

## Информационно-энтропийный анализ сложных иерархических систем

### Informational entropic analysis of complex hierarchical systems

Кажикенова С.Ш., Гладкова М.В.

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: vfdz@inbox.ru)

Детерминантты және стохастикалық құрамдастардың үзіліссіз байланысы орнатылған, олардың біріншісі доминантты және тұрақтылықты қамтамасыздандырады, ал екіншісі иерархиялық жүйелердің қолайлы ақпараттық сыйымдылығын және кішігірім өзгерулерді анықтайды. Жетілгендіктің қолайлы шамасын және кез келген өзін-өзі толық ұйымдастыру процестерінің толықтығын ұсынылатын жол анықтайды да, экологиялық, экономикалық, жылутехникалық, кинетикалық және термодинамикалық талдауының белгілі әдістеріне қосымша болып келеді. Белгілі бір ара қатынаста жаңа жолды энтропиялық талдауының дамуы ретінде қарастыруға болады және де онда энтропияның максимумға ұмтылысы ескеріледі. Бұл ұмтылыс бізбен ұсынылатын жолда ақпараттық құрамдаспен бірлесіп есепке алынып, энергетикалық бірліктерде емес, ақпараттық биттерде есептеледі.

An inextricable link between deterministic and stochastic components is established. Deterministic components are dominant and provides stability, while stochastic components detect the most subtle changes and optimal informational capacity of hierarchical systems. Proposed approach to determining an objective measure of perfection and completeness of the process of self-organization of any process is in addition to the known methods of thermodynamic, kinetic, heat, economic and environmental analysis. In some respects the new approach may be considered as entropic analysis that takes into account only the desire of the entropy to the maximum. In our approach, this desire is taken into account together with an information component, though not in energy units, but in the informational bits.

Определение количества информации, по Шеннону, требует с самого начала привлечения теоретико-вероятностного подхода, в отличие от построения меры Хартли [1], где возможно ограничиться лишь понятиями комбинаторики. Это связано с тем, что исторически шенноновская теория информации выросла из потребностей теории связи, в которой приходится иметь дело со статистическими параметрами как передаваемых сообщений, так и каналов, по которым они передаются.

Таким образом, исходная постановка задачи определения количества информации теперь будет выглядеть следующим образом.

Пусть существует некоторое конечное множество событий  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ , которое может наступать с вероятностями  $p_1, p_2, \dots, p_N$  соответственно, причем множество вероятностей удовлетворяет естественному условию нормировки

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1. \quad (1)$$

Исходное множество событий можно характеризовать присущей ему степенью неопределенности, или энтропией. В этом случае мощность исходного множества уже не будет единственным фактором, определяющим энтропию. Таким образом, степень неопределенности множества событий должна зависеть не только от их числа, но и от вероятностей, с которыми они наступают.

Прежде чем перейти к строгому обоснованию определения шенноновской энтропии, построим ее, воспользовавшись следующим приемом.

Пусть события исходного множества равновероятны:  $p_1 = p_2 = \dots = p_N$ . Ясно, что для  $i = 1, 2, \dots, N$

$$p_i = \frac{1}{N}. \quad (2)$$

Энтропию исходного множества, по Хартли [2],  $H(X) = \log_2 N$  можно переписать в виде суммы  $N$  слагаемых

$$H(X) = -\frac{1}{N} \log_2 \frac{1}{N} - \frac{1}{N} \log_2 \frac{1}{N} - \dots - \frac{1}{N} \log_2 \frac{1}{N}.$$

С учетом (2)

$$H(X) = -p_1 \log_2 p_1 - p_2 \log_2 p_2 - \dots - p_N \log_2 p_N. \quad (3)$$

Предположим, что в случае множества, состоящего из неравновероятных событий, формула энтропии не изменится по сравнению с (3), тогда ее окончательно можно записать в виде

$$H(X) = -\sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i. \quad (4)$$

Пусть какое-либо событие множества  $X$  реализуется, т.е. становится достоверным и приобретает, следовательно, вероятность  $p = 1$ . Согласно (4) энтропия множества, состоящего из единственного достоверного события, есть

$$H(X) = -p \log_2 p = 0.$$

Если аналогично тому, как это делалось при построении хартливой меры информации, измерять количество информации, сообщаемое при наступлении определенного события из множества  $X$ , изменением степени неопределенности, которая уменьшается до нуля, то шенноновское количество информации также численно совпадает с энтропией исходного множества

$$I(X) = -\sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i. \quad (5)$$

Как и в случае меры Хартли [1], в основу строгого вывода (4) необходимо положить определенную систему условий, которым должна удовлетворять мера Шеннона. Остановимся на системе условий, предложенной Шенноном [3, 4], так как эта система наиболее наглядна и естественна в восприятии.

Для энтропии множества  $X$ , содержащего  $N$  событий, будем пользоваться обозначением  $H(p_1, p_2, \dots, p_N)$ .

Функция  $H(p_1, p_2, \dots, p_N)$  должна быть непрерывной относительно всех своих аргументов  $p_i (i=1, 2, \dots, N)$ . Этим обеспечивается отсутствие резких, скачкообразных изменений энтропии при малых изменениях вероятностей.

Если все  $N$  события множества  $X$  равновероятны, то функция  $H(p_1, p_2, \dots, p_N)$ , где  $p_1 = p_2 = \dots = p_N = 1/N$ , должна монотонно возрастать с ростом  $N$ . Это условие совпадает с одним из требований, предъявляемых к мере Хартли. Таким образом, степень неопределенности множества, состоящего лишь из равновероятных событий, может зависеть только от мощности множества, с ростом которой степень неопределенности, как и в случае меры Хартли [1], должна монотонно возрастать.

Значение функции  $H(p_1, p_2, \dots, p_N)$  не должно зависеть от порядка расстановки аргументов  $p_1, p_2, \dots, p_N$ . Энтропия множества  $X$  не изменяется при перестановке аргументов функции  $H(p_1, p_2, \dots, p_N)$ , так как энтропия должна определяться лишь мощностью множества  $X$  и значениями вероятностей, с которыми наступают составляющие его события.

Прежде чем сформулировать последнее четвертое условие, приведем некоторые предварительные соображения. Воспользуемся примером, который в свое время рассмотрел Шеннон. Пусть имеется множество из трех событий  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ , которые наступают с вероятностью соответственно  $p_1 = 1/6$ ,  $p_2 = 1/3$ ,  $p_3 = 1/2$ . Возможные пути реализации событий множества удобно представить в виде «дерева выборов», показанного на рисунке 1. Энтропия множества  $X$  определяется значением функции  $H(1/6, 1/3, 1/2)$ .

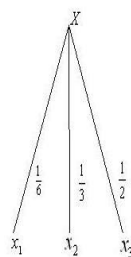


Рис. 1

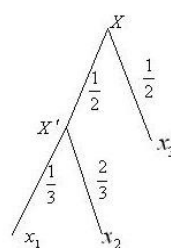


Рис. 2

Разобьем множество  $X$  на два подмножества. Первое подмножество пусть состоит из событий  $x_1, x_2$ , обозначим его  $X'$ . Второе подмножество составит единственное событие  $x_3$ . Такому разбиению исходного множества соответствует «дерево выборов», изображенное на рисунке 2. Вероятность наступления нового события  $X'$  есть

$$p(X') = p_1 + p_2 = 1/2. \quad (6)$$

Числа, которыми помечены ветви дерева, ведущие из узла  $X'$  в узлы  $x_1$  и  $x_2$ , суть условные вероятности  $p(x_1 | X')$  и  $p(x_2 | X')$ . Нетрудно заметить, что в случае второго «дерева выборов» окончательные результаты для вероятностей наступления событий  $x_1, x_2, x_3$  не изменились. Они определяются значениями: для события  $x_1$ :  $p_1 = p(X')p(x_1 | X') = (1/2)(1/3) = 1/6$ , для события  $x_2$ :  $p_2 = p(X')p(x_2 | X') = (1/2)(2/3) = 1/3$ , для события  $x_3$ :  $p_3 = 1/2$ .

Предположим, что в этих условиях энтропии исходного множества и множества «с разбиением» одинаковы. Определим энтропию последнего из них. Степень неопределенности множества  $\{X', x_3\}$  задается значением

$$H[p(X'), p_3] = H(1/2, 1/2).$$

Однако в случае реализации события  $X'$  неопределенность полностью не снимается — в соответствии с «деревом выборов» может наступить событие  $x_1$  либо событие  $x_2$ . Степень неопределенности множества  $X'$  определяется как

$$H(X') = H[p(x_1 | X'), p(x_2 | X')] = H(1/3, 2/3).$$

Но так как  $X'$  реализуется с вероятностью  $p_1 + p_2$ , т.е. лишь в половине всех случаев, для нахождения энтропии множества «с разбиением» необходимо к степени неопределенности множества  $\{X', x_3\}$  добавить степень неопределенности множества  $X'$ , умноженную на весовой коэффициент  $p_1 + p_2 = 1/2$ . Таким образом, с учетом замечания о равенстве энтропий исходного множества и множества «с разбиением» можно записать

$$H(1/6; 1/3; 1/2) = H(1/2, 1/2) + (1/2)H(1/3, 2/3)$$

или

$$H(p_1, p_2, p_3) = H[p(X'), p_3] + (p_1 + p_2)H[p(x_1 | X'), p(x_2 | X')].$$

Преобразуем это равенство так, чтобы в него входили только значения вероятностей, определенные для элементов исходного множества  $X$ . Условные вероятности события  $x_1, x_2$  можно представить соответственно как

$$p(x_1 | X') = p_1 / [p(X)]; p(x_2 | X') = p_2 / [p(X)],$$

или, с учетом (6),

$$p(x_1 | X') = p_1 / (p_1 + p_2); p(x_2 | X') = p_2 / (p_1 + p_2).$$

Тогда условие равенства энтропий окончательно запишется в виде

$$H(p_1, p_2, p_3) = H(p_1 + p_2, p_3) + (p_1 + p_2)H(p_1 / (p_1 + p_2), p_2 / (p_1 + p_2)).$$

В данном примере исходное множество содержало три события. Видно, что аналогичные рассуждения можно провести применительно к множеству  $X$  из  $N$  элементов, если разбить его на подмножества  $X' = \{x_1, x_2\}$  и  $x_3, \dots, x_N$ . Результат этих рассуждений сформулируем в виде условия 4.

Если в результате разбиения исходного множества на подмножества реализация событий производится в два последовательных этапа, то первоначальная энтропия должна быть взвешенной суммой индивидуальных энтропий этапов:

$$H(p_1, p_2, \dots, p_N) = H(p_1 + p_2, p_3, \dots, p_N) + (p_1 + p_2)H(p_1 / (p_1 + p_2), p_2 / (p_1 + p_2)). \quad (7)$$

Теперь перейдем к доказательству того, что существует единственная функция, удовлетворяющая четырем перечисленным условиям, причем эта функция имеет вид (4).

Доказательство, следуя Шеннону [4], начнем с обобщения равенства (7), содержащегося в условии (4). Покажем, что

$$H(p_1, \dots, p_N) = H(p_1 + \dots + p_i, p_{i+1}, \dots, p_N) + (p_1 + \dots + p_i)H(p_1 / (p_1 + \dots + p_i), p_2 / (p_1 + \dots + p_i), \dots, p_i / (p_1 + \dots + p_i)). \quad (8)$$

Для этого воспользуемся принципом математической индукции. При  $i = 2$  (8) сводится к (7), т.е. выполняется. Допустим, что для некоторого  $i$  (8) справедливо. Докажем, что это равенство выполняется для  $i + 1$ .

Разобьем множество событий  $X$  на подмножества таким образом, что в первое подмножество войдут события  $x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}$ . Тогда из условия 4 имеем

$$H\left(\sum_{k=1}^i p_k, p_{i+1}, \dots, p_N\right) = H\left(\sum_{k=1}^{i+1} p_k, p_{i+2}, \dots, p_N\right) + \left(\sum_{k=1}^{i+1} p_k\right) H\left(\sum_{k=1}^i p_k / \sum_{k=1}^{i+1} p_k, p_{i+1} / \sum_{k=1}^{i+1} p_k\right). \quad (9)$$

Кроме того, используя предположение о справедливости (8) для  $i$ , запишем

$$H\left(\frac{p_1}{\sum_{k=1}^{i+1} p_k}, \dots, \frac{p_i}{\sum_{k=1}^{i+1} p_k}, \frac{p_{i+1}}{\sum_{k=1}^{i+1} p_k}\right) = H\left(\frac{\sum_{k=1}^i p_k}{\sum_{k=1}^{i+1} p_k}, \frac{p_{i+1}}{\sum_{k=1}^{i+1} p_k}\right) + \left(\frac{\sum_{k=1}^i p_k}{\sum_{k=1}^{i+1} p_k}\right) H\left(\frac{p_1}{\sum_{k=1}^i p_k}, \dots, \frac{p_i}{\sum_{k=1}^i p_k}\right).$$

После умножения левой и правой частей последнего равенства на  $\sum_{k=1}^{i+1} p_k$  получим

$$\left(\sum_{k=1}^{i+1} p_k\right) H\left(\frac{p_1}{\sum_{k=1}^{i+1} p_k}, \dots, \frac{p_i}{\sum_{k=1}^{i+1} p_k}, \frac{p_{i+1}}{\sum_{k=1}^{i+1} p_k}\right) = \left(\sum_{k=1}^{i+1} p_k\right) H\left(\frac{\sum_{k=1}^i p_k}{\sum_{k=1}^{i+1} p_k}, \frac{p_{i+1}}{\sum_{k=1}^{i+1} p_k}\right) + \left(\sum_{k=1}^i p_k\right) H\left(\frac{p_1}{\sum_{k=1}^i p_k}, \dots, \frac{p_i}{\sum_{k=1}^i p_k}\right). \quad (10)$$

Перепишем формулу для  $H(p_1, \dots, p_N)$ , заменив первое слагаемое первой части (8) правой частью (9):

$$H(p_1, \dots, p_N) = \left[ H\left(\sum_{k=1}^{i+1} p_k, p_{i+2}, \dots, p_N\right) + \left(\sum_{k=1}^{i+1} p_k\right) H\left(\frac{\sum_{k=1}^i p_k}{\sum_{k=1}^{i+1} p_k}, \frac{p_{i+1}}{\sum_{k=1}^{i+1} p_k}\right) \right] + \left(\sum_{k=1}^i p_k\right) H\left(\frac{p_1}{\sum_{k=1}^i p_k}, \dots, \frac{p_i}{\sum_{k=1}^i p_k}\right).$$

С учетом (10) получаем

$$H(p_1, \dots, p_N) = H(p_1 + \dots + p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_N) + (p_1 + \dots + p_{i+1}) H(p_1 / (p_1 + \dots + p_{i+1}), \dots, p_{i+1} / (p_1 + \dots + p_{i+1})),$$

что доказывает справедливость (8) для значения  $i + 1$ , а следовательно, для любого  $i$ .

Согласно условию 3 значение функции  $H(p_1, \dots, p_N)$  не должно зависеть от порядка расстановки ее аргументов, что позволяет следующим образом преобразовать (8):

$$H(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \dots, p_{j-1}, p_j, p_{j+1}, \dots, p_N) = H(p_1 + \dots + p_{i-1}, \sum_{k=1}^j p_k, p_{j+1}, \dots, p_N) + \sum_{k=1}^j p_k H(p_i / \sum_{k=1}^j (p_k + \dots + p_j) / \sum_{k=1}^j p_k).$$

Здесь при реализации событий в два этапа из исходного множества выделяется подмножество элементов  $\{x_i, \dots, x_j\}$  ( $1 \leq i < j \leq N$ ). Последнее равенство можно обобщить на тот случай, когда исходное множество разбивается на подмножества событий  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_1}\}, \{x_{i_2}, \dots, x_{i_2}\}, \dots, \{x_{i_l}, \dots, x_{i_l}\}$  ( $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq N$ ).

Равенство примет вид

$$H(p_1, \dots, p_{i_1}, p_{i_1+1}, \dots, p_{i_2}, \dots, p_{i_2+1}, \dots, p_N) = H\left(\sum_{k=1}^{i_1} p_k, \sum_{k=i_1+1}^{i_2} p_k, \dots, \sum_{k=i_l+1}^N p_k\right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \sum_{k=1}^{i_1} p_k \right) H(p_1 / \sum_{k=1}^{i_1} p_k, \dots, p_{i_1} / \sum_{k=1}^{i_1} p_k) + \left( \sum_{k=i_1+1}^{i_2} p_k \right) H(p_{i_1+1} / \sum_{k=i_1+1}^{i_2} p_k, \dots, p_{i_2} / \sum_{k=i_1+1}^{i_2} p_k) + \\
 & \dots + \left( \sum_{k=i_{l-1}+1}^N p_k \right) H(p_{i_{l-1}+1} / \sum_{k=i_{l-1}+1}^N p_k, \dots, p_N / \sum_{k=i_{l-1}+1}^N p_k). \tag{11}
 \end{aligned}$$

Равенство (11) представляет собой общую форму условия 4.

Обозначим  $H(1/N, 1/N, \dots, 1/N) = h(N)$ . Это означает, что энтропию множества, содержащего лишь равновероятные события, можно рассматривать как функцию одного переменного. Допустим также, что  $N = mn$ , где  $m$  и  $n$  — целые числа, и что подмножества событий  $\{x_1, \dots, x_{i_1}\}, \{x_{i_1+1}, \dots, x_{i_2}\}, \dots, \{x_{i_{l-1}+1}, \dots, x_N\}$ , вероятности наступления которых входят в равенство (11), имеют одинаковую мощность  $m$ . Таких подмножеств будет  $n$ , причем для их вероятностей будут выполняться равенства

$$\sum_{k=1}^{i_1} p_k = \sum_{k=i_1+1}^{i_2} p_k = \dots = \sum_{k=i_{l-1}+1}^N p_k = m \frac{1}{N} = m \frac{1}{mn} = \frac{1}{n}. \tag{12}$$

Каждый из аргументов функций  $H$ , входящих в правую часть (11), начиная со второго слагаемого, с учетом (12) и того, что каждая вероятность  $p_i$  равна  $\frac{1}{mn}$ , можно записать в виде

$$\frac{p_i}{\sum_{k=1}^m p_k} = \left( \frac{1}{mn} \right) / \left( \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{m}.$$

Таким образом, левую часть (11) можно представить как  $h(mn)$ , первое слагаемое правой части — как  $h(n)$ , каждое слагаемое правой части, начиная со второго, — как  $h(m)/n$ , причем этих слагаемых, как и подмножеств событий, имеется  $n$ . Следовательно, при рассматриваемом разбиении исходного множества на равномошные группы событий равенство (11) приводится к виду

$$h(mn) = h(n) + n(1/n)h(m),$$

или

$$h(mn) = h(n) + h(m). \tag{13}$$

Покажем, что для функции  $h$  справедливо равенство

$$h(s^q) = qh(s), \tag{14}$$

где  $s$  и  $q$  — целые числа. Для этого снова воспользуемся методом математической индукции. При  $q = 2$  (14) выполняется:  $h(s^2) = h(ss) = h(s) + h(s) = 2h(s)$ , что непосредственно следует из (13). Допустим выполнение (14) для некоторого значения  $q$ . С учетом (13)  $h(s^{q+1}) = h(s^q s) = h(s^q) + h(s) = qh(s) + h(s) = (q+1)h(s)$ , т.е. (14) выполняется для значения  $q+1$ , а значит, и для любого  $q$ .

Перепишем (14) для новых аргументов:  $h(t^r) = rh(t)$ . Будем считать, что здесь  $t$  и  $r$  — также целые числа, причем  $q$  в (14) выберем таким, чтобы оно удовлетворяло условию

$$s^q \leq t^r \leq s^{q+1}. \tag{15}$$

Прологарифмируем последнее неравенство:  $q \ln s \leq r \ln t \leq (q+1) \ln s$  и разделим на  $r \ln s$ , что дает

$$q/r \leq \ln t / \ln s \leq (q+1)/r. \tag{16}$$

Согласно условию 2, требующему монотонности функции  $h$ , и с учетом (15) получим  $h(s^q) \leq h(t^r) \leq h(s^{q+1})$ , или, в силу (14),  $qh(s) \leq rh(t) \leq (q+1)h(s)$ . После деления на  $rh(s)$  получаем

$$q/r \leq h(t) / h(s) \leq (q+1)/r. \tag{17}$$

Из (16) и (17) видно, что величины  $\ln t / \ln s$  и  $h(t) / h(s)$  одинаково ограничены сверху и снизу. При достаточно большом  $r$  эти отношения будут близки по значению, а так как ничто не мешает взять  $r$  произвольно большим, можно сделать вывод о том, что

$$h(t) / h(s) = \ln t / \ln s. \tag{18}$$

Зафиксируем, например, значение  $s$  и обозначим  $K = h(s) / \ln s$ . Тогда формула (18) примет вид

$$h(t) = K \ln t. \quad (19)$$

Так как логарифм — возрастающая функция, а функция  $h$ , согласно условию 2, должна быть возрастающей, можно прийти к выводу о положительности коэффициента  $K$ .

Теперь откажемся от сделанного ранее допущения о равновероятности событий множества  $X$ , а именно предположим, что вероятности  $p_1, p_2, \dots, p_N$  — это дроби вида

$$p_1 = n_1 / n, \quad p_2 = n_2 / n, \dots, \quad p_N = n_N / n, \quad (20)$$

где  $n_1, n_2, \dots, n_N$  — целые числа. Если принять  $n = \sum_{i=1}^N n_i$ , то окажется что  $p_i < 1 (i = 1, 2, \dots, N)$ ;  $p_i$  — рациональные числа. И для вероятностей выполняется необходимое условие нормировки (1), так как

$$\sum_{i=1}^N p_i = \sum_{i=1}^N n_i / n = 1.$$

Рассмотрим новое множество, состоящее из  $n$  равновероятных событий. Вероятность наступления любого события этого множества есть  $\frac{1}{n}$ , а его энтропия

$$h(n) = H(1/n, 1/n, \dots, 1/n). \quad (21)$$

Произведем разбиение множества из  $n$  элементов на  $N$  подмножества, содержащие соответственно  $n_1, n_2, \dots, n_N$  элементы. Тогда согласно равенству (11)

$$\begin{aligned} H\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) &= H\left(\underbrace{\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_{n_1}, \underbrace{\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_{n_2}, \dots, \underbrace{\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_{n_N}\right) = \\ &= H\left(\underbrace{\frac{n_1}{n}, \dots, \frac{n_2}{n}, \dots, \frac{n_N}{n}}_{n_1}, \dots, \frac{1}{n}\right) + \frac{n_1}{n} H\left(\frac{1/n, \dots, 1/n}{n_1/n}, \dots, \frac{1/n}{n_1/n}\right) + \frac{n_2}{n} H\left(\frac{1/n, \dots, 1/n}{n_2/n}, \dots, \frac{1/n}{n_2/n}\right) + \\ &+ \dots + \frac{n_N}{n} H\left(\frac{1/n, \dots, 1/n}{n_N/n}, \dots, \frac{1/n}{n_N/n}\right) = H\left(\frac{n_1}{n}, \dots, \frac{n_2}{n}, \dots, \frac{n_N}{n}\right) + \frac{n_1}{n} H\left(\frac{1}{n_1}, \dots, \frac{1}{n_1}\right) + \frac{n_2}{n} H\left(\frac{1}{n_2}, \dots, \frac{1}{n_2}\right) + \\ &+ \dots + \frac{n_N}{n} H\left(\frac{1}{n_N}, \dots, \frac{1}{n_N}\right). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (20) и (21) получим

$$h(n) = H(p_1, p_2, \dots, p_N) + p_1 h(n_1) + p_2 h(n_2) + \dots + p_N h(n_N);$$

$$H(p_1, p_2, \dots, p_N) = h(n) - p_1 h(n_1) - p_2 h(n_2) - \dots - p_N h(n_N).$$

Используя условие нормировки (1), заменим множитель 1 перед первым слагаемым правой части последнего равенства на сумму вероятностей

$$H(p_1, p_2, \dots, p_N) = \left(\sum_{i=1}^N p_i\right) h(n) - \sum_{i=1}^N p_i h(n_i).$$

Перегруппировка слагаемых правой части дает

$$H(p_1, p_2, \dots, p_N) = \sum_{i=1}^N p_i [h(n) - h(n_i)].$$

Согласно (18) и (20)

$$h(n) - h(n_i) = K \ln n - K \ln n_i = -K \ln \left(\frac{n_i}{n}\right) = -K \ln p_i;$$

$$H(p_1, p_2, \dots, p_N) = -K \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i. \quad (22)$$

Ранее было принято допущение о том, что  $p_i (i=1, 2, \dots, N)$  — рациональные дроби. Однако условие 1, требующее непрерывности функции  $H(p_1, p_2, \dots, p_N)$  относительно своих аргументов, позволяет обобщить (22) и на случай иррациональных значений вероятностей. Это означает, что (22) справедливо для произвольных дробей  $p_1, p_2, \dots, p_N$ . На этом вывод формулы (4) завершен, хотя она и отличается от (22) отсутствием коэффициента  $K$  и основанием логарифмов. Так же, как и в случае меры Хартли, выбор коэффициента определяет единицу энтропии. Если принять  $K = 1/\ln 2$ , то (22) полностью сведется к (4), а единицей энтропии и количества информации будет по-прежнему служить бит. Действительно, если множество  $X$  состоит из двух равновероятных событий  $\{x_1, x_2\}$ ,  $p_1 = p_2 = 1/2$ , то из (4) имеем

$$H(X) = -\left(\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2}\right) = 1 \text{ бит.}$$

В случае множества, содержащего  $N$  равновероятных событий, (4) тривиально сводится к формуле энтропии, определяемой по Хартли, что видно из выкладок, предшествующих (4), и полностью согласуется с «физическим» смыслом второго условия, которому удовлетворяет мера Шеннона.

#### References

1. *Kazhikenova C.Sh., Gladkova M.V.* Informational appraisal of complex technological systems on the base of Hartly // Proceedings of Republican Scientific-Practical Conference «Problems of Natural Sciences, Mathematical and Physical Sciences, Ecology and Information Technology». — Vol. 1. — Atyrau, 21–22 may, 2010.
2. *Hartley R.V.L.* Transmission of Information // Bell System Technical Journal. — 1928. — P. 5–35.
3. *Shannon C.E.* A Mathematical Theory of Communication // Bell System Technical Journal. — 1948. — P. 243–332.
4. *Shannon C.E.* Paper on theory of information and cybernetics: Translated from English/Ed. Dobrushina R.L., Lupanova O.V. — М., 1963. — 829 p.