References

1 Gavrilov D.A. *Production management on the basis of the MRP II standard*. — The 2nd prod. — Sankt-Petersburg: Piter, 2005, 416 p.

2 Piterkin S.V., Oladov N.A., Isayev D.V. *Precisely in time for Russia: Practice of use of ERP systems*. — Moscow: Alpina, 2002, 368 p.

3 Turuge A. *Corporate portals on the basis of XML and Web services*, Moscow: Kudits-obraz, 2004.

4 Barsegyan A.A., Kupriyanov M.S., Stepanenko V.V., Holod I.I. *Metody's Cold and models of the analysis of data: OLAP and Data Mining*. — Sankt-Petersburg, 2004.

5 *Information technologies of management* / Under the editorship of G.A.Titorenko, Moscow, 2003.

УДК 517.968

А.Н.Есбаев, Г.А.Есенбаева

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: adilet_e@mail.ru)

Об одной граничной задаче для нагруженного дифференциального оператора теплопроводности при неподвижной точке нагрузки

В статье рассмотрена одна граничная задача для нагруженного дифференциального оператора теплопроводности при неподвижной точке нагрузки. Исходная граничная задача редуцирована к интегральному уравнению Вольтерра в общем виде. Исследованы вопросы разрешимости интегральных уравнений при всех значениях параметра *k* нагруженного слагаемого и при неподвижной точке нагрузки. Получена теорема о разрешимости исходной граничной задачи при неподвижной точке нагрузки.

Ключевые слова: граничная задача для нагруженного дифференциального оператора теплопроводности, интегральное уравнение Вольтерра второго рода, гамма-функция, дополнительная гамма-функция.

В области $\Omega=\{(x,t):\quad x\in(0,\infty);\quad t\in(0,\infty)\}$ рассматривается уравнение для нагруженного дифференциального оператора теплопроводности

$$L_\lambda u\equiv\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1-2\beta}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}-\lambda\cdot\left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x=\bar{x}(t)}=f(x,t) \tag{1}$$

относительно неизвестной функции $u=u(x,t)$. Параметры β и λ считаются постоянными, причем $0<\beta<1$; $\lambda\in C$; k — заданное число ($k=0,1,2...$); $x=\bar{x}(t)$ — заданная функция при $t\in(0,\infty)$; $\lambda\cdot\left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x=\bar{x}(t)}$ — нагруженное слагаемое; $f(x,t)$ — известная функция, определенная в области Ω.

Запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-2\beta}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\Phi(x,t); \tag{2}$$

$$\Phi(x,t)=f(x,t)+\lambda\cdot\left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x=\bar{x}(t)}.$$

Уравнение вида (2) встречается в задачах теплопереноса и в задачах диффузионного пограничного слоя при наличии источников или стоков [1].

Основная граничная задача, исследуемая в данной работе, представляет собой *первую краевую задачу* и состоит в нахождении функции $u=u(x,t)$, определенной в области Ω и имеющей всюду в Ω непрерывные производные $\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению (1), начальному условию

$$u(x,0)=g(x) \tag{3}$$

и граничному условию

$$u(0,t)=h(t). \tag{4}$$

Функции $g(x)$ и $h(t)$ являются заданными при $x\in(0,\infty)$ и $t\in(0,\infty)$ соответственно.

Решение граничной задачи (1), (3), (4) при условии $0<\beta<1$ для уравнения (2) имеет вид [1]:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\cdot\int_0^t\int_0^\infty\left[f(\xi,\tau)+\lambda\cdot\left.\frac{\partial^k u}{\partial\xi^k}\right|_{\xi=\bar{x}(\tau)}\right]\cdot\frac{x^\beta\cdot\xi^{1-\beta}}{t-\tau}\cdot\exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot I_\beta\left(\frac{\xi\cdot x}{2(t-\tau)}\right)\cdot d\xi\cdot d\tau+$$

$$+\frac{x^\beta}{2t}\cdot\int_0^\infty g(\xi)\cdot\xi^{1-\beta}\cdot\exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{2t}\right)\cdot I_\beta\left(\frac{\xi\cdot x}{2t}\right)\cdot d\xi+$$

$$+\frac{x^{2\beta}}{2^{2\beta+1}\cdot\Gamma(\beta+1)}\cdot\int_0^t h(\tau)\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1+\beta}} \tag{5}$$

или

$$u(x,t)=\lambda\cdot\int_0^t\int_0^\infty\frac{x^\beta\cdot\xi^{1-\beta}}{2(t-\tau)}\cdot\exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot I_\beta\left(\frac{\xi\cdot x}{2(t-\tau)}\right)\cdot\left.\frac{\partial^k u}{\partial\xi^k}\right|_{\xi=\bar{x}(\tau)}d\xi\cdot d\tau+\bar{F}(x,t), \tag{6}$$

где

$$\bar{F}(x,t)=F_1(x,t)+F_2(x,t)+F_3(x,t),$$

причем

$$F_1(x,t)=\frac{1}{2}\cdot\int_0^t\int_0^\infty f(\xi,\tau)\cdot\frac{x^\beta\cdot\xi^{1-\beta}}{t-\tau}\cdot\exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot I_\beta\left(\frac{\xi\cdot x}{2(t-\tau)}\right)\cdot d\xi\cdot d\tau;$$

$$F_2(x,t)=\frac{x^\beta}{2t}\cdot\int_0^\infty g(\xi)\cdot\xi^{1-\beta}\cdot\exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{2t}\right)\cdot I_\beta\left(\frac{\xi\cdot x}{2t}\right)\cdot d\xi;$$

$$F_3(x,t)=\frac{x^{2\beta}}{2^{2\beta+1}\cdot\Gamma(\beta+1)}\cdot\int_0^t h(\tau)\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1+\beta}}.$$

Уравнение (6) можно представить как интегральное уравнение Вольтерра второго рода. Для этого преобразуем (6) к виду

$$u(x,t)=\lambda\frac{x^\beta}{2}\int_0^t\frac{1}{t-\tau}\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot\left.\frac{\partial^k u}{\partial\xi^k}\right|_{\xi=\bar{x}(\tau)}d\tau\int_0^\infty\xi^{1-\beta}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4(t-\tau)}\right)\times$$

$$\times I_\beta\left(\frac{\xi\cdot x}{2(t-\tau)}\right)\cdot d\xi+\bar{F}(x,t). \tag{7}$$

Введем следующие обозначения:

$$P(x,t-\tau)=\int_0^\infty\xi^{1-\beta}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot I_\beta\left(\frac{\xi\cdot x}{2(t-\tau)}\right)\cdot d\xi; \tag{8}$$

$$Q(x,t-\tau)=\frac{x^\beta}{2(t-\tau)}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot P(x,t-\tau). \tag{9}$$

Соотношение (7) с учетом (8), (9) примет вид:

$$u(x,t)=\lambda\cdot\int_0^t Q(x,t-\tau)\cdot\left.\frac{\partial^k u}{\partial\xi^k}\right|_{\xi=\bar{x}(\tau)}d\tau+\bar{F}(x,t). \tag{10}$$

Дифференцируем (10) по переменной x k раз и подставим вместо $x=\bar{x}(t)$. В результате получим

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x=\bar{x}(t)}=\lambda\cdot\int_0^t\left.\frac{\partial^k Q(x,t-\tau)}{\partial x^k}\right|_{x=\bar{x}(t)}\cdot\left.\frac{\partial^k u}{\partial\xi^k}\right|_{\xi=\bar{x}(\tau)}d\tau+\left.\frac{\partial^k\bar{F}(x,t)}{\partial x^k}\right|_{x=\bar{x}(t)},$$

т.е.

$$\mu(t)-\lambda\cdot\int_0^t K(t,\tau)\cdot\mu(\tau)\cdot d\tau=F(t); \tag{11}$$

$$\mu(t)=\left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x=\bar{x}(t)};\ K(t,\tau)=\left.\frac{\partial^k Q(x,t-\tau)}{\partial x^k}\right|_{x=\bar{x}(t)};\ F(t)=\left.\frac{\partial^k \bar{F}(x,t)}{\partial x^k}\right|_{x=\bar{x}(t)}.$$

Соотношение (11) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода.

Таким образом, решение основной граничной задачи редуцировалось к решению интегрального уравнения (11).

Пусть $k=0$ и точка нагрузки неподвижна, т.е. $\bar{x}(t)=x_0$, где $x_0\in R_+$, тогда интегральное уравнение (11) примет вид:

$$\mu_0(t)-\lambda\cdot\int_0^t K_0(t-\tau)\cdot\mu_0(\tau)\cdot d\tau=F_0(t); \tag{12}$$

$$\mu_0(t)=u(x,t)\big|_{x=x_0}=u(x_0,t);\ K_0(t-\tau)=Q(x,t-\tau)\big|_{x=x_0}=Q(x_0,t-\tau);$$

$$F_0(t)=\bar{F}(x,t)\big|_{x=x_0}=\bar{F}(x_0,t).$$

Произведя необходимые вычисления и подставляя (8) в (9), получим [2]

$$Q(x,t-\tau)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\int_0^{\frac{x^2}{4(t-\tau)}}\xi^{\beta-1}\cdot e^{-\xi}d\xi; \tag{13}$$

тогда

$$\lim_{t\to 0}Q(x,t-\tau)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\int_0^t d\tau\int_0^{\frac{x^2}{4(t-\tau)}}e^{-\xi}\cdot\xi^{\beta-1}d\xi=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\left[t\cdot\gamma\left(\beta,\frac{x^2}{4t}\right)+\frac{x^2}{4}\cdot\Gamma\left(\beta-1,\frac{x^2}{4t}\right)\right]=0. \tag{14}$$

Так как ядром интегрального уравнения (12) является функция $Q(x_0,t-\tau)$, обладающая свойством (14), то справедлива следующая лемма о разрешимости этого интегрального уравнения.

Лемма 1. Если $F_0(t)\in C(0,\infty)$, то интегральное уравнение (12) имеет и притом единственное непрерывное решение при любых значениях λ.

Положив $k=1$, $\bar{x}(t)=x_0$, где $x_0\in R_+$, интегральное уравнение (11) можно записать в виде:

$$\mu_1(t)-\lambda\cdot\int_0^t K_1(t,\tau)\cdot\mu_1(\tau)\cdot d\tau=F_1(t); \tag{15}$$

$$\mu_1(t)=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_0};\ K_1(t,\tau)=\left.\frac{\partial Q(x,t-\tau)}{\partial x}\right|_{x=x_0};\ F_1(t)=\left.\frac{\partial \bar{F}(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_0}.$$

Используя выражение (13) для функции $Q(x,t-\tau)$, вычислим ядро $K_1(t,\tau)$ интегрального уравнения (15)

$$\frac{\partial Q(x,t-\tau)}{\partial x}=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^{\frac{x^2}{4(t-\tau)}}\xi^{\beta-1}\cdot e^{-\xi}d\xi\right)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\cdot\frac{x}{2(t-\tau)}\cdot\left(\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)^{\beta-1}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\beta)\cdot 2^{2\beta-1}}\cdot\frac{x^{2\beta-1}}{(t-\tau)^{\beta}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right),$$

где $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция, тогда

$$K_1(t,\tau)=\left.\frac{\partial Q(x,t-\tau)}{\partial x}\right|_{x=x_0}=\frac{1}{\Gamma(\beta)\cdot 2^{2\beta-1}}\cdot\frac{{x_0}^{2\beta-1}}{(t-\tau)^{\beta}}\cdot\exp\left(-\frac{{x_0}^2}{4(t-\tau)}\right). \tag{16}$$

Ядром интегрального уравнения (15) является функция $K_1(t,\tau)$, в которой $0<\beta<1$, следовательно, о разрешимости интегрального уравнения (15) можно сформулировать лемму.

Лемма 2. Если $F_1(t)\in C(0,\infty)$, то интегральное уравнение (15) имеет единственное непрерывное решение при любых значениях λ.

Если $k=2$, $\bar{x}(t)=x_0$, где $x_0\in R_+$, то интегральное уравнение (11) представимо в виде:

$$\mu_2(t)-\lambda\cdot\int_0^t K_2(t,\tau)\cdot\mu_2(\tau)\cdot d\tau=F_2(t); \tag{17}$$

$$\mu_2(t)=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=x_0};\quad K_2(t,\tau)=\left.\frac{\partial^2 Q(x,t-\tau)}{\partial x^2}\right|_{x=x_0};\quad F_2(t)=\left.\frac{\partial^2 \bar{F}(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=x_0}.$$

Вычислим теперь ядро $K_2(t,\tau)$ интегрального уравнения (17), проведя аналогичные выкладки, как и в соотношении (16):

$$\frac{\partial^2 Q(x,t-\tau)}{\partial x^2}=\frac{1}{\Gamma(\beta)\cdot 2^{2\beta-1}}\cdot\frac{1}{(t-\tau)^{\beta}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot\left((2\beta-1)\cdot x^{2\beta-2}-\frac{x}{2(t-\tau)}\cdot x^{2\beta-1}\right)=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\beta)\cdot 2^{2\beta-1}}\cdot\left[\frac{(2\beta-1)\cdot x^{2\beta-2}}{(t-\tau)^{\beta}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{x^{2\beta}}{2(t-\tau)^{\beta+1}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\right],$$

тогда

$$K_2(t,\tau)=\left.\frac{\partial^2 Q(x,t-\tau)}{\partial x^2}\right|_{x=x_0}=\frac{1}{\Gamma(\beta)\cdot 2^{2\beta-1}}\cdot\left[\frac{(2\beta-1)\cdot {x_0}^{2\beta-2}}{(t-\tau)^{\beta}}\cdot\exp\left(-\frac{{x_0}^2}{4(t-\tau)}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{{x_0}^{2\beta}}{2(t-\tau)^{\beta+1}}\cdot\exp\left(-\frac{x_0^2}{4(t-\tau)}\right)\right]. \tag{18}$$

Исследуем свойства ядра $K_2(t,\tau)$, для этого вычислим $\int_0^t K_2(t,\tau)d\tau$

$$\int_0^t K_2(t,\tau)d\tau=\frac{(2\beta-1)\cdot x_0^{2\beta-2}}{\Gamma(\beta)\cdot 2^{2\beta-1}}\cdot\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{\beta}}\cdot\exp\left(-\frac{{x_0}^2}{4(t-\tau)}\right)d\tau-$$
$$-\frac{x_0^{2\beta}}{\Gamma(\beta)\cdot 2^{2\beta}}\cdot\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{\beta=1}}\cdot\exp\left(-\frac{x_0^2}{4(t-\tau)^{\beta+1}}\right)d\tau=$$
$$=\frac{(2\beta-1)\cdot x_0^{2\beta-2}}{\Gamma(\beta)\cdot 2^{2\beta-1}}\cdot D_1-\frac{x_0^{2\beta}}{\Gamma(\beta)\cdot 2^{2\beta}}\cdot D_2, \tag{19}$$

где

$$D_1=\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{\beta}}\cdot\exp\left(-\frac{{x_0}^2}{4(t-\tau)}\right)d\tau,\quad D_2=\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{\beta=1}}\cdot\exp\left(-\frac{x_0^2}{4(t-\tau)^{\beta+1}}\right)d\tau.$$

Воспользовавшись известным соотношением [3], вычислим интегралы D_1 и D_2

$$D_1=\int_0^t\frac{1}{(t-\tau)^{\beta}}\cdot\exp\left(-\frac{{x_0}^2}{4(t-\tau)}\right)d\tau=\left|\xi=\frac{1}{t-\tau}\right|=\int_{\frac{1}{t}}^{\infty}\xi^{\beta-2}\cdot\exp\left(-\frac{x_0^2}{4}\xi\right)d\xi=$$
$$=\frac{1}{\left(\frac{x_0^2}{4}\right)^{\beta-1}}\cdot\Gamma\left(\beta-1,\frac{x_0^2}{4t}\right)=\frac{2^{2\beta-2}}{x_0^{2\beta-2}}\cdot\Gamma\left(\beta-1,\frac{x_0^2}{4t}\right); \tag{20}$$

$$D_2 = \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\beta=1}} \cdot \exp\left(-\frac{x_0^2}{4(t-\tau)^{\beta+1}}\right) d\tau = \left|\xi = \frac{1}{t-\tau}\right| = \int_{\frac{1}{t}}^{\infty} \xi^{\beta-1} \cdot \exp\left(-\frac{x_0^2}{4}\xi\right) d\xi =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{x_0^2}{4}\right)^{\beta}} \cdot \Gamma\left(\beta, \frac{x_0^2}{4t}\right) = \frac{2^{2\beta}}{x_0^{2\beta}} \cdot \Gamma\left(\beta, \frac{x_0^2}{4t}\right), \tag{21}$$

где $\Gamma(\nu, z) = \int_x^{\infty} t^{\nu-1} \cdot e^{-t} dt$ — дополнительная гамма-функция.

Подставляя (20) и (21) в (19), находим

$$\int_0^t K_2(t,\tau) d\tau = \frac{(2\beta-1)\cdot x_0^{2\beta-2}}{\Gamma(\beta)\cdot 2^{2\beta-1}} \cdot \frac{2^{2\beta-2}}{x_0^{2\beta-2}} \cdot \Gamma\left(\beta-1, \frac{x_0^2}{4t}\right) - \frac{x_0^{2\beta}}{\Gamma(\beta)\cdot 2^{2\beta}} \cdot \frac{2^{2\beta}}{x_0^{2\beta}} \cdot \Gamma\left(\beta, \frac{x_0^2}{4t}\right) =$$

$$= \frac{2\beta-1}{2\cdot\Gamma(\beta)} \cdot \Gamma\left(\beta-1, \frac{x_0^2}{4t}\right) - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \Gamma\left(\beta, \frac{x_0^2}{4t}\right);$$

$$\int_0^t K_2(t,\tau) d\tau = \frac{2\beta-1}{2\cdot\Gamma(\beta)} \cdot \Gamma\left(\beta-1, \frac{x_0^2}{4t}\right) - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \Gamma\left(\beta, \frac{x_0^2}{4t}\right). \tag{22}$$

Предельный переход в соотношении (22) при $t \to 0$ дает

$$\lim_{t\to 0} \int_0^t K_2(t,\tau) d\tau = \lim_{t\to 0} \left[\frac{2\beta-1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\beta-1, \frac{x_0^2}{4t}\right)}{\Gamma(\beta)} - \frac{\Gamma\left(\beta, \frac{x_0^2}{4t}\right)}{\Gamma(\beta)} \right] = 0. \tag{23}$$

Итак, ядро $K_2(t,\tau)$ интегрального уравнения (17) обладает свойством (23), в чем мы убедились непосредственным вычислением, поэтому сформулируем лемму 3, аналогичную леммам 1 и 2.

Лемма 3. Если $F_2(t) \in C(0,\infty)$, то интегральное уравнение (17) имеет единственное непрерывное решение при любых значениях λ.

Если далее последовательно полагать $k = 3, 4, 5, \ldots$, а $\overline{x}(t) = x_0$, где $x_0 \in R_+$, то, вычисляя ядра интегрального уравнения (11) при $k = 3, 4, 5, \ldots$ последовательным дифференцированием соотношения (13) по переменной x и полагая $\overline{x}(t) = x_0$, где $x_0 \in R_+$, получим, исходя из (16) и (18), что ядро $K_1(t,\tau)$ содержит слагаемое вида $\frac{1}{(t-\tau)^{\beta}} \cdot \exp\left(-\frac{x_0^{\ 2}}{4(t-\tau)}\right)$, ядро $K_2(t,\tau)$ — слагаемые вида $\frac{1}{(t-\tau)^{\beta}} \cdot \exp\left(-\frac{x_0^{\ 2}}{4(t-\tau)}\right)$ и $\frac{1}{(t-\tau)^{\beta+1}} \cdot \exp\left(-\frac{x_0^{\ 2}}{4(t-\tau)}\right)$, ядро $K_3(t,\tau)$ — слагаемые вида $\frac{1}{(t-\tau)^{\beta}} \cdot \exp\left(-\frac{x_0^{\ 2}}{4(t-\tau)}\right)$; $\frac{1}{(t-\tau)^{\beta+1}} \cdot \exp\left(-\frac{x_0^{\ 2}}{4(t-\tau)}\right)$ и $\frac{1}{(t-\tau)^{\beta+2}} \cdot \exp\left(-\frac{x_0^{\ 2}}{4(t-\tau)}\right)$, …, а ядро $K_{m+1}(t,\tau)$ — слагаемые вида $\frac{1}{(t-\tau)^{\beta}} \cdot \exp\left(-\frac{x_0^{\ 2}}{4(t-\tau)}\right)$, $\frac{1}{(t-\tau)^{\beta+1}} \cdot \exp\left(-\frac{x_0^{\ 2}}{4(t-\tau)}\right), \ldots, \frac{1}{(t-\tau)^{\beta+m}} \cdot \exp\left(-\frac{x_0^{\ 2}}{4(t-\tau)}\right)$.

Принимая во внимание, что для каждого фиксированного значения $m \in N$

$$\lim_{t\to 0} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\beta+m}} \cdot \exp\left(-\frac{x_0^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau = \frac{1}{\left(\frac{x_0^2}{4}\right)^{\beta+m-1}} \cdot \lim_{t\to 0}\left[\Gamma\left(\beta+m-1, \frac{x_0^2}{4t}\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{2}{x_0}\right)^{2\beta+2m-2} \lim_{t\to 0}\left[\Gamma\left(\beta+m-1, \frac{x_0^2}{4t}\right)\right] = 0,$$

имеем, что

$$\lim_{t\to 0}\int_0^t K_{m+1}(t,\tau)d\tau = 0. \tag{24}$$

На основании изложенного выше и учитывая свойство (24), сформулируем теорему.

Теорема 1. *Если для каждого фиксированного значения* $k = 0,1,2,...$ *при* $\bar{x}(t) = x_0$, *где* $x_0 \in R_+$, *функция* $F(t)\in C(0,\infty)$, *то интегральное уравнение*

$$\mu(t) - \lambda\cdot\int_0^t K(t,\tau)\cdot\mu(\tau)\cdot d\tau = F(t),$$

где

$$\mu(t) = \left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x=\bar{x}(t)};\ K(t,\tau) = \left.\frac{\partial^k Q(x,t-\tau)}{\partial x^k}\right|_{x=\bar{x}(t)};\ F(t) = \left.\frac{\partial^k \bar{F}(x,t)}{\partial x^k}\right|_{x=\bar{x}(t)},$$

имеет и притом единственное непрерывное решение.

Принимая во внимание теорему 1, получим следующую теорему.

Теорема 2. *В области* $\Omega = \{(x,t):\ \ x\in(0,\infty);\ \ t\in(0,\infty)\}$ *основная граничная задача (1), (3), (4) для нагруженного дифференциального оператора теплопроводности для каждого фиксированного значения* $k = 0,1,2,...$ *при* $\bar{x}(t) = x_0$, *где* $x_0\in R_+$, *если* $f\in C_{x,t}^{k-1,1}(\Omega)$, *имеет единственное решение* $u(x,t)\in C_{x,t}^{k,1}(\Omega)$ *в виде (5):*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\cdot\int_0^t\int_0^\infty\left[f(\xi,\tau) + \lambda\cdot\left.\frac{\partial^k u}{\partial\xi^k}\right|_{\xi=x_0}\right]\cdot\frac{x^\beta\cdot\xi^{1-\beta}}{t-\tau}\cdot\exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot I_\beta\left(\frac{\xi\cdot x}{2(t-\tau)}\right)\cdot d\xi\cdot d\tau +$$

$$+\frac{x^\beta}{2t}\cdot\int_0^\infty g(\xi)\cdot\xi^{1-\beta}\cdot\exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{2t}\right)\cdot I_\beta\left(\frac{\xi\cdot x}{2t}\right)\cdot d\xi +$$

$$+\frac{x^{2\beta}}{2^{2\beta+1}\cdot\Gamma(\beta+1)}\cdot\int_0^t h(\tau)\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1+\beta}}.$$

Теорема 2 — это теорема о разрешимости основной граничной задачи (1), (3), (4) при неподвижной точке нагрузки.

Список литературы

1 *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. — М.: Физматлит, 2001. — С. 86.

2 *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. — Т. 2. Специальные функции. — М.: Физматлит, 2003. — С. 273.

3 *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. — Т. 1. Элементарные функции. — М.: Физматлит, 2002. — С. 112.

А.Н.Есбаев, Г.А.Есенбаева

Қозғалмайтын жүктеу нүктесіндегі жүктелген дифференциалдық жылуөткізгіштік операторы үшін бір шектік есеп туралы

Мақалада қозғалмайтын жүктеу нүктесіндегі жүктелген дифференциалдық жылуөткізгіштік операторы үшін бір шектік есеп қарастырылған. Берілген шектік есеп жалпы түрде Вольтерра интегралдық теңдеуіне келтірілген. Жүктеу қосылғышының k параметрінің барлық мәндерінде және қозғалмайтын жүктеу нүктесінде интегралдық теңдеулерінің шешілу шарттары зерттелген. Қозғалмайтын жүктеу нүктесіндегі берілген шектік есептің шешілуі туралы теорема алынды.

A.N.Yesbayev, G.A.Yessenbayeva

About one boundary value problem for the loaded differential operator of heat conduction with the stationary point of load

In this article we considered one boundary value problem for the loaded differential operator of heat conduction with the stationary point of load. The given boundary value problem is reduced to the integral equation of Volterra in general form. The questions of solvability of integral equations with all meanings of parameter k of the loaded summand when the point of load is stationary are investigated. The theorem of solvability of the given boundary value problem with the stationary point of load is obtained.

References

1 Polyanin A.D. *The reference book about linear equations of mathematical physics*, Moscow: Fizmatlit, 2001, p. 86.

2 Prudnikov A.P., Brychrov Yu.A., Marechev O.I. *Integrals and rows*. — Vol. 2. Special functions, Moscow: Fizmatlit, 2003, p. 273.

3 Prudnikov A.P., Brychrov Yu.A., Marechev O.I. *Integrals and rows*. — Vol. 1. Elementary functions, Moscow: Fizmatlit, 2002, p. 112.

УДК 517.968

А.Н.Есбаев, Г.А.Есенбаева

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: adilet_e@mail.ru)

О свойствах ядра и разрешимости одного интегрального уравнения Вольтерра

В статье рассмотрено интегральное уравнение Вольтерра второго рода с заданным ядром. Особенность уравнения заключается в том, что ядро интегрального уравнения содержит в себе заданную функцию. Эта функция определяет закон движения точки нагрузки в нагруженном дифференциальном параболическом уравнении. Такого рода интегральные уравнения возникают при решении некоторых граничных задач для нагруженных дифференциальных параболических уравнений в неограниченной области.

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра второго рода, граничные задачи для нагруженного дифференциального параболического уравнения, модифицированная функция Бесселя, неполная гамма-функция, обобщенная гипергеометрическая функция, символ Похгаммера.

При отыскании решений некоторых граничных задач для нагруженного дифференциального параболического уравнения естественным образом возникает необходимость исследования интегральных уравнений Вольтерра второго рода следующего вида:

$$\varphi(t)-\lambda\cdot\int_0^t K(t,\tau)\cdot\varphi(\tau)\cdot d\tau=F(t), \qquad (1)$$

где $\lambda\in C$ — числовой параметр уравнения; $F(t)$ — известная функция, определенная на промежутке $(0,\infty)$, ядро $K(t,\tau)$ интегрального уравнения (1) имеет вид:

$$K(t,\tau)=\frac{z^{\beta}}{2(t-\tau)}\cdot\exp\left(-\frac{z^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot\int_0^{\infty}\xi^{1-\beta}\exp\left(-\frac{z^2}{4(t-\tau)}\right)\cdot I_{\beta}\left(\frac{\xi\cdot z}{2(t-\tau)}\right)\cdot d\xi,$$

где $I_{\beta}(x)$ — модифицированная функция Бесселя; β — числовой параметр, причем $0<\beta<1$, $z=z(t)\in C(0,\infty)$ — заданная, принимающая положительные значения функция; $\varphi(t)$ — искомая функция.

Вычислим ядро $K(t,\tau)$ интегрального уравнения (1) и представим различные его интерпретации.