$

Если $\overline{b} \subseteq B$, то мы говорим, что D определимо с параметрами из B (или над B) или что D определяется формулой с параметрами из B.

Ясно, что определимые множества в этом смысле — не что иное, как $Def(M)$ для реляционной структуры $\langle M, (A_i)_{i\in I} \rangle$, где в качестве A_i взяты все атомные определимые множества.

Пусть T — йонсоновская совершенная теория, полная для экзистенциальных предложений в языке L. Фиксируем её семантическую модель C, насыщенную в очень большой мощности $\varkappa$ (в частности, $\varkappa$ много больше мощности языка). Условимся, что в дальнейшем все рассматриваемые модели M, N,... теории T будут экзистенциально-замкнутыми подструктурами большой модели C мощности меньше, чем $\varkappa$. Все рассматриваемые подмножества $A, B, D...$ будут подмножествами в C мощности меньше $\varkappa$.

Отметим ещё один полезный факт: если f — автоморфизм структуры C, оставляющий на месте все элементы множества $A, f \in Aut_A(C)$, то f заведомо переводит в себя каждое A-определимое подмножество и потому переводит в себя и все полные типы над A, ввиду насыщенности семантической модели C. Верно и обратное: если $\bar{c}, \bar{d} \in C^n$, то $tp(\bar{c} / A) = tp(\bar{d} / A)$, если и только если существует такое $f \in Aut_A(C)$, что $f(\bar{c}) = \bar{d}$.

В насыщенной модели полные n-типы над A в точности соответствуют орбитам n-ок элементов при автоморфизмах, фиксирующих A поэлементно. Так как теория полна для экзистенциальных предложений в языке L, то это верно и для экзистенциальных типов.

Пусть L — язык, который с этого момента предполагается счетным. Далее пусть T — йонсоновская совершенная теория, полная для экзистенциальных предложений в языке L, а C — её семантическая модель. Сохраняется соглашение, что все рассматриваемые множества и модели теории T имеют строго меньшую мощность, чем C.

Пусть $A \subseteq C$. Фиксируем некоторое $n \geq 1$ и рассмотрим семейство Def_A^n всех A-определимых подмножеств над C^n. Отождествим данное определимое подмножество в C^n и определяющую его формулу $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$, где $\bar{x} = (x_1, .., x_n)$, а $\bar{a}$ — кортеж элементов из A (две различные формулы могут определять то подмножество, но мы рассматриваем формулы с точностью до эквивалентности в C в очевидном смысле).

Семейство Def_A^n является булевой алгеброй относительно обычных операций пересечения, объединения и дополнения. Полный n-тип над A — то же самое, что ультрафильтр в этой булевой алгебре. Пространство полных n-типов над A, обозначаемое $S_n(A)$, — это пространство Стоуна, соответствующее булевой алгебре Def_A^n. Введём на $S_n(A)$ (обычную) топологию, в которой открытую базу составляют множества $\langle \varphi(\vec{x}, \bar{a}) \rangle = \{ p \in S_n(A) | \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in p \}$.

Мы рассматриваем счётный язык L и йонсоновские совершенные теории, полные для экзистенциальных предложений в языке L, и их семантические модели C в этом языке и другие модели (классы экзистенциально-замкнутых моделей рассматриваемых теорий).

Если M — модель теории T, а φ — формула языка L, то будем использовать следующее обозначение: $\varphi(M) = \{ m \in M^n \mid M \models \varphi(m) \}$.

Множество S будем называть 0-определимым, если оно (φ) $\varnothing$-определимо (определимо без параметров).

Множество всех полных типов над A обозначим через $S(A)$, т.е. $S(A) = \bigcup_{n \geq 1} Sn(A)$.

Насыщенные модели йонсоновской теории (ϰ — насыщенные модели мощности κ) однозначно определяются своей мощностью. Но они могут и не существовать без определённых теоретико-множественных допущений типа обобщённой континуум гипотезы. С другой стороны, есть разные способы избежать теоретико-множественные трудности такого сорта. Например, предполагать стабильность или ослаблять понятие семантической модели, как в [1]. Поэтому предполагаем, что мы избавились от всех вопросов о существовании семантической модели.

Далее удобно работать внутри семантической модели C йонсоновской теории C, содержащей все остальные.

В дальнейшем любое множество параметров A считается подмножеством в C. Модель M — это такое подмножество C, которое является носителем экзистенциально-замкнутой подструктуры. Это означает, что любая $L(M)$-экзистенциальная формула $\varphi(x)$, выполнимая в C, выполняется и на некотором элементе из M. Параметры формул в дальнейшем всегда принадлежат C, и мы пишем $\models$ $\varphi(c)$, если $C \models \varphi(c)\varphi$.

Лемма 1. Определимое множество D определимо над множеством A, если и только если оно инвариантно относительно всех автоморфизмов модели C, оставляющих на месте каждый элемент из A. (Назовём их автоморфизмами над A.)

Отсюда следует, что определимое замыкание $dcl(A)$ множества A, т.е. множество всех элементов, определимых над A, совпадает с множеством элементов, инвариантных относительно всех автоморфизмов над А.

Элемент b, содержащийся в конечном A-определимом множестве, называется алгебраическим над A. Отсюда следует, что элемент b алгебраичен над A, если и только если он имеет лишь конечное число сопряжённых над A.

Множество $acl(A)$, состоящее из всех элементов, алгебраических над A, назовём алгебраическим замыканием множества A.

Ранг Морли. Пусть теория T та же, что выше, а C — её семантическая модель.

Мы хотим приписать каждому определимому множеству D порядковое число (или, возможно, -1, или ∞) — его ранг Морли, обозначаемый через MR. Сначала определим отношение $MR(D) \geq a$ посредством рекурсии по ординалу α.

Определение 1. $MR(D) \geq 0$, если и только если множество D непусто;

$MR(D) \geq \lambda$, если и только если $MR(D) \geq a$ при всех $\alpha < \lambda$ (λ — предельный ординал);

$MR(D) \geq a+1$, если и только если в D существует бесконечное семейство (D_i) попарно непересекающихся определимых подмножеств, такое что $MR(D_i) \geq a$ при всех i.

Тогда ранг Морли множества D равен $MR(D) = \sup\{\alpha \mid MR(D) \geq a\}$, причём будем считать, что $MR(\varphi) = -1$ и $MR(D) = \infty$, если $MR(D) \geq a$ для всех α (в последнем случае будем говорить, что D не имеет ранга). Заметим, что смысл соотношения $MR(D) \geq a$ не изменился.

Частные случаи: определимое множество имеет ранг -1, если оно пусто; ранг 0, если оно конечно; ранг 1, если оно бесконечно, но не содержит бесконечного семейства непересекающихся бесконечных определимых подмножеств.

Лемма 2. Справедливо соотношение $MR(D_1 \cup D_2) = \max(MR(D_1), MR(D_2))$.

Степень Морли $Md(D)$ класса D, имеющего ранг Морли α, — это максимальная длина d его разложения $B = D_1 \cup \ldots\ldots \cup D_d$ на непересекающиеся множества ранга α.

Компоненты D_i в таком разложении однозначно определены $(\mathrm{mod}\, a)$.

В случае ранга 0 степень множества D — это просто число его элементов. Если множество не имеет ранга, то не определена и степень Морли этого множества.

Сильно минимальное множество — это множество ранга 1 и степени 1.

Множество D сильно минимально, если и только если оно бесконечно и каждое его определимое подмножество конечно либо коконечно в D.

Форкинг. Дадим аксиоматически задание форкинга.

Пусть M — $\exists$-насыщенная экзистенциально-замкнутая модель мощности k (k — достаточно большой кардинал) йонсоновской теории T ($\exists$-насыщенность означает насыщенность относительно экзистенциальных типов). Пусть A — класс всех подмножеств M; P — класс всех $\exists$-типов (не обязательно полных), пусть $JNF \subseteq P \times A$ — некоторое бинарное отношение. Мы накладываем на JNF следующие аксиомы:

Аксиома 1. Если $(p, A) \in JNF$, $f: A \to B$ — автоморфизм M, то $(f(p), f(A)) \in JNF$.

Аксиома 2. Если $(p, A) \in JNF$, $q \subseteq p$, то $(q, A) \in JNF$.

Аксиома 3. Если $A \subseteq B \subseteq C$, $p \in S^J(C)$, то $(p, A) \in JNF \Leftrightarrow (p, B) \in JNF$ и $(p \upharpoonright B, A) \in JNF$.

Аксиома 4. Если $A \subseteq B$, $dom(p) \subseteq B$, $(p, A) \in JNF$, то $\exists q \in S^J(B)$, ($p \subseteq q$ и $(q, A) \in JNF$).

Аксиома 5. Существует кардинал μ такой, что если $A \subseteq B \subseteq C$, $p \in S^J(B)$, $(p, A) \in JNF$, то $\left|\{q \in S^J(C) : p \subseteq q \text{ и } (q, A) \in JNF\}\right| < \mu$.

Аксиома 6. Существует кардинал ρ такой, что $\forall p \in P$, $\forall A \in A$, если $(p, A) \in JNF$, то $\exists A_1 \subseteq A$, ($|A_1| < \rho$ и $(p, A_1) \in JNF$).

Аксиома 7. Если $p \in S^J(A)$, то $(p, A) \in JNF$.

Классическое понятие форкинга принадлежит Шелаху.

Множество формул $\left\{\varphi\left(\overline{x},\overline{a_i}\right): i<k\right\}=p$ называется k-несовместным для некоторого положительного целого k, если каждое конечное подмножество p мощности k несовместно, т.е. $\models \neg\overline{x}(\varphi(\overline{x},\overline{a_{i_1}})\wedge\ldots\wedge\varphi(\overline{x},\overline{a_{i_k}}):)$ для каждого $i_1<\ldots<i_k<k$.

Частичный тип p делится над множеством относительно $k\in\omega$, если существует формула $\varphi(\overline{x},\overline{a})$ и последовательность $\left\langle\overline{a_i}: i\in\omega\right\rangle$ такая, что:

1) $p\vdash\varphi(\overline{x},\overline{a})$;

2) $tp(\overline{a}/A)=tp(\overline{a_i}/A)$ для всех i;

3) $\left\{\varphi(\overline{x},\overline{a}): i\in\omega\right\}$ k-несовместно.

Также p делится над A, если p делится над A относительно некоторого k. Кроме того, p форкуется над A в T, если существуют формулы $\varphi_1(\overline{x},\overline{a_0}),\ldots,\varphi_n(\overline{x},\overline{a_n})$ такие, что:

(i) $p\models\bigvee\limits_{0\le i\le n}\varphi_i(\overline{x},\overline{a_i})$;

(ii) $\varphi_i(\overline{x},\overline{a_i})$ делится над A для каждого i.

Следующий результат дает возможность применять все свойства форкинга для полных теорий в классе указанных выше йонсоновских теорий.

Теорема 1. Пусть T — совершенная йонсоновская теория, полная для $\exists$-предложений. Тогда следующие условия эквивалентны:

– отношение JNF удовлетворяет аксиомам 1–7 относительно теории T;

– T^* стабильна и для любых $p\in P$, $A\in \mathrm{A}$ $((p,A)\in JNF\Leftrightarrow$ p не форкуется над A).

Пусть T — йонсоновская теория, $S^J(X)$ — множество всех экзистенциальных полных n-типов над X, совместных с T, для каждого конечного n.

Мы говорим, что йонсоновская теория T $J-\lambda$-стабильна, если для любой T-экзистенциально-замкнутой модели A, для любого подмножества X множества A $|X|\le\lambda\Rightarrow\left|S^J(X)\right|\le\lambda$.

Теорема 2. Пусть T — полная для экзистенциальных предложений совершенная йонсоновская теория, $\lambda\ge\omega$. Тогда следующие условия эквивалентны:

– T $J-\lambda$-стабильна;

– T^* λ-стабильна, где T^* — центр теории T.

Пусть T — произвольная йонсоновская теория сигнатуры σ; C — ее семантическая модель; A — подмножество модели C; P — новый одноместный предикатный символ. Рассмотрим в сигнатуре $\sigma_P(A)=\sigma_A\cup\{P\}$ следующую (вообще говоря, неполную) теорию:

$$T_P^J(A)=Th_{\forall\exists}(C,a)_{a\in A}\cup\{P(c_a)\mid a\in A\}\cup\{"P\subseteq"\},$$

где $\{"P\subseteq"\}$ — бесконечное множество предложений, выражающих тот факт, что интерпретация символа P — это экзистенциально-замкнутая подмодель в сигнатуре σ. Требование экзистенциальной замкнутости от подмодели существенно в том смысле, что она не должна быть конечной. Через S_P^J обозначим множество всех $\exists$-пополнений теории $T_P^J(A)$. Пусть λ — произвольный кардинал.

Йонсоновская теория T называется йонсоновской $P-\lambda$-стабильной (в дальнейшем $J-P-\lambda$-стабильной), если $\left|S^J(X)\right|\le\lambda$ для любого множества A мощности $\le\lambda$.

Йонсоновская теория T называется $J-P$-стабильной, если T является $J-P-\lambda$-стабильной для некоторого λ.

Пусть A,B — экзистенциально-замкнутые модели йонсоновской теории T и выполняется включение $A\underset{\neq}{\subseteq}B$. Пусть $\sigma_P=\sigma\cup\{P\}$. И интерпретация одноместного предикатного символа P в B есть A.

Модель (A, B) называется йонсоновской элементарной парой теории T.

Теорией йонсоновских элементарных пар называется теория T_P^J класса K, где K — множество всех йонсоновских элементарных пар теории T.

Лемма 3. Если T — совершенная йонсоновская теория, то $T_P^J(A)$ — совершенная йонсоновская теория.

Теорема 3. Пусть T — совершенная йонсоновская $\exists$-полная теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) центр теории T $P-\lambda$-стабилен (в смысле полной теории);

2) теория T $J-P-\lambda$-стабильна.

Следствие. Пусть T — несчетно-категорическая йонсоновская $\exists$-полная теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) теория йонсоновских элементарных пар T_P^J является $\exists$-полной теорией:

2) теория элементарных пар центра теории T полна (в смысле полной теории).

В этом пункте T есть $J-\omega$-стабильная, полная для экзистенциальных предложений, совершенная йонсоновская теория.

Пусть A — подмножество в B, а p — тип над A. Неформирующееся расширение (НФР) q типа p — это тип над B, который является расширением типа p и имеет тот же ранг.

Если q является НФР типа $q{\upharpoonright}A$, то будем говорить, что тип q не форкуется над A.

Частные случаи: пусть, как и выше, тип q — расширение типа p. Тогда тип p алгебраичен, если и только если тип q алгебраичен и является его НФР. Если тип p имеет ранг 1, то тип q является его НФР, если и только если он не алгебраичен.

Тип $p \in S(A)$ стационарен, если он имеет ровно одно НФР над любым множеством, содержащим A.

Лемма 4 (транзитивность и монотонность). Пусть дана цепь типов $p \subset q \subset r$. Тогда r является НФР типа p, если и только если r — НФР типа q, а q — НФР типа p.

Лемма 5 (непрерывность). Пусть B — множество параметров, $q \in S(B)$, и A — некоторое подмножество в B.

1. Тип $q \in S(B)$ не форкуется над некоторым конечным подмножеством B_0 в B. При этом B_0 можно выбрать таким образом, чтобы тип q был единственным НФР над B типа $q \upharpoonright B_0$.

2. Если тип $q \in S(B)$ форкуется над A, то существует такое конечное подмножество B_0 в B, что тип $q \upharpoonright A \cup B_0$ форкуется над A.

Если тип $tp(a / AB)$ не форкуется над A, то будем говорить, что a и B независимы над A и обозначать это следующим образом: $a \downarrow_A B$.

Теорема 4 (симметрия). Из условия $a \downarrow_A b$ следует, что $b \downarrow_A a$.

Симметрия и монотонность позволяют распространить понятие независимости с конечных множеств на произвольные, не теряя его основных свойств. Множество B не зависит от C над A (обозначение: $B \downarrow_A C$), если все конечные подмножества в B не зависят от C над A.

Следствие. Типы над $acl(A)$ не форкуются над A.

Пусть p — некоторый тип над моделью M, а q — его расширение над некоторым множеством B. Назовём q наследником типа p, если для каждой M-формулы $\varphi(x, \overline{b})$ из q найдётся такой кортеж $\overline{m}$ в M, что $\varphi(x, \overline{m}) \in p$. Назовём q конаследником, если каждая формула $\varphi(x, \overline{b}) \in q$ реализуется в M. Легко показать без ограничений на T, что каждый тип p имеет наследника и конаследника над B.

Теорема 5 (наследники и конаследники). Пусть p — некоторый экзистенциальный тип над экзистенциально-замкнутой моделью M, а q — его экзистенциальное расширение над некоторым множеством B. Тогда следующие утверждения равносильны.

Тип q является наследником типа p.

Тип q является конаследником типа p.

Тип q является НФР типа p.

Центральные орбитальные типы.

В данном пункте статьи мы сразу перейдем к позитивному случаю и рассмотрим аналогичные вопросы для центральных типов позитивных обобщений йонсоновских теорий. В случае $\Delta - PJ$-теории мы имеем следующие определения в связи с обогащением сигнатуры.

Пусть T есть произвольная $\Delta - PJ$-теория в языке первого порядка сигнатуры σ. Пусть C является семантической моделью теории T. $A \subseteq C$. $Let \sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$, где $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$. Пусть $T_\Gamma^{PJ}(A) = Th_{\forall\exists^+}(C, a)_{a \in A} \cup \{P(c_a) \mid a \in A\} \cup \{P(c)\} \cup \{"P \subseteq"\}$, где $\{"P \subseteq"\}$ есть бесконечное множество предложений, выражающих тот факт, что интерпретация символа P есть экзистенциально-замкнутая подмодель в языке сигнатуры σ. Рассмотрим все пополнения теории T^* для теории T в языке сигнатуры σ_Γ, где $\Gamma = \{c\}$. Так как T^* является $\Delta - PJ$-теорией, она имеет свой центр, и мы обозначим его через T^c. При ограничении теории T^c до сигнатуры σ теория T^c становится полным типом. Этот тип мы и назовем центральным типом теории T. Заметим, что все семантические модели элементарно эквивалентны между собой. В силу этого и совершенности теории определение центрального типа корректно.

Далее мы рассмотрим на языке понятий чистой пары понятие указанного выше центрального типа и, соответственно, теоретико-модельные понятия (например, стабильности и НФР) в связи с этим.

Следующие определения даны для центральных типов позитивных обобщений йонсоновских теорий ($\Delta - PJ$-теорий). Ясно, что в случае позитивной йонсоновской теории (даже когда теория не является йонсоновской) все предыдущие определения для йонсоновских теорий согласованы и корректны в силу определения ее семантической модели.

Подход к типам через автоморфизмы насыщенной модели известен давно, но это определялось, во-первых, для полных типов и для полных теорий.

В нашем случае мы имеем дело с центральными типами (они полны) позитивных йонсоновских теорий, которые, вообще говоря, не полны. Понятие чистой пары было введено Т.Г. Мустафиным для монстр-модели некоторой полной теории. Мы вместо монстр-модели переходим к семантической модели некоторой позитивной йонсоновской теории ($\Delta - PJ$-теории) и далее рассмотрим ее группу автоморфизмов.

Соответственно, основной идеей данного пункта статьи является переопределить все понятия, введенные Т.Г. Мустафиным для орбитальных типов в [3], на язык центральных орбитальных типов и затем получить соответствующие результаты на языке чистой пары соответствующей йонсоновской теории.

Дадим определение некоторых важных теоретико-модельных понятий на языке чистой пары (A, G), где A — некоторые подмножества семантической модели, а G — группа автоморфизмов семантической модели.

Пусть (A, G) — произвольная чистая пара $X \subseteq A$.

1. $G_x \leftrightarrows \{g \in G : \forall x \in X (g(x) = x)\}$. Очевидно, что $G_x \subseteq G$.

2. Если $Y \subseteq A$, то $G_x(Y) \leftrightarrows \{g(Y) : g \in G_x\}$. Если $Y = \{a\}$, то будем использовать запись $G_x(a)$. $G_x(Y)$ называется G_x орбитой Y.

3. Если $0 < n < \omega$, то $0^n(X) \leftrightarrows \{G_x(\overline{a}); \overline{a} \in A^n\}$.

4. $acl(X) \leftrightarrows \{a \in A : |G_x(a)| < \omega\}$.

5. Последовательность $\mathrm{E} = \langle \overline{e_i} : i < A \rangle$ конечных последовательностей (кортежей) одной и той же длины назовем неразличимой над X, если:

а) $\overline{e_i} \neq \overline{e_j}$ для всех $i < j < a$;

б) для любой последовательности $\langle i_k : k < m < \omega \rangle$ индексов, такой что $i_k < i_s \Leftrightarrow k < s$ для любых $k, s \leq m$, существует $g \in G_x$, такое что $g\left(\left\langle e_k : k \leq m \right\rangle\right), \left\langle e_{i_k} : k \leq m \right\rangle$.

6. Если $(I;<)$ — линейно упорядоченное множество индексов, то последовательность $E=\left\langle \overline{e}_i : i\in I\right\rangle$ назовем неразличимой над X, если для любого $I_0\subseteq I$, такого что $ord\left\langle I_0\right\rangle=\omega$, $E=\left\langle \overline{e}_i : i\in I_0\right\rangle$ является неразличимой над X последовательностью.

7. Множество $E=\left\langle \overline{e}_i : i\in I\right\rangle$ последовательностей одной и той же длины назовем неразличимой над X, если:

а) $\overline{e_i}\neq\overline{e_j}$ при $i\neq j$;

б) для любых $F,D\subseteq E$, таких что $|F|=|D|<\omega$, и любой биекции $\psi:F\to D$ существует $g\in G$ такое, что $\psi\in g$.

8. Если $X\subseteq Y$, $p\in O^n(Y)$, то p будем называть:

а) расщепляющей над X, если существуют такие $\overline{a},\overline{b}\in Y$, что $G_x(\overline{a})=G_x(\overline{b})$, но для любого $\overline{c}\in pG_{x\cup\bar{c}}(\overline{a})\cap G_{x\cup\bar{c}}(\overline{b})=\overline{c}\in p\ (\varphi)$;

б) строго расщепляющей над X, если существует такая неразличимая над X бесконечная последовательность $E=\left\langle \overline{a}_i : i<\omega\right\rangle$ в A, что $\overline{a_0},\overline{a_1}\in Y$, и для любого $\overline{c}\in p$ имеет место $G_{x\cup\bar{c}}(\overline{a})\cap G_{x\cup\bar{c}}(\overline{b})=\overline{c}\in p\ (\varphi)$;

в) ответвляющей над $X(p\wedge X)$, если существует такое $Z\supseteq Y$, что $|Z\setminus Y|<\omega$, и для любого $q\in O^n(Z)$ из того, что $q\leq p$, следует, что q является строго расщепляющей над X.

9. Подмножество $X\subseteq A$ назовем λ-насыщенным, если $\forall Y\subseteq X,\forall p\in O^1(Y)<\lambda\Rightarrow X\cap p\neq(\varphi)$.

10. Чистую пару (A,G) назовем λ-стабильной, если $\forall X\subseteq A(|X|\leq\lambda\Rightarrow|O^1(X)|\leq\lambda)$.

11. Пусть $O(A)\leftrightarrows\bigcup\left\{\bigcup_{n<\omega}O^n(X):X\subseteq A,|X|<|A|\right\}$.

По индукции определим ранговую функцию $L:O(A)\to Ord\cup\{\infty\}$:

а) $L(p)\geq 0$ для всех $p\in O(A)$;

б) если α — предельный ординал, то $L(p)\geq a$ тогда и только тогда, когда $L(p)\geq\beta$ для всех $\beta<\alpha$;

в) если $\alpha=\beta+1, p\in O^n(X)$, то $L(p)\geq a$ тогда и только тогда, когда $L(p)\geq\beta$ и существуют такие $Y\subseteq A,q\in O^n(Y)$, что $X\subseteq Y,q\subseteq p,L(q)\geq\beta$ и $q\wedge X$;

г) $L(p)=a\Leftrightarrow L(p)\geq a\vee L(p)\neg\geq a+1$;

д) $L(p)=\infty\Leftrightarrow L(p)\geq a$ для всех ординалов α.

12. Если $\overline{a},\overline{b}\in A^n$, то $\vec{v}(\overline{a},X)=\vec{v}(\overline{b},X)$ означает, что существуют такие $Y,p\in O^n(Y)$, что $X\subseteq Y,Y\,\omega\,X\subseteq Y$-насыщен $p\wedge X$, $\overline{a},\overline{b}\in p$.

13. $V^n(X)\leftrightarrows\left\{\vec{v}(\overline{a},X);\overline{a}\in A^n\right\},V(X)=\bigcup_{n<\omega}V^n(X)$.

Если $p\in O^n(X)$, то $V_p\left\{\vec{v}(\overline{a},X):\overline{a}\in p\right\}$.

14. Если $X\subseteq Y$, $\vec{\omega}\in V^n(X),\vec{u}\in V^n(Y)$, то

$$\vec{\omega}<\vec{u}\leftrightarrows\forall\overline{a},\overline{b}\in A^n(\vec{\omega}=\vec{v}(a,X)\vee\vec{u}=\vec{v}(\overline{b},Y)\Rightarrow\vec{v}(\overline{a},X)=\vec{v}(\overline{b},X)\wedge G_Y(\overline{b})\wedge X).$$

15. Последовательность $\left\langle \overline{a}_i : i<a\right\rangle$ назовем последовательностью Морли над X, порожденной $\overline{u}$ из $V^n(X)$, если $\vec{u}<\vec{v}\left(\overline{a_i},X\cup\bigcup_{j<i}\overline{a_j}\right)$ для всех $i<a$.

16. Назовем $\vec{u},\vec{\omega} \in V(X)$ почти ортогональными (обозначим $\vec{u} \perp^a \vec{\omega}$), если $\forall \overline{a},\overline{b} \in A(\vec{u} = \vec{v}(\overline{a}, X) \wedge \vec{\omega} = \vec{v}(\overline{b}, X) \Rightarrow G_{X \cup \bar{b}}(\overline{a}) \curlywedge X$.

17. Назовем $p, q \in O(X)$ почти ортогональными (обозначим $p \perp^a q$), если $\vec{u} \perp^a \vec{\omega}$ для всех $\vec{u} \in V_p, \vec{\omega} \in V_q$.

18. Назовем $\vec{u} \in V(X), \vec{\omega} \in V(Y)$ ортогональными (обозначим $\vec{u} \perp^a \vec{\omega}$), если $\forall Z \forall \vec{u}, \overline{\omega_1} \in V(Z)$ $(X \cup Y \subseteq Z \wedge \vec{u} < \overrightarrow{u_1} \wedge \overline{\omega} < \overline{\omega_1} \Rightarrow \overrightarrow{u_1} \perp^a \overline{\omega_1})$.

19. Назовем $p \in O(X)$, $q \in O(Y)$ ортогональными (обозначим $p \perp q$), если $q \subseteq V_p \forall \vec{\omega} \in V_q (\vec{u} \perp \vec{\omega})$.

20. Назовем $p \in O(X)$ регулярным, если

$$\forall Y \forall q \in O(Y)(X \in Y \wedge q \subseteq p \wedge q \curlywedge X \Rightarrow p \perp q).$$

Все введенные таким образом понятия, связанные с НФР типов йонсоновской теории, естественным образом дают йонсоновские аналоги теорем для полных теорий.

В первую очередь нам интересны описания моделей центральных типов йонсоновских алгебр относительно стабильностной тематики.

Пусть задан произвольный язык L. Пусть T — йонсоновская совершенная теория, полная для экзистенциальных предложений в языке L, и ее семантическая модель есть C.

Мы говорим, что множество X Σ-определимо, если оно определимо некоторой экзистенциальной формулой.

а) Множество X называется йонсоновским в теории T, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

– X есть Σ-определимое подмножество C;

– $dcl(X)$ есть носитель некоторой экзистенциально-замкнутой подмодели C.

б) Множество X называется алгебраически йонсоновским в теории T, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

– X есть Σ-определимое подмножество C;

– $acl(X)$ есть носитель некоторой экзистенциально-замкнутой подмодели C.

С помощью введенных определений йонсоновских множеств мы сможем перенести много свойств для йонсоновских теорий на произвольные подмножества семантической модели.

Будем говорить, что два йонсоновских множества (эквивалентны, косемантичны, категоричны), если соответственно будут (йонсоновски эквивалентными, косемантичными, категоричными, синтаксически подобными, семантически подобными и т.д.) моделями, которые получаются при соответствующем замыкании этих множеств.

Рассмотрим, например, косемантичность. Два йонсоновских множества косемантичны, если косемантичны их соотвествующие замыкания, и т.д.

Самым инвариантным понятием является синтаксическое подобие теорий, так как оно сохраняет все свойства рассматриваемых теорий.

Для случая йонсоновских множеств мы определим синтаксическое подобие следующим образом: два (алгебраических) йонсоновских множества синтаксически подобны между собой, если синтаксически подобны будут элементарные теории их соответствующих замыканий.

Если $\forall\exists$-следствия этих элементарных теорий будут давать йонсоновские теории, то в этом случае мы сможем рассмотреть их йонсоновское синтаксическое подобие, т.е. в силу инвариантности семантической модели наше определение корректно.

И в заключение сделаем далеко идущее предложение.

В рамках данных нововведенных определений мы ставим задачу — рассмотреть и попытаться описать сильно минимальные йонсоновские множества. Это в свою очередь повлечет за собой целый ряд новых постановок задач, например, уточнение теоремы Лахлана-Болдуина в рамках данной нововведенной тематики.

Список литературы

1 *Ешкеев А.Р.* Йонсоновские теории: Учеб. пособие. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2009. — 250 с.
2 *Бускаран Э.* Теория моделей и алгебраическая геометрия. МЦНМО, 2008.
3 *Мустафин Т.Г., Нурмагамбетов Т.А.* Введение в прикладную теорию моделей. — Караганда: Изд-во КарГУ, 1987.

А.Р.Ешкеев

Йонсондық жиындар және олардың әр түрлі теориялық-модельдік қасиеттері

Мақалада жүргізілген зерттеулер индуктивті теорияның ішкі класы болатын, жалпы айтканда, толық емес кластар теориясының теориялық-модельдік қасиеттерін сипаттаумен байланысты. Бұл теориялар алгебра мен модельдер теориясында қарастырылған. Мұндай теориялар йонсондық деп аталады. Осы теорияларды зерттеу үшін жаңа әдіс-тәсілдер енгізілген. Йонсондық теорияның семантикалық модельдер жиынында айрықша жиындар қарастырылды, олар, біріншіден, кейбір экзистенциалдық формулалардың жүзеге асуы болып табылады, екіншіден, жиындардың тұйықталуы бізге семантикалық модельдің экзистенциалдық тұйықталуының модель ішілік негізгі жиынын берді. Сонымен қатар орталық орбиталдық түрлерді зерттейтін техника дамиды.

A.R.Eshkeev

Jonsson’s multitudes and some their theoretic and model properties

The studies carried out in this field are connected with the description of theoretic-and-model properties of some, generally speaking, incomplete classes of theories that make a subclass of inductive theories. These theories are well studied both in algebra and in the theory of models. They are called Jonsson’s theories. To study these theories there is introduced a new research approach, namely: on the submultitudes of a semantic model of Jonsson’s theory there are separated special multitudes that are, firstly, realizations of some existential formula, secondly, the closing of these multitudes gives us the basic multitude of some existentially closed submodel of the semantic model. Besides, there is developed a technique of studying the central orbital types.

References

1 Eshkeev A.R. *Jonsson teory: Tutorial*, Karaganda, Publ. KSU, 2009, 250 p.
2 Buskaran E. *Model theory and algebraic geometry*, MCNMO, 2008.
3 Mustafin T.G., Nurmagambetov T.A. *Introduction to applied theory models*, Karaganda: Publ. KSU, 1987.