T.L.Ten, G.T.Omarov

## Methods of educational computer games

In the work pedagogical aspects of creation of computer games are considered, from the point of view a quest projects, as adventure projects. The project method is used, which makes the student independent, adapted to life, able to navigate in a variety of situations, promotes the development of cognitive and creative skills of the students, the ability to construct their own knowledge, ability to navigate in the information space, the development of critical thinking skills, information activities. Also gaming technology is used in which a teacher receives an effective method for forming learning motivation.

УДК 517.956.223, 517.956.225

Б.Т.Торебек, Б.Х.Турметов

*Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан (E-mail: turebekb85@mail.ru)*

# К вопросу разрешимости некоторых обратных задач для уравнения Лапласа с граничным оператором Римана-Лиувилля

В статье изучены вопросы разрешимости некоторых обратных краевых задач первого и второго рода для уравнения Лапласа в единичном круге с граничным оператором нецелого порядка. В качестве граничного оператора рассмотрен оператор дробного дифференцирования порядка $\alpha$ в смысле Римана-Лиувилля. Доказаны теоремы о единственности и существовании рассматриваемых задач. Получен явный вид решений в интегральной форме.

*Ключевые слова:* обратные и краевые задачи, оператор Римана-Лиувилля, уравнение Лапласа, интеграл Пуассона.

## *1. Введение*

Пусть $\Omega=\left\{x\in R^2:|x|<1\right\}$ — единичный круг, $\partial\Omega=\left\{x\in R^2:|x|=1\right\}$ — окружность. Пусть далее $u(r,\varphi)$ — гармоническая функция в области $\Omega$, а $r=|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $\varphi=arctg\dfrac{x_2}{x_1}$, $0<\alpha<1$.

Рассмотрим оператор

$$D^\alpha[u](r,\varphi)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dr}\int_0^r(r-\tau)^{-\alpha}u(\tau,\varphi)d\tau.$$

$D^\alpha$ называется оператором дифференцирования $\alpha$-го порядка в смысле Римана-Лиувилля [1]. Здесь под оператором $\dfrac{d}{dr}$ понимается дифференциальный оператор вида

$$\frac{df}{dr}=\frac{1}{|x|}\left(x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}\right).$$

Введем обозначения:

$$B^\alpha[u](r,\varphi)=r^\alpha D^\alpha[u](r,\varphi);$$

$$B^{-\alpha}[u](r,\varphi)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 s^{-\alpha}(1-s)^{\alpha-1}u(sr,\varphi)ds.$$

Отметим, что свойства и некоторые применения интегро-дифференциальных операторов $B^\alpha$ и $B^{-\alpha}$ в классе гармонических функций изучены в работе [2].

Репозиторий КарГУ

*2. Постановка задач*

Рассмотрим в области $\Omega$ следующую краевую задачу:

$$\Delta u(r,\varphi)=0,\ (r,\varphi)\in\Omega; \tag{1}$$

$$u(r,\varphi)\big|_{r=1}=f(\varphi),\ -\pi\le\varphi\le\pi; \tag{2}$$

$$B^{\alpha}[u](r,\varphi)\big|_{r=1}=g(\varphi),\ -\pi\le\varphi\le\pi. \tag{3}$$

Следуя результатам работы А.В.Бицадзе [3–5], задачу (1)–(3) исследуем в следующих постановках.

**Задача OZ1** (Обратная задача первого рода). Найти функцию $u(r,\varphi)$ из класса $C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$, для которой функция $B^{\alpha}[u](r,\varphi)$ непрерывна в области $\bar{\Omega}$ и удовлетворяет условиям (1), (3), и функцию $f(\varphi)\in C^1\left[0,2\pi\right]$, для которой выполняется равенство (2).

**Задача OZ2** (Обратная задача второго рода). Найти функцию $u(r,\varphi)$ из класса $C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$, для которой функция $B^{\alpha}[u](r,\varphi)$ непрерывна в области $\bar{\Omega}$ и удовлетворяет условиям (1)–(2), и функцию $g(\varphi)\in C\left[0,2\pi\right]$, для которой выполняется равенство (3).

Отметим, что аналогичные задачи для операторов целого порядка рассматривались в работах А.В.Бицадзе [3–5].

*3. Вспомогательные утверждения*

Следующее утверждение доказано в работе [2].

**Лемма 1.** Пусть функция $u(r,\varphi)$ гармоническая в области $\Omega$. Тогда функции $B^{\alpha}[u](r,\varphi)$ и $B^{-\alpha}[u](r,\varphi)$ также являются гармоническими в $\Omega$.

Следующее утверждение определяет гладкость решения задачи (1), (3) [6].

**Лемма 2.** Пусть $\lambda>0,\ 0<\alpha<1,\ g\left(\varphi\right)\in C^{\lambda}\left(\partial\Omega\right),\ \lambda$ и $\lambda+\alpha$ — нецелые. Тогда решение задачи (1) (3) существует, единственно, принадлежит классу $C^{\lambda+\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ и представляется в виде

$$u(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^1 s^{-\alpha}\left(1-s\right)^{\alpha-1}v\left(sr,\varphi\right)ds, \tag{4}$$

где

$$v\left(r,\varphi\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g\left(\theta\right)\frac{1-r^2}{1-2r\cos\left(\varphi-\theta\right)+r^2}d\theta$$

— решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Следующие утверждения относятся к гладкости решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа [7]. Далее $C$ всюду будет обозначать постоянное значение, которое нас не интересует.

**Лемма 3.** Пусть $\lambda>0$, $\lambda$ — нецелое и $f\left(\varphi\right)\in C^{\lambda}\left(\partial\Omega\right)$. Тогда решение задачи Дирихле (1), (2) существует, единственно и принадлежит классу $C^{\lambda}\left(\overline{\Omega}\right)$ и для любого мультииндекса $\beta=\left(\beta_1,\beta_2\right)$ с $\left|\beta\right|>\lambda$ справедлива оценка

$$\left|D^{\beta}u\left(r,\varphi\right)\right|\le C\left(1-r\right)^{\lambda-\left|\beta\right|}. \tag{5}$$

Верно и обратное утверждение.

**Лемма 4.** Пусть $\lambda>0,\ u\left(r,\varphi\right)\in C^2\left(\Omega\right)\bigcap C\left(\overline{\Omega}\right)$ и для любого мультииндекса $\beta=\left(\beta_1,\beta_2\right)$ с $\left|\beta\right|>\lambda$ справедливо неравенство (5). Тогда $u\left(r,\varphi\right)\in C^{\lambda}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Следующее утверждение определяет гладкость дробной производной решения задачи Дирихле.

**Лемма 5.** Пусть $\lambda>\alpha,\ 0<\alpha<1,\ \lambda$ и $\lambda-\alpha$ — нецелые. Пусть далее $f\left(\varphi\right)\in C^{\lambda}\left(\partial\Omega\right)$, $u\left(r,\varphi\right)$ — решение задачи (1), (2). Тогда $B^{\alpha}\left[u\right]\left(r,\varphi\right)\in C^{\lambda-\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

Репозиторий КарГУ

**Доказательство**. Пусть $u(r,\varphi)$ — решение задачи (1), (2). Представим функцию $B^{\alpha}[u](r,\varphi)$ в виде

$$B^{\alpha}[u](r,\varphi)=\frac{r^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dr}\int_0^r (r-\tau)^{-\alpha}u(\tau,\varphi)d\tau \underset{\tau=r\xi}{=}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(r\frac{d}{dr}+1-\alpha\right)\int_0^1 (1-\xi)^{-\alpha}u(\xi r,\varphi)d\xi.$$

Введем обозначение

$$u_1(r,\varphi)=\int_0^1 (1-\xi)^{-\alpha}u(\xi r,\varphi)d\xi.$$

Пусть $\beta$ — мультииндекс $\beta=(\beta_1,\beta_2)$ с $|\beta|>\lambda+1-\alpha.$

Так как $\tau(\varphi)\in C^{\lambda}(\partial\Omega),$ то в силу утверждения леммы 3 $u(\varphi)\in C^{\lambda}(\overline{\Omega})$ и

$$\left|D^{\beta}u(r,\varphi)\right|\le C(1-r)^{\lambda-|\beta|}.$$

Тогда

$$\left|D^{\beta}u_1(r,\varphi)\right|\le C\int_0^1 (1-\xi)^{-\alpha}\xi^{|\beta|}(1-\xi r)^{\lambda-|\beta|}d\xi.$$

Представим последний интеграл в виде

$$\int_0^1=\int_0^r+\int_r^1=I_1+I_2$$

и оценим $I_1$.

Рассмотрим два случая:

а) Пусть $\frac{1}{2}\le r\le 1.$ Так как для любого $\xi\in[0,r]$ справедливо неравенство $1-\xi r\ge 1-\xi$ и $|\xi|^{|\beta|}\le 1,$ то

$$I_1\le C\int_0^r (1-\xi)^{\lambda-\alpha-|\beta|}d\xi=\left.\frac{(1-\xi)^{\lambda+1-\alpha-|\beta|}}{\lambda+1-\alpha-|\beta|}\right|_0^r=$$

$$=\frac{1}{\lambda+1-\alpha-|\beta|}\left[(1-r)^{\lambda+1-\alpha-|\beta|}-1\right]\le C(1-r)^{\lambda+1-\alpha-|\beta|};$$

б) пусть $r\le\frac{1}{2}$. В этом случае $1-\xi r\ge 1-r^2\ge 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$ Следовательно,

$$I_1=\int_0^r (1-\xi)^{-\alpha}\xi^{|\beta|}(1-\xi r)^{\lambda-|\beta|}d\xi\le C,$$

т.е. $I_1$ ограничено.

Значит, в общем случае

$$I_1\le C(1-r)^{\lambda+1-\alpha-|\beta|}.$$

Оценим интеграл $I_2$. В этом случае для всех $\xi\in[r,1]$ имеет место неравенство $1-\xi r\ge 1-r$ и, значит,

$$(1-\xi r)^{\lambda-|\beta|}\le(1-r)^{\lambda-|\beta|}.$$

Тогда

$$I_2\le(1-r)^{\lambda-|\beta|}\int_0^1 (1-\xi)^{-\alpha}d\xi=(1-r)^{\lambda-|\beta|}\left.\frac{(1-\xi)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_r^1=\frac{(1-r)^{\lambda+1-\alpha-|\beta|}}{1-\alpha}.$$

Значит,

$$I_2\le C(1-r)^{\lambda+1-\alpha-|\beta|}.$$

Репозиторий КарГУ

Таким образом, для любого мультииндекса $\beta=(\beta_1,\beta_2)$ с $|\beta|>\lambda+1-\alpha$ справедливо неравенство

$$\left|D^{\beta}u_1(r,\varphi)\right|\le C(1-r)^{\lambda+1-\alpha-|\beta|}.$$

Тогда, по утверждению леммы 4, $u_1(r,\varphi)\in C^{\lambda+1-\alpha}(\overline{\Omega})$.

Так как

$$B^{\alpha}[u](r,\varphi)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(r\frac{d}{dr}+1-\alpha\right)u_1(r,\varphi),$$

то очевидно, что $B^{\alpha}[u](r,\varphi)\in C^{\lambda-\alpha}(\overline{\Omega})$.

Лемма доказана.

Пусть $P(r,\gamma)$ — ядро Пуассона:

$$P(r,\gamma)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\gamma+r^2}$$

и

$$P_{\alpha}(r,\gamma)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 s^{-\alpha}(1-s)^{\alpha-1}P(sr,\gamma)ds.$$

**Лемма 6.** Для функции $P_{\alpha}(r,\gamma)$ имеет место представление

$$P_{\alpha}(r,\gamma)=2\Gamma(1-\alpha)\left(\frac{\cos\left[(1\text{-}\alpha)\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{r}\sin\gamma}{1\text{ - r}\cos\gamma}\right)\right]}{\left(1\text{ - 2r}\cos\gamma\ +\mathrm{r}^2\right)^{(1-\alpha)/2}}-\frac{1}{2}\right). \qquad (6)$$

**Доказательство**. Известно, что ядро Пуассона представляется в виде ряда

$$P(r,\gamma)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}r^k\cos k\gamma.$$

Тогда легко получить следующее

$$1+2\sum_{k=1}^{\infty}r^k\cos k\gamma=1+2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\left(re^{\gamma}\right)^k=1+2\,\mathrm{Re}\frac{re^{\gamma}}{1-re^{\gamma}}=\mathrm{Re}\frac{1+re^{\gamma}}{1-re^{\gamma}}.$$

Далее, используя определение оператора $B^{-\alpha}$ для функции $B^{-\alpha}\left[P(r,\gamma)\right]$, имеем:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{s^{\alpha}}\frac{1-(sr)^2}{1-2sr\cos\gamma+(sr)^2}ds=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{s^{\alpha}}\mathrm{Re}\frac{1+sre^{\gamma}}{1-sre^{\gamma}}ds=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{s^{\alpha}}\mathrm{Re}\left(\frac{1+sre^{\gamma}}{1-sre^{\gamma}}+1-1\right)ds=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{s^{\alpha}}\mathrm{Re}\left(\frac{2}{1-sre^{\gamma}}-1\right)ds=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{s^{\alpha}}\mathrm{Re}\frac{2}{1-sre^{\gamma}}ds-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{s^{\alpha}}ds.$$

Используя формулу для бета-функций [8; 23]

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1}ds,$$

имеем:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{s^{\alpha}}P(rs,\gamma)ds=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}s^{-\alpha}\,\mathrm{Re}\frac{2}{1-sre^{\gamma}}ds-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,1-\alpha)=$$

$$=\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 s^{-\alpha}(1-s)^{\alpha-1}\,\mathrm{Re}\frac{1}{\left(1-sre^{i\gamma}\right)}ds-\Gamma(1-\alpha).$$

Репозиторий КарГУ

Вычислим интеграл:

$$\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 s^{-\alpha}(1-s)^{\alpha-1}\operatorname{Re}\frac{1}{\left(1-sre^{i\gamma}\right)}ds.$$

После замены переменных $s=\dfrac{t}{1+t}$ получаем:

$$\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\operatorname{Re}\int_0^1\frac{s^{-\alpha}(1-s)^{\alpha-1}}{\left(1-sre^{i\gamma}\right)}ds=\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\operatorname{Re}\int_0^\infty\frac{t^{-\alpha}dt}{\left(1+t\left(1-re^{i\gamma}\right)\right)}.$$

Далее, заменяя $t\left(1-re^{i\gamma}\right)$ на $z$, имеем:

$$\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\operatorname{Re}\int_0^\infty\frac{t^{-\alpha}dt}{\left(1+t\left(1-re^{i\gamma}\right)\right)}=\frac{2\left(1-re^{i\gamma}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\operatorname{Re}\int_0^\infty\frac{z^{-\alpha}dz}{(1+z)}.$$

Последний интеграл есть формула для бета-функций [8; 23]:

$$\int_0^\infty\frac{z^{-\alpha}dz}{(1+z)}=B(\alpha,1-\alpha).$$

Используя связь между бета- и гамма-функциями

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

для $P_\alpha(r,\gamma)$ получаем:

$$P_\alpha(r,\gamma)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 s^{-\alpha}(1-s)^{\alpha-1}\frac{1-(sr)^2}{1-2sr\cos\gamma+(sr)^2}ds=$$

$$=\frac{2\operatorname{Re}\left(1-re^{i\gamma}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)}-\Gamma(1-\alpha)=\operatorname{Re}\frac{2\Gamma(1-\alpha)}{\left(1-re^{i\gamma}\right)^{1-\alpha}}-\Gamma(1-\alpha)=$$

$$=2\Gamma(1-\alpha)\left(\operatorname{Re}\frac{1}{\left(1-re^{i\gamma}\right)^{1-\alpha}}-\frac{1}{2}\right).$$

Осталось найти вещественную часть функции $\dfrac{1}{\left(1-re^{i\gamma}\right)^{1-\alpha}}$. Имеем

$$\operatorname{Re}\frac{\left(1-re^{-i\gamma}\right)^{1-\alpha}}{\left(1-re^{i\gamma}\right)^{1-\alpha}\left(1-re^{-i\gamma}\right)^{1-\alpha}}=\operatorname{Re}\frac{e^{(1-\alpha)\ln\left(1-re^{-i\gamma}\right)}}{\left(1-2r\cos\gamma+r^2\right)^{1-\alpha}}.$$

Для функции $\ln\left(1-re^{-i\gamma}\right)$ справедливо представление [9]:

$$\ln\left(1-re^{-i\gamma}\right)=\ln\sqrt{1-2r\cos\gamma+r^2}+i\,arctg\frac{r\sin\gamma}{1-r\cos\gamma}.$$

Тогда

$$\operatorname{Re}\frac{e^{(1-\alpha)\ln\left(1-re^{-i\gamma}\right)}}{\left(1-2r\cos\gamma+r^2\right)^{1-\alpha}}=\operatorname{Re}\frac{e^{(1-\alpha)\left[\ln\sqrt{1-2r\cos\gamma+r^2}+i\,arctg\frac{r\sin\gamma}{1-r\cos\gamma}\right]}}{\left(1-2r\cos\gamma+r^2\right)^{1-\alpha}}=$$

$$=\operatorname{Re}\frac{e^{(1-\alpha)\ln\sqrt{1-2r\cos\gamma+r^2}}e^{i\,arctg\frac{r\sin\gamma}{1-r\cos\gamma}}}{\left(1-2r\cos\gamma+r^2\right)^{1-\alpha}}=\operatorname{Re}\frac{\left(1-2r\cos\gamma+r^2\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\left(1-2r\cos\gamma+r^2\right)^{1-\alpha}}e^{i(1-\alpha)arctg\frac{r\sin\gamma}{1-r\cos\gamma}}=$$

Репозиторий КарГУ

$$=\frac{\operatorname{Re} e^{(1-\alpha) i\, arctg \frac{r\sin\gamma}{1-r\cos\gamma}}}{\left(1-2r\cos\gamma+r^2\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}}=\frac{\operatorname{Re}\left[\cos\left((1-\alpha)\, arctg\frac{r\sin\gamma}{1-r\cos\gamma}\right)+i\sin\left((1-\alpha)\, arctg\frac{r\sin\gamma}{1-r\cos\gamma}\right)\right]}{\left(1-2r\cos\gamma+r^2\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}}=$$

$$=\frac{\cos\left[(1-\alpha)\, arctg\frac{r\sin\gamma}{1-r\cos\gamma}\right]}{\left(1-2r\cos\gamma+r^2\right)^{\frac{1-\alpha}{2}}}.$$

Таким образом, мы доказали справедливость формулы (6).

Лемма доказана.

Заметим, что аналогичные представления для ядра $P_\alpha(r,\varphi-\theta)$ были получены ранее в работах [10, 11].

*4. Исследование задачи OZ1*

Приведем основное утверждение относительно задачи OZ1.

**Теорема 1.** Пусть $g(\varphi)\in C(\partial\Omega)$. Тогда решение задачи OZ1 существует и имеют место равенства

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_\alpha(r,\varphi-\theta)g(\theta)d\theta; \tag{7}$$

$$f(\varphi)=\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\theta)\left\{\frac{\cos\left((1-\alpha)\frac{\pi-\varphi+\theta}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{\varphi-\theta}{2}\right)^{(1-\alpha)}}-\frac{1}{2}\right\}d\theta, \tag{8}$$

где $P_\alpha(r,\varphi-\theta)$ определяется формулой (6).

**Доказательство**. Сначала решаем задачу (1), (3). По лемме 2 для любого $g(\varphi)\in C(\partial\Omega)$ решение этой задачи существует, единственно и представляется в виде (4).

Подставляя выражение для функции $v(r,\varphi)$ в (4) и меняя порядок интегрирования, получим:

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\theta)\left\{\int_0^1 s^{-\alpha}(1-s)^{\alpha-1}\frac{1-(sr)^2}{1-2sr\cos(\varphi-\theta)+(sr)^2}ds\right\}d\theta.$$

Далее для внутренного интеграла, используя равенство (6), получим для $u(r,\varphi)$ представление (7). Тогда, применяя граничное условие (2), имеем:

$$\lim_{r\to1}u(r,\varphi)=f(\varphi)=\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\pi}\lim_{r\to1}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\cos\left[(1-\alpha)\, arctg\left(\frac{r\sin(\varphi-\theta)}{1-r\cos(\varphi-\theta)}\right)\right]}{\left(1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2\right)^{(1-\alpha)/2}}-\frac{1}{2}\right)g(\theta)d\theta=$$

$$=\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\cos\left[(1-\alpha)\, arctg\left(\frac{\sin(\varphi-\theta)}{1-\cos(\varphi-\theta)}\right)\right]}{\left(2-2\cos(\varphi-\theta)\right)^{(1-\alpha)/2}}-\frac{1}{2}\right)g(\theta)d\theta.$$

Применяя известные формулы для тригонометрических и обратных тригонометрических функций, получаем:

$$f(\varphi)=\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\cos\left[(1-\alpha)\, arctg\left(ctg\frac{\varphi-\theta}{2}\right)\right]}{2^{(1-\alpha)}\left(\sin\frac{\varphi-\theta}{2}\right)^{(1-\alpha)}}-\frac{1}{2}\right)g(\theta)d\theta=$$



Репозиторий КарГУ

$$=\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\cos\left[(1\text{-}\alpha)\frac{\pi-\varphi+\theta}{2}\right]}{2^{(1-\alpha)}\left(\sin\frac{\varphi-\theta}{2}\right)^{(1-\alpha)}}-\frac{1}{2}\right)g(\theta)\,d\theta.$$

Таким образом, для функции $f(\varphi)$ получили равенство (8).

Теорема доказана.

*5. Исследование задачи OZ2*

**Теорема 2.** Пусть $f^{\lambda}(\varphi)\in C(\partial\Omega)$. Тогда решения задачи OZ2 существуют и представляются в виде

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,d\theta; \qquad (9)$$

$$g(\varphi)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)2\pi}\int_{0}^{2\pi}f(\theta)\left\{1+2\operatorname{Re}F\left(1,1,2-\alpha,e^{i(\varphi-\theta)}\right)\right\}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(3-\alpha)\pi}\int_{0}^{2\pi}f'(\theta)\left\{\operatorname{Re}ie^{i(\varphi-\theta)}F\left(1,2,3-\alpha,e^{i(\varphi-\theta)}\right)\right\},$$

где $F(a,b,c,z)$ — гипергеометрическая функция [8; 123].

**Доказательство**. Известно, что единственное решение задачи (1)–(2) представляется в виде интеграла Пуассона (9).

Как и в доказательстве теоремы 1, функцию (9) представим в виде

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\operatorname{Re}\left[1+\frac{2}{1-re^{i(\varphi-\theta)}}\right]d\theta.$$

Применим к функции $u(r,\varphi)$ оператор $B^{\alpha}$. Тогда

$$B^{\alpha}[u](r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\operatorname{Re}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)B^{\alpha}\left[1+\frac{2}{1-re^{i(\varphi-\theta)}}\right]d\theta==\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)B^{\alpha}[1]\,d\theta+\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)B^{\alpha}\left[\frac{1}{1-re^{i(\varphi-\theta)}}\right]d\theta.$$

Отдельно вычислим:

$$B^{\alpha}\left[\frac{1}{1-re^{i(\varphi-\theta)}}\right]=\frac{r^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dr}\int_{0}^{r}\frac{(r-\tau)^{-\alpha}}{1-\tau e^{i(\varphi-\theta)}}\,d\tau\underset{\tau=rs}{=}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{1}\left(1-\alpha+r\frac{d}{dr}\right)\frac{(1-s)^{-\alpha}}{1-rse^{i(\varphi-\theta)}}\,dr=$$

$$=\frac{(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{1}\frac{(1-s)^{-\alpha}}{1-rse^{i(\varphi-\theta)}}\,dr+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}r\frac{d}{dr}\int_{0}^{1}\frac{(1-s)^{-\alpha}}{1-rse^{i(\varphi-\theta)}}\,dr.$$

Тогда

$$B^{\alpha}[u](r,\varphi)=\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\,d\theta+\frac{(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\operatorname{Re}\int_{0}^{1}\frac{(1-s)^{-\alpha}}{1-rse^{i(\varphi-\theta)}}\,ds\,d\theta+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\left\{r\frac{d}{dr}\int_{0}^{1}\operatorname{Re}\frac{(1-s)^{-\alpha}}{1-rse^{i(\varphi-\theta)}}\,ds\right\}d\theta=I_1+I_2+I_3.$$

Изучим интеграл $I_2$. Используя формулу для гипергеометрических функций [8; 123]

$$F(a,b,c,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_{0}^{1}t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\,dt,$$

для $I_2$ имеем:

$$I_2=\frac{(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\left\{\operatorname{Re}\int_{0}^{1}(1-s)^{-\alpha}\frac{1}{1-rse^{i(\varphi-\theta)}}\,ds\right\}d\theta=$$



Репозиторий КарГУ

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\left\{\operatorname{Re}F\left(1,1,2-\alpha,re^{i(\varphi-\theta)}\right)\right\}d\theta.$$

Теперь вычислим $I_3$. Меняя порядок интегрирования в $I_3$, получаем:

$$I_3=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}r\frac{d}{dr}\int_0^1(1-s)^{-\alpha}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\operatorname{Re}\frac{1}{1-rse^{i(\varphi-\theta)}}d\theta\right\}ds.$$

Интегрируя по частям внутренний интеграл, имеем:

$$I_3=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1(1-s)^{-\alpha}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta)r\frac{d}{dr}\operatorname{Re}\left\{i\ln\left|\frac{1-rse^{i(\varphi-\theta)}}{e^{i(\varphi-\theta)}}\right|\right\}d\theta ds.$$

Вычисляя $r\frac{d}{dr}\ln\left|\frac{1-rse^{i(\varphi-\theta)}}{e^{i(\varphi-\theta)}}\right|$, находим:

$$I_3=-\operatorname{Re}\frac{ire^{i(\varphi-\theta)}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta)\left\{\int_0^1(1-s)^{-\alpha}\frac{s}{1-rse^{i(\varphi-\theta)}}ds\right\}d\theta=$$

$$=-\frac{r}{\Gamma(3-\alpha)\pi}\int_0^{2\pi} f'(\theta)\left\{\operatorname{Re}ie^{i(\varphi-\theta)}F\left(1,2,3-\alpha,re^{i(\varphi-\theta)}\right)\right\}.$$

Тогда для функций $B^{\alpha}[u](r,\varphi)$ справедливо представление

$$B^{\alpha}[u](r,\varphi)=\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+2\operatorname{Re}F\left(1,1,2-\alpha,re^{i(\varphi-\theta)}\right)\right)f(\theta)d\theta=$$

$$=-\frac{r}{\Gamma(3-\alpha)\pi}\int_0^{2\pi} f'(\theta)\left\{\operatorname{Re}ie^{i(\varphi-\theta)}F\left(1,2,3-\alpha,re^{i(\varphi-\theta)}\right)\right\}.$$

Используя условия (3), имеем:

$$\lim_{r\to 1}B^{\alpha}[u](r,\varphi)=g(\varphi)=\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+2\operatorname{Re}F\left(1,1,2-\alpha,e^{i(\varphi-\theta)}\right)\right)f(\theta)d\theta-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(3-\alpha)\pi}\int_0^{2\pi} f'(\theta)\left\{\operatorname{Re}ie^{i(\varphi-\theta)}F\left(1,2,3-\alpha,e^{i(\varphi-\theta)}\right)\right\}d\theta.$$

Таким образом, функция $g(\varphi)$ найдена.

Теорема доказана.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований МОН РК. Проект 0830/ГФ2.*

## References

1 *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations // Elsevier: North-Holland. Mathematics studies. — 2006. — P. 70.

2 *Karachik V.V., Turmetov B.Kh., Torebek B.T.* On some integro-differential operators in the class of harmonic functions and their applications // Siberian Advances in Mathematics. — Allerton Press. — 2012. — Vol. 22. — № 2. — P. 115–134.

3 *Bitsadze A.V.* The Newmann problem for harmonic functions // Doklady akademii nauk SSSR. — 1990. — Vol. 990. — P. 11–13.

4 *Bitsadze A.V.* Singular integral equations of the first kind with Neumann kernels // Differential equations. — 1986. — Vol. 28. — № 5. — P. 823–828.

5 *Bitsadze A.V.* Singular integral equations of the first kinda // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 1993. — Vol. 200. — P. 49–59.

6 *Turmetov B.Kh., Torebek B.T.* On smoothness of solutions to some boundary value problems for the Laplace equation in Hölder classes // Vestnik KazNU. Series Mathematics, Mechanics, Informatics. — 2011. — № 1. — P. 79–86.

7 *Alimov Sh.A.* One Problem with an Oblique Derivative // Differential equations. — 1981. — Vol. 17. — № 10. — P. 1738–1751.

8 *Bateman H., Erdelyi A.* Higher Transcendental functions. Hipergeometric functions. Functions Legendre. — Moscow: Phizmathlit, 1973. — P. 296 (in Russian).

9 *Korn G., Korn T.* Mathematical Handbook (for Scientists and Engineers). — Moscow: Nauka, 1973. — P. 199.

Репозиторий КарГУ

10 *Turmetov B.Kh.* On a boundary problem for a harmonic equation // Differential Equations. — 1996. — Vol. 32. — № 8. — P. 1089–1092.

11 *Turmetov B.Kh.* On Smoothness of a Solution to a Boundary Value Problem with Fractional Order Boundary Operator // Siberian Advances in Mathematics. Allerton Press. — 2005. — Vol. 15. — № 2. — P. 115–125.

Б.Т.Төребек, Б.Қ.Тұрметов

## Лаплас теңдеуі үшін шекаралық шартында Риман-Лиувилль операторы қатысқан кейбір кері есептердің шешілімділігінің мәселелері

Мақалада бірлік дөңгелекте берілген Лаплас теңдеуі үшін шекаралық шартында бүтін емес ретті оператор қатысқан бірінші және екінші түрдегі кейбір кері шеттік есептердің шешілімділігінің мәселелері зерттелді. Шекаралық оператор ретінде $\alpha$-ретті Риман-Лиувилль мағынасындағы дифференциалдау операторы қарастырылды. Есептердің шешімінің бар болуы және жалғыздығы туралы теоремалар дәлелденді. Шешімнің нақты интегралдық формасы алынды.

B.T.Torebek, B.Kh.Turmetov

## On the solvability of some inverse problems for the Laplace equation with the boundary operator in the Riemann-Liouville

In this paper we investigate the solvability of some inverse boundary value problems of first and second order for the Laplace equation in the unit disk with the boundary operator of noninteger order. As a boundary operators the fractional differentiation of order in the Riemann-Liouville are considered. The theorems on the existence and uniqueness of these problems are proved. An explicit solution of the integral form is obtained.

УДК 512.54 + 510.5

Р.К.Тюлюбергенев, М.К.Нуризинов

*Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д.С.Серикбаева, Усть-Каменогорск*
*(E-mail: marat.nurizinov@gmail.com)*

## О вычислимых подгруппах группы почти тождественных подстановок

В статье исследованы вопросы вычислимости подгрупп группы всех почти тождественных подстановок натуральных чисел. Доказано, что существует конструктивная нумерация этой группы, относительно которой вопросы о сопряженности двух подстановок и извлечений корней решается эффективно, а также найдены необходимые и достаточные условия конструктивизируемости ее абелевых и нильпотентных подгрупп.

*Ключевые слова:* конструктивная группа, почти тождественная подстановка, сопряженность, нильпотентная подгруппа.

Изучение конструктивных групп начато в работе А.И.Мальцева «О рекурсивных абелевых группах» [1], где он описал все конструктивизируемые абелевы группы без кручения ранга 1 и поставил общую задачу: определить, какие конструктивные нумерации допускают те или иные абстрактно заданные группы. Основными проблемами здесь являются проблемы существования, единственности и продолжения конструктивизации для тех или иных классов групп. Этим вопросам посвящены работы А.И.Мальцева, Ю.Л.Ершова, С.С.Гончарова, А.С.Морозова, В.П.Добрицы, А.Т.Нуртазина, Н.Г.Хисамиева, И.В.Латкина, Р.Доуни, Дж. Найта и других авторов.

Репозиторий КарГУ