УДК 517.95

Г.Е.Берикханова

Семипалатинский государственный педагогический институт, Семей

# КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПРОКОЛОТОЙ ОБЛАСТИ

*Мақалада дөңгелектегі бигармониялық теңдеу үшін Дирихле есебіндегі Грин функциясының барлық мүмкін қасиеттері көрсетілген. Сонан соң $\Omega_0$ ойық облыстағы біртектес емес бигармониялық теңдеу үшін шекаралық есептің шешімі қарастырылған.*

*In this work show all properties Green's function of biharmonic equation for Dirichlet problems in the circle. Then show able solution boundary value problems for non-homogenous biharmonic equation on punctured area $\Omega_0$.*

## *1. Введение*

При моделировании колебаний пластин и оболочек с учетом точечных связей возникают операторы вида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\delta_i\,,$$

так как тонкостенные трубы и панели в реальных условиях, как правило, опираются на точечные жесткие и упругие, шарнирные и защемленные опоры, имеют точечно присоединенные массы [1]. Поскольку $\delta_i$ — дельта-функции Дирака имеют точечные носители, то речь идет о точечных взаимодействиях. В 1961 г. Березин и Фаддеев [2] дали математическое толкование точечных взаимодействии в рамках теории расширений абстрактных операторов.

## *2. Вспомогательные утверждения и доказательство теорем*

В дальнейшем нам понадобится известное утверждение.

**Теорема 1.** *Решение задачи Дирихле для бигармонического уравнения в круге* $\Delta^2W(x,y)=f(x,y),\ \ x^2+y^2<r^2$ *задается формулой*

$$W(x,y)=\iint\limits_{\xi^2+\eta^2<r^2}G(x,y,\xi,\eta)\,f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta,$$

*с граничными условиями*

$$W\big|_{x^2+y^2=r^2}=0,\qquad \frac{\partial W}{\partial\bar{n}}\bigg|_{x^2+y^2=r^2}=0,$$

*где* $\dfrac{\partial}{\partial\bar{n}}$ *— производная по внешней нормали на границе,*

$$G(x,y,\xi,\eta)=d\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)\ln\left((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right)-$$

$$-d\frac{\xi^2+\eta^2}{r^2}\left(\left(x-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}r^2\right)^2+\left(y-\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}r^2\right)^2\right)\times\ln\left[\frac{\xi^2+\eta^2}{r^2}\left(\left(x-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}r^2\right)^2+\left(y-\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}r^2\right)^2\right)\right]+$$

$$+dr^2\left(1-\frac{x^2+y^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{\xi^2+\eta^2}{r^2}\right)\times\ln\left[\frac{\xi^2+\eta^2}{r^2}\left(\left(x-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}r^2\right)^2+\left(y-\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}r^2\right)^2\right)\right]+$$

$$+dr^2\left(1-\frac{x^2+y^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{\xi^2+\eta^2}{r^2}\right)$$

$d$ *— некоторая константа.*

Эта теорема утверждает, что функция Грина для круглой пластины с защемленным краем выписывается в явном виде. Заметим также, что функция влияния $G(x,y,\xi,\eta)$ принимает только неотрицательные значения при любых $(x,y)$ и $(\xi,\eta)$, поскольку задаче Дирихле для бигармонического уравнения соответствует положительно определенный оператор. Подобная задача была рассмотрена в работе Б.Е.Кангужина [3].

Пусть $h(x,y)$ — произвольная, четыре раза дифференцируемая в круге $\Omega$ функция. Введем новую функцию по формуле

$$I(x,y)=\iint\limits_{\Omega} G(x,y,\xi,\eta)\Delta^2_{\xi,\eta}h(\xi,\eta)\,d\xi d\eta,$$

где $\Delta_{\xi,\eta}=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$ — оператор Лапласа по переменным $\xi,\eta$.

Ясно, что функция $I(x,y)$ обладает свойствами:

$$\Delta^2_{x,y}I(x,y)=\Delta^2_{x,y}h(x,y),\qquad (x,y)\in\Omega; \tag{2}$$

$$I(x,y)\big|_{\partial\Omega}=0; \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial I(x,y)}{\partial\bar{n}}\right|_{\partial\Omega}=0. \tag{4}$$

С другой стороны, вспоминая вторую формулу Грина

$$\iint\limits_{\Omega}\Delta^2 uv\,dxdy-\iint\limits_{\Omega}u\Delta^2 v\,dxdy=\int\limits_{\partial\Omega}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\bar{n}}\Delta uv-\Delta u\frac{\partial v}{\partial\bar{n}}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial\bar{n}}u\Delta v-u\frac{\partial}{\partial\bar{n}}\Delta v\right)\right]ds,$$

функцию $I(x,y)$ можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}I(x,y)&=\iint\limits_{\Omega}G(x,y,\xi,\eta)\Delta^2_{\xi,\eta}h(\xi,\eta)\,d\xi d\eta=\iint\limits_{\Omega}h(\xi,\eta)\Delta^2_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\,d\xi d\eta+\\&+\int\limits_{\partial\Omega}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}hG(x,y,\xi,\eta)-\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}G(x,y,\xi,\eta)\right)+\right.\\&\left.+\left(\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)-h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\right)\right]ds_{\xi,\eta},\end{aligned} \tag{5}$$

где $\bar{n}_{\xi,\eta}$ — внешняя нормаль к окружности $\partial\Omega$ в точке $(\xi,\eta)$.

В силу симметрии функции Грина $G(x,y,\xi,\eta)$ относительно пар $(x,y)$ и $(\xi,\eta)$ имеем равенство

$$\Delta^2_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)=\delta_\Omega\big((x,y),(\xi,\eta)\big), \tag{6}$$

где $\delta_\Omega\big((x,y),(\xi,\eta)\big)$ — дельта-функция Дирака в области $\Omega$.

Из (5) и (6) следует равенство

$$\begin{aligned}I(x,y)=h(x,y)&+\int\limits_{\partial\Omega}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}hG(x,y,\xi,\eta)-\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}G(x,y,\xi,\eta)\right)+\right.\\&\left.+\left(\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)-h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\right)\right]ds_{\xi,\eta}.\end{aligned}$$

Поскольку $G(x,y,\xi,\eta)\big|_{(x,y)\in\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega}=0$ и $\left.\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}G(x,y,\xi,\eta)\right|_{(x,y)\in\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega}=0$, последнее равенство переписываем в виде

$$I(x,y)=h(x,y)+\int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)-h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\right]ds_{\xi,\eta}. \tag{7}$$

Удобно вести обозначение $M(x,y)=h(x,y)-I(x,y)$.

Подставим правую часть (7) в соотношение (2). В результате для любой гладкой функции $h(x,y)$ получим соотношение

$$\Delta^2_{x,y}M(x,y)=0\,. \tag{8}$$

Теперь используем граничные условия (3), (4). Подставим правую часть (7) в граничные условия (3), (4), тогда для произвольной гладкой функции $h(x,y)$ имеем граничные соотношения

$$\begin{cases} h\big|_{\partial\Omega} + M\big|_{\partial\Omega} = 0; \\ \dfrac{\partial h}{\partial \bar{n}_{x,y}}\Bigg|_{\partial\Omega} + \dfrac{\partial M}{\partial \bar{n}_{x,y}}\Bigg|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

В силу произвольности $h(x,y)$ и независимости граничных значений $\dfrac{\partial}{\partial \bar{n}_{\xi,\eta}} h(\xi,\eta)$, $h(\xi,\eta)$ при $(\xi,\eta)\in\partial\Omega$ убеждаемся в справедливости следующих свойств функции Грина:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \bar{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)\Bigg|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega} = \delta_{\partial\Omega}\big((x,y),(\xi,\eta)\big), \\ \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)\big|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{n}_{x,y}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)\Bigg|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega} = -\delta_{\partial\Omega}\big((x,y),(\xi,\eta)\big), \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{n}_{x,y}} \dfrac{\partial}{\partial \bar{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)\Bigg|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{10}$$

где $\delta_{\partial\Omega}\big((x,y),(\xi,\eta)\big)$ — дельта-функция Дирака на границе $\partial\Omega$.

По-видимому, граничные соотношения (10) для функции Грина $G(x,y,\xi,\eta)$ известны, но автор не смог найти точные координаты для ссылок. Сформулируем необходимые для дальнейшего результаты в виде отдельного утверждения.

**Теорема 2.** *Функция Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в круге обладает свойствами:*

1) $G(P,Q) = G(Q,P), \quad \forall Q,P\in\Omega,$

2) $G(P,Q) \ge 0, \quad \forall Q,P\in\Omega,$

3) $\Delta^2_{x,y} G(Q,P) = \delta_\Omega(P,Q), \quad \forall Q,P\in\Omega,$

4) $G(P,Q) = 0, \quad P\in\partial\Omega, \quad Q\in\Omega,$

5) $\dfrac{\partial}{\partial \bar{n}_p} G(P,Q) = 0, \quad P\in\partial\Omega, \quad Q\in\Omega,$

6) *при* $P,Q\in\partial\Omega$ *справедливо соотношение (10).*

Теперь образуем новую функцию:

$$W(x,y) = \iint_\Omega G(x,y,\xi,\eta) f(\xi,\eta)\, d\xi d\eta + h(x,y) - I(x,y), \tag{11}$$

где $h(x,y)$ — произвольная достаточно гладкая функция. $I(x,y)$ — определяется по формуле (7).

Рассмотрим проколотый круг $\Omega_0 = \Omega \setminus \{M_0\}$, где $M_0$ — некоторая внутренняя точка круга $\Omega$. Возьмем произвольную функцию $h(x,y)$ из пространства $W_2^4(\Omega_0)$ и введем новую функцию по формуле

$$I(x,y) = \lim_{\delta\to+0} \int_{\Omega_\delta} G(x,y,\xi,\eta) \Delta^2_{\xi,\eta} h(\xi,\eta)\, d\xi d\eta,$$

где $\Omega_\delta = \Omega \setminus \Pi_\delta(M_0)$; $\Pi_\delta(M_0) = \{(\xi,\eta):\ x_0-\delta\le\xi\le x_0+\delta,\ y_0-\delta\le\eta\le y_0+\delta\}$, $(x_0,y_0)$ — координаты точки $M_0$.

Преобразуем функцию $I(x,y)$ аналогично формулам (2)–(7), в результате будем иметь:

$$I(x,y) = h(x,y) - \int_{\partial\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{\xi,\eta}} h(\xi,\eta) \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) - h(\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \right] ds_{\xi,\eta} -$$

$$-\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{\partial\Pi_\delta(M_0)}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}hG(x,y,\xi,\eta)-\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}G(x,y,\xi,\eta)\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)-h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\right)\right]ds_{\xi,\eta} \qquad (12)$$

при $(x,y)\neq M_0$. Предполагаем также, что относительно $h(\xi,\eta)$ в окрестности точки $(x_0,y_0)$ выполнены условия:

$$\sup_{0<\delta<\delta_0}\sup_{y_0-\delta<\eta<y_0+\delta}\left\{\delta\left(\left|\frac{\partial h(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}\right|+\left|\frac{\partial h(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}\right|+\left|h(x_0+\delta,\eta)\right|+\left|h(x_0-\delta,\eta)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0+\delta,\eta)\right|+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0-\delta,\eta)\right|+\left|\Delta_{\xi,\eta}h(x_0+\delta,\eta)\right|+\left|\Delta_{\xi,\eta}h(x_0-\delta,\eta)\right|\right)\right\}\leq C; \qquad (13)$$

$$\sup_{0<\delta<\delta_0}\sup_{x_0-\delta<\xi<x_0+\delta}\left\{\delta\left(\left|\frac{\partial h(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}\right|+\left|\frac{\partial h(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}\right|+\left|h(\xi,y_0-\delta)\right|+\left|h(\xi,y_0+\delta)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0-\delta)\right|+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0+\delta)\right|+\left|\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0-\delta)\right|+\left|\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0+\delta)\right|\right)\right\}\leq C; \qquad (14)$$

и существуют пределы

$$\alpha=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0+\delta,\eta)-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0-\delta,\eta)\right]d\eta+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0-\delta)-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0+\delta)\right]d\xi\right\};$$

$$\beta=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}h(x_0-\delta,\eta)-\Delta_{\xi,\eta}h(x_0+\delta,\eta)\right]d\eta;$$

$$\gamma=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0+\delta)-\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0-\delta)\right]d\xi;$$

$$\theta=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial h(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial h(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}\right]d\eta+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial h(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}-\frac{\partial h(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}\right]d\xi\right\};$$

$$\sigma=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[h(x_0-\delta,\eta)-h(x_0+\delta,\eta)\right]d\eta;$$

$$\varsigma=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[h(\xi,y_0+\delta)-h(\xi,y_0-\delta)\right]d\xi.$$

Отсюда получим:

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{\partial\Pi_\delta(M_0)}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}hG(x,y,\xi,\eta)-\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}G(x,y,\xi,\eta)\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)-h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\right)\right]ds_{\xi,\eta}=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{G(x,y,x_0+\delta,\eta)-G(x,y,x_0,y_0)}{\delta}\cdot\delta\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0+\delta,\eta)d\eta+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{G(x,y,x_0,y_0)-G(x,y,x_0-\delta,\eta)}{\delta}\cdot\delta\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0-\delta,\eta)d\eta+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0+\delta,\eta)-\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)}{\delta}\cdot\delta\cdot\frac{\partial h(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}d\eta+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)-\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0-\delta,\eta)}{\delta}\cdot\delta\cdot\frac{\partial h(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}d\eta-$$

$$-G(x,y,x_0,y_0)\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0-\delta,\eta)-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0+\delta,\eta)\right]d\eta-$$

$$-\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial h(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial h(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}\right]d\eta+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{G(x,y,\xi,y_0-\delta)-G(x,y,x_0,y_0)}{\delta}\cdot\delta\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0-\delta)d\xi+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{G(x,y,x_0,y_0)-G(x,y,\xi,y_0+\delta)}{\delta}\cdot\delta\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0+\delta)d\xi+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,y_0-\delta)-\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)}{\delta}\cdot\delta\cdot\frac{\partial h(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}d\xi+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)-\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,y_0+\delta)}{\delta}\cdot\delta\cdot\frac{\partial h(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}d\xi-$$

$$-G(x,y,x_0,y_0)\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0+\delta)-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0-\delta)\right]d\xi-$$

$$-\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial h(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}-\frac{\partial h(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}\right]d\xi+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{\dfrac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}-\dfrac{\partial G(x,y,x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}}{\delta}\cdot\delta\cdot\Delta_{\xi,\eta}h(x_0+\delta,\eta)d\eta+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{\dfrac{\partial G(x,y,x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}-\dfrac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}}{\delta}\cdot\delta\cdot\Delta_{\xi,\eta}h(x_0-\delta,\eta)d\eta+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{\dfrac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)-\dfrac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0+\delta,\eta)}{\delta}\cdot\delta\cdot h(x_0+\delta,\eta)d\eta+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\frac{\dfrac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0-\delta,\eta)-\dfrac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)}{\delta}\cdot\delta\cdot h(x_0-\delta,\eta)d\eta-$$

$$-\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}h(x_0+\delta,\eta)-\Delta_{\xi,\eta}h(x_0-\delta,\eta)\right]d\eta-$$

$$-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[h(x_0+\delta,\eta)-h(x_0-\delta,\eta)\right]d\eta+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{\dfrac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}-\dfrac{\partial G(x,y,\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}}{\delta}\cdot\delta\cdot\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0-\delta)d\xi+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{\dfrac{\partial G(x,y,\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}-\dfrac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}}{\delta}\cdot\delta\cdot\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0+\delta)d\xi+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{\dfrac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)-\dfrac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,y_0-\delta)}{\delta}\cdot\delta\cdot h(\xi,y_0-\delta)d\xi+$$

$$+\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{\dfrac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,y_0+\delta)-\dfrac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)}{\delta}\cdot\delta\cdot h(\xi,y_0+\delta)d\xi-$$

$$-\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0-\delta)-\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0+\delta)\right]d\xi-$$

$$-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[h(\xi,y_0-\delta)-h(\xi,y_0+\delta)\right]d\xi.$$

Поскольку по предположению для функции $h(\xi,\eta)$ существуют $\delta_0>0$ и $C>0$ такие, что выполняются соотношения (13), (14), то справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{\partial\Pi_\delta(M_0)}\left(G(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial h(\xi,\eta)}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}-\frac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)\right)ds_{\xi,\eta}=$$

$$=\alpha G(x,y,x_0,y_0)+\beta\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}+\gamma\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}+$$

$$+\theta\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)+\sigma\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)+\varsigma\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0),$$

где числа $\alpha,\beta,\gamma,\theta,\sigma,\varsigma$ были определены выше. Здесь учтено, что функция $G(x,y,\xi,\eta)$ при $(x,y)\neq(\xi,\eta)$ является достаточно гладкой функцией. Таким образом, из соотношения (12) получаем

$$I(x,y)=h(x,y)-\int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)-h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\right]ds_{\xi,\eta}-$$

$$-\alpha G(x,y,x_0,y_0)-\beta\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}-\gamma\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}-$$

$$-\theta\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)-\sigma\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)-\varsigma\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0).$$

Отсюда

$$h(x,y)-I(x,y)=\int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)-h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\right]ds_{\xi,\eta}+$$

$$+\alpha G(x,y,x_0,y_0)+\beta\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}+\gamma\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}+$$

$$+\theta\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)+\sigma\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)+\varsigma\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0).$$

Тогда

$$W(x,y)=\iint_{\Omega}G(x,y,\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta+\int_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}h(\xi,\eta)\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)-\right.$$

$$\left.-h(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\bar{n}_{\xi,\eta}}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,\xi,\eta)\right]ds_{\xi,\eta}+\alpha G(x,y,x_0,y_0)+\beta\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\xi}+\gamma\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial\eta}+$$

$$+\theta\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)+\sigma\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0)+\varsigma\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}G(x,y,x_0,y_0). \quad (15)$$

Для того чтобы решение $W(x,y)$, задаваемое формулой (15), принадлежало пространству $L_2(\Omega_0)$, необходимо положить $\beta=\gamma=\sigma=\varsigma=0$, т.е. функция $h(x,y)$ должна быть непрерывной в точке $M_0$. Формула (15) дает решение неоднородного бигармонического уравнения в проколотой области $\Omega_0$.

Таким образом, доказана теорема

**Теорема 3.** *Краевая задача для неоднородного бигармонического уравнения в проколотой области* $\Omega_0$:

$$\Delta^2 W = f,\ \ \Omega_0;$$

$$W(x,y)\big|_{\partial\Omega} = h(x,y)\big|_{\partial\Omega};$$

$$\left.\frac{\partial W(x,y)}{\partial \bar{n}_{x,y}}\right|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial h(x,y)}{\partial \bar{n}_{x,y}}\right|_{\partial\Omega};$$

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}W(x_0+\delta,\eta)-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}W(x_0-\delta,\eta)\right]d\eta+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}W(\xi,y_0-\delta)-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}W(\xi,y_0+\delta)\right]d\xi\right\}=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0+\delta,\eta)-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}h(x_0-\delta,\eta)\right]d\eta+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0-\delta)-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}h(\xi,y_0+\delta)\right]d\xi\right\};$$

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial W(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial W(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}\right]d\eta+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial W(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}-\frac{\partial W(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}\right]d\xi\right\}= \quad (16)$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial h(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial h(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}\right]d\eta+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial h(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}-\frac{\partial h(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta}\right]d\xi\right\};$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[W(x_0-\delta,\eta)-W(x_0+\delta,\eta)\right]d\eta=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[h(x_0-\delta,\eta)-h(x_0+\delta,\eta)\right]d\eta;$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[W(\xi,y_0+\delta)-W(\xi,y_0-\delta)\right]d\xi=\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[h(\xi,y_0+\delta)-h(\xi,y_0-\delta)\right]d\xi$$

*при любой правой части* $f$ *имеет единственное решение, и оно задается формулой (15).*

Отметим, что решение краевой задачи из теоремы 3 ищется в классе функций, которые удовлетворяют условиям (13), (14), и существуют пределы (16).

Теперь покажем, как, используя теорему 3, можно получить новые граничные корректно разрешимые задачи для бигармонического уравнения в проколотом круге. Для этого достаточно, чтобы функция $h(x,y)$ непрерывным образом зависела от $f(x,y)$, т.е. пусть существует непрерывный оператор $L$, отображающий $f(x,y)$ в $h(x,y)$. Напомним, $h(x,y)$ — гладкая функция в проколотой области $\Omega_0$. Итак, пусть $h=L(\Delta^2 W)$.

Тогда задача (16) примет вид:

$$\Delta^2 W(x,y)=f(x,y),\ \ (x,y)\in\Omega_0; \quad (17)$$

$$W(x,y)\big|_{\partial\Omega}=L(\Delta^2 W)\big|_{\partial\Omega};$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial \bar{n}_{x,y}}\right|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial L\left(\Delta^2 W\right)}{\partial \bar{n}_{x,y}}\right|_{\partial\Omega};$$

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}W\left(x_0+\delta,\eta\right)-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}W\left(x_0-\delta,\eta\right)\right]d\eta+\right.$$

$$\left.+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}W\left(\xi,y_0-\delta\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}W\left(\xi,y_0+\delta\right)\right]d\xi\right\}=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)\left(x_0+\delta,\eta\right)-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)\left(x_0-\delta,\eta\right)\right]d\eta+\right.$$

$$\left.+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)\left(\xi,y_0-\delta\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)\left(\xi,y_0+\delta\right)\right]d\xi\right\},$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}W\left(x_0-\delta,\eta\right)-\Delta_{\xi,\eta}W\left(x_0+\delta,\eta\right)\right]d\eta=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)\left(x_0-\delta,\eta\right)-\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)\left(x_0+\delta,\eta\right)\right]d\eta,$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}W\left(x_0-\delta,\eta\right)-\Delta_{\xi,\eta}W\left(x_0+\delta,\eta\right)\right]d\eta=\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}h\left(x_0-\delta,\eta\right)-\Delta_{\xi,\eta}h\left(x_0+\delta,\eta\right)\right]d\eta;$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}W\left(\xi,y_0+\delta\right)-\Delta_{\xi,\eta}W\left(\xi,y_0-\delta\right)\right]d\xi=\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}h\left(\xi,y_0+\delta\right)-\Delta_{\xi,\eta}h\left(\xi,y_0-\delta\right)\right]d\xi;$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}W\left(\xi,y_0+\delta\right)-\Delta_{\xi,\eta}W\left(\xi,y_0-\delta\right)\right]d\xi=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)\left(\xi,y_0+\delta\right)-\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)\left(\xi,y_0-\delta\right)\right]d\xi, \tag{18}$$

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial W\left(x_0+\delta,\eta\right)}{\partial\xi}-\frac{\partial W\left(x_0-\delta,\eta\right)}{\partial\xi}\right]d\eta+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial W\left(\xi,y_0-\delta\right)}{\partial\eta}-\frac{\partial W\left(\xi,y_0+\delta\right)}{\partial\eta}\right]d\xi\right\}=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\left\{\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial L\left(\Delta^2W\right)\left(x_0+\delta,\eta\right)}{\partial\xi}-\frac{\partial L\left(\Delta^2W\right)\left(x_0-\delta,\eta\right)}{\partial\xi}\right]d\eta+\right.$$

$$\left.+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial L\left(\Delta^2W\right)\left(\xi,y_0-\delta\right)}{\partial\eta}-\frac{\partial L\left(\Delta^2W\right)\left(\xi,y_0+\delta\right)}{\partial\eta}\right]d\xi\right\},$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[W\left(x_0-\delta,\eta\right)-W\left(x_0+\delta,\eta\right)\right]d\eta=\lim_{\delta\to+0}\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[L\left(\Delta^2W\right)\left(x_0-\delta,\eta\right)-L\left(\Delta^2W\right)\left(x_0+\delta,\eta\right)\right]d\eta,$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[W\left(\xi,y_0+\delta\right)-W\left(\xi,y_0-\delta\right)\right]d\xi=\lim_{\delta\to+0}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[L\left(\Delta^2W\right)\left(\xi,y_0+\delta\right)-L\left(\Delta^2W\right)\left(\xi,y_0-\delta\right)\right]d\xi.$$

Условия (18), накладываемые на функцию $W\left(x,y\right)$, можно интерпретировать как дополнительные условия для того, чтобы уравнение (17) при любой правой части $f\left(x,y\right)$ имело единственное решение. Таким образом, задача (17)–(18) представляет корректную всюду разрешимую задачу с новыми «краевыми» условиями вида (18). Слово «краевые» пишем в кавычках из-за того, что в общем случае эти условия не являются граничными.

Итак, справедлива

**Теорема 4.** *Для любого непрерывного оператора* $L$, *отображающего пространство* $\{f\}$ *в множество гладких функций* $\{h\}$ *в проколотой области* $\Omega_0$, *задача* (17)–(18) *имеет единственное устойчивое решение при всех допустимых правых частях* $f$.

Также справедливо обратное утверждение

**Теорема 5.** *Если уравнение* (17) *при всех допустимых правых частях* $f$ *с некоторыми дополнительными условиями имеет единственное устойчивое решение, то найдется непрерывный оператор* $L$, *отображающий пространство* $\{f\}$ *в множество гладких функций* $\{h\}$ *в проколотой области* $\Omega_0$, *такой, что дополнительные условия примут вид (18).*

**Замечание 1.** Если $h(x,y)$ и $\frac{\partial h(x,y)}{\partial \bar{n}}$ на $\partial\Omega$ равно нулю, то теорема 4, 5 дает одномерное возмущение однородной задачи Дирихле для неоднородного бигармонического уравнения.

## Список литературы


1. *Базаров М.Б., Сафаров И.И., Шокин Ю.И.* Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1996. — 189 с.
2. *Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д.* Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // Докл. РАН. — 1961. — Т. 137. — № 5. — С. 1011–1014.
3. *Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д.* Представление и свойства функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений // Математический журнал. — Алматы, 2008. — Т. 8. — № 1(27). — С. 50–58.


УДК 517.95

М.Т.Дженалиев[1], М.И.Рамазанов[2], А.Е.Туймебаева[1]

[1]Институт математики МОН РК, Алматы;
[2]Карагандинский государственный университет им. академика Е.А.Букетова

# ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ «СУЩЕСТВЕННО» НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

*Мақалада бекітілген уақытша айнымалы бойынша шектелген облыста бірөлшемді жылуөткізгіштік теңдеу үшін «елеулі» жүктеме бойынша ядроның өлшемін анықтау есебі зерттелген.*

*In given article the problem on definition of dimension of a kernel of the operator for the one-dimensional equation of heat conductivity with «essential» loading is investigated at the fixed time variable in the limited area.*

В данной статье исследуется задача на определение размерности ядра оператора для одномерного уравнения теплопроводности с «существенной» нагрузкой при фиксированной временной переменной в ограниченной области.

На практике достаточно часто возникают нагруженные уравнения, где присутствуют следы искомой функции, получающиеся при фиксированной «временной» переменной. К такого рода уравнениям приводят, например: задачи импульсного управления, задачи механики вязкоупругости с «памятью» [1], проблемы, появляющиеся при эквивалентном преобразовании нелокальных задач к локальным [2, 3] и др. Сюда также могут быть отнесены нагруженные обыкновенные дифференциальные уравнения [4–6].

В данной работе изучаются две задачи: первая — это установление размерности ядра оператора второй краевой задачи для одномерного по пространственной переменной уравнения теплопроводности, с нагрузкой при фиксированной временной переменной; вторая — это вопросы сильной одно-