

Ж.А.Түсіпов, Қ.Ж.Жетпісов, А.Ж.Сәтекбаева, Л.М.Жалмағамбетова

Графтағы жиындар үйірінің анықталғандығы

Мақалада бағдарланған графтағы жиындар үйірінің анықталғандық әдісі ұсынылды. Бұл әдісті қолданып, келесі тұжырымдарды дәлелдеуге болады. Айталық, A 2-сатылы-нильпотентті группаның құрылымы және σ берілген группаның сигнатурасы болсын. Әрбір есептелетін α ординалы үшін σ A сигнатурасының есептелетін құрылымын табуға болады және ол Δ_α^0 болады, бірақ Δ_α^0 қатысты категориялы болмайды (яғни формалды емес \sum_α^0 Скотт үйірісіз). Әрбір есептелетін α ординалы үшін σ A сигнатурасының есептелетін құрылымы табылады және оған қатынасын R қосу ішкі \sum_α^0 болады, бірақ ол құрылымда \sum_α^0 қатынасы A -да ішкі қатынас болып табылмайды.

Ж.А.Тусупов, К.Ж.Жетписов, А.Ж.Сәтекбаева, Л.М.Жалмағамбетова

Определимость семейства множеств в графе

В статье предложен метод определимости семейства множеств в ориентированный граф. Используя этот метод, можно доказать следующие результаты. Пусть A — структура 2-ступенно-нильпотентных групп и σ — сигнатура данных групп. Для каждого вычислимого ординала α существует вычисляемая структура A сигнатуры σ такая, что она Δ_α^0 , но не относительно Δ_α^0 категорична (т.е. без формального \sum_α^0 семейства Скотта). Для каждого вычислимого ординала α существует вычисляемая структура A сигнатуры σ такая, что добавленное отношение R является внутренне \sum_α^0 , но не относительно внутренне \sum_α^0 на A .

УДК 517.95

Б.Х.Турметов, Н.З.Байметова

Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан (E-mail: baymetovanigora@mail.ru)

О разрешимости некоторых краевых задач с оператором типа Адамара-Маршо

В настоящей работе в классе гармонических функций изучены свойства некоторых интегро-дифференциальных операторов, обобщающих операторы дробного дифференцирования Адамара и Адамара-Маршо. В качестве применения полученных свойств рассмотрены некоторые краевые задачи для уравнения Лапласа в круге.

Ключевые слова: дробное дифференцирование, краевые задачи, уравнение Лапласа, дробный интеграл Адамара-Маршо.

1. Введение

Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ — единичный круг, $u(r, \varphi)$ — гармоническая функция в Ω , $r = |x|$, $\varphi = \arctg \frac{x_2}{x_1}$, $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \mu$ — действительные числа.

Рассмотрим операторы

$$J_\mu^\alpha[u](r, \varphi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{\mu-1} u(sr, \varphi) ds, \quad (1)$$

$$D_{\mu}^{\alpha}[u](r, \varphi) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{-\alpha+1} s^{\mu-1} [u(r, \varphi) - u(sr, \varphi)] ds + \mu^{\alpha} u(r, \varphi), \tag{2}$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера.

В случае $\mu = 0$ выражение (1) совпадает с дробным интегралом Адамара порядка $\alpha > 0$, а (2) совпадает с дробным производным Адамара-Маршо [1]. Поэтому конструкции (1) и (2) назовём дробным интегралом и производным типа Адамара-Маршо.

Легко показать, что операторы J_{μ}^{α} и J_{ν}^{β} при $\alpha, \beta \in (0, 1)$, $\mu, \nu \geq 0$ коммутируют. Действительно, если функции $J_{\nu}^{\beta}[u](r, \varphi)$ и $J_{\mu}^{\alpha}[J_{\nu}^{\beta}[u]](r, \varphi)$ существуют, то по определению оператора J_{μ}^{α} имеем

$$\begin{aligned} J_{\mu}^{\alpha}[J_{\nu}^{\beta}[u]](r, \varphi) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln \tau|^{\alpha-1} \tau^{\mu-1} J_{\nu}^{\beta}[u(\tau r, \varphi)] d\tau = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln \tau|^{\alpha-1} \tau^{\mu-1} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 |\ln s|^{\beta-1} s^{\nu-1} u(s\tau r, \varphi) ds d\tau = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 |\ln s|^{\beta-1} s^{\nu-1} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln \tau|^{\alpha-1} \tau^{\mu-1} u(\tau sr, \varphi) d\tau ds = J_{\nu}^{\beta}[J_{\mu}^{\alpha}[u]](r, \varphi). \end{aligned}$$

Аналогичным свойством обладают операторы D_{μ}^{α} и D_{ν}^{β} , т.е. справедливо равенство

$$D_{\nu}^{\beta}[D_{\mu}^{\alpha}[u]](r, \varphi) = D_{\mu}^{\alpha}[D_{\nu}^{\beta}[u]](r, \varphi).$$

Замечание 1. Отметим, что если $u = const$, то $J_0^{\alpha}[u](r, \varphi)$ не существует, а $J_{\mu}^{\alpha}[u](r, \varphi)$ существует для всех $\mu > 0$ и $\alpha \in (0, 1)$.

Пусть теперь $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$, m — натуральное число, $0 < \alpha_j < 1$, $\mu_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, m$. Рассмотрим более общие операторы

$$\begin{aligned} J_{\vec{\mu}}^{\vec{\alpha}}[u](r, \varphi) &= J_{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)}[u](r, \varphi) = J_{\mu_m}^{\alpha_m} [J_{\mu_{m-1}}^{\alpha_{m-1}} \dots [J_{\mu_1}^{\alpha_1}[u]] \dots](r, \varphi); \\ D_{\vec{\mu}}^{\vec{\alpha}}[u](r, \varphi) &= D_{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)}[u](r, \varphi) = D_{\mu_m}^{\alpha_m} [D_{\mu_{m-1}}^{\alpha_{m-1}} \dots [D_{\mu_1}^{\alpha_1}[u]] \dots](r, \varphi). \end{aligned}$$

Отметим, что аналогичные операторы с производными целого порядка в классе гармонических функций рассматривались в работах [2–4], а для производных дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля и Капуто — в работе [5].

2. Свойства операторов $J_{\vec{\mu}}^{\vec{\alpha}}$ и $D_{\vec{\mu}}^{\vec{\alpha}}$

Лемма 1. Пусть $0 < \alpha < 1, \mu \geq 0$ — действительные числа. Тогда справедливы равенства

$$J_{\mu}^{\alpha}[r^k] = (k + \mu)^{-\alpha} r^k, \quad k \in N_0 = \{0, 1, \dots\}, k + \mu \neq 0, \tag{3}$$

$$D_{\mu}^{\alpha}[r^k] = (k + \mu)^{\alpha} r^k, \quad k \in N_0, \mu \geq 0. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $k \in N_0$ и $k + \mu \neq 0$. Тогда в соответствии с определением оператора J_{μ}^{α} запишем

$$J_{\mu}^{\alpha}[r^k](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{\mu-1} s^k ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{k+\mu-1} ds.$$

После замены переменных по формуле $\ln \frac{1}{s} = z$ последний интеграл приводится к виду

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{k+\mu-1} ds = (k + \mu)^{-\alpha}, \quad k \in N_0.$$

Действительно, $\int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{k+\mu-1} ds = \int_0^{\infty} z^{\alpha-1} e^{-(k+\mu)z} dz = (k + \mu)^{\alpha} \int_0^{\infty} s^{\alpha-1} e^{-s} ds = (k + \mu)^{\alpha} \Gamma(\alpha)$. Следовательно,

$$J_{\mu}^{\alpha}[r^k] = (k + \mu)^{-\alpha} r^k.$$

Равенство (3) доказано.

Переходим к доказательству равенства (4). Используя определение оператора D_μ^α , получаем, что при $k = 0$ $D_\mu^\alpha[r^0](x) = \mu^\alpha$, $\mu \geq 0$, а при $k \geq 1$ и $\mu \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} D_\mu^\alpha[r^k] &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{r^k - (sr)^k}{s^{1-\mu} |\ln s|^{\alpha+1}} ds + \mu^\alpha r^k = \frac{\alpha r^k}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{1-s^k}{s^{1-\mu} |\ln s|^{\alpha+1}} ds + \mu^\alpha r^k = \\ &= \frac{\alpha r^k}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (s^{\mu-1} - s^{\mu+k-1}) |\ln s|^{-(\alpha+1)} ds + \mu^\alpha r^k = \frac{r^k}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (s^\mu - s^{\mu+k}) d\left(\ln \frac{1}{s}\right)^{-\alpha} + \mu^\alpha r^k = \\ &= \frac{r^k}{\Gamma(1-\alpha)} (s^\mu - s^{\mu+k}) \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{-\alpha} \Big|_{s=0}^{s=1} - \frac{r^k}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (\mu s^{\mu-1} - (k+\mu)s^{\mu+k-1}) |\ln s|^{-\alpha} ds + \mu^\alpha r^k = \\ &= -\frac{r^k}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (\mu s^{\mu-1} - (k+\mu)s^{\mu+k-1}) |\ln s|^{-\alpha} ds + \mu^\alpha r^k. \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл $I_{k+\mu} = \int_0^1 s^{k+\mu-1} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{-\alpha} ds, k = 1, 2, \dots, \mu \geq 0$.

Как и в доказательстве равенства (3), после замены

$$\ln \frac{1}{s} = z, s = e^{-z}, ds = -e^{-z} dz, s = 0 \rightarrow z = \infty, s = 1 \rightarrow z = 0$$

получаем

$$I_{k+\mu} = \int_0^\infty e^{-(k+\mu)z} z^{-\alpha} dz = [(k+\mu)z = t, dt = (k+\mu)dz] = (k+\mu)^{\alpha-1} \int_0^\infty e^{-t} t^{-\alpha} dt = \Gamma(1-\alpha)(k+\mu)^{\alpha-1};$$

$$I_\mu = \int_0^1 s^{\mu-1} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{-\alpha} ds = \int_0^\infty e^{-\mu t} t^{-\alpha} dt = \Gamma(1-\alpha)\mu^{\alpha-1},$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} D_\mu^\alpha[r^k](x) &= -\frac{r^k}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \Gamma(1-\alpha) [\mu^\alpha \mu^{\alpha-1} - (k+\mu)(k+\mu)^{\alpha-1}] + \mu^\alpha r^k = \\ &= -\mu^\alpha r^k + (k+\mu)^\alpha r^k + \mu^\alpha r^k = (k+\mu)^\alpha r^k. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Введём обозначения $\gamma_{k,m} = (k+\mu_1)^{\alpha_1} \cdot (k+\mu_2)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (k+\mu_m)^{\alpha_m}$.

Пусть для некоторых $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\mu_i = 0$. Обозначим количество таких μ_i через p . Так как операторы D_μ^α и D_ν^β при $\alpha, \beta \in (0, 1)$ и $\mu \geq 0, \nu \geq 0$ коммутируют, то можно считать, что они пронумерованы в порядке возрастания, т.е. $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_p = 0$. И пусть

$$\gamma_{k,m-p} = (k+\mu_{p+1})^{\alpha_{p+1}} \cdot (k+\mu_{p+2})^{\alpha_{p+2}} \cdot \dots \cdot (k+\mu_m)^{\alpha_m}.$$

Очевидно, что если $p = 0$, то $\gamma_{k,m-p} = \gamma_{k,m}$.

Следствие 1. Пусть $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$, $0 < \alpha_j < 1$, $\mu_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, m$, и $k \in N_0$. Тогда справедливы равенства:

- 1) $J_{\vec{\mu}_{m-p}}^{\vec{\alpha}_{m-p}}[r^0](x) = \gamma_{0,m-p}^{-1}$, где $0 < p < m$, $\vec{\alpha}_{m-p} = (\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_m)$, $\vec{\mu}_{m-p} = (\mu_{p+1}, \dots, \mu_m)$;
- 2) $J_{\vec{\mu}}^{\vec{\alpha}}[r^k] = \gamma_{k,m}^{-1} r^k, k \geq 1$;
- 3) $D_{\vec{\mu}}^{\vec{\alpha}}[r^k] = \gamma_{k,m} r^k, k \in N_0$.

Следствие доказывается последовательным применением леммы 1, с учетом замечания 1.

Теорема 1. Пусть $0 < \alpha < 1$, $\mu \geq 0$ и $u(r, \varphi)$ — гармоническая функция. Тогда:

- 1) если $\mu > 0$, то функция $J_\mu^\alpha[u](r, \varphi)$ является гармонической в области Ω ;
- 2) если $\mu = 0$, то функция $J_0^\alpha[u](r, \varphi)$ является гармонической в области Ω при $u(0) = 0$.

Доказательство. Пусть $u(r, \varphi)$ — гармоническая функция в области Ω . Тогда $u(r, \varphi)$ представляется в виде

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \quad (5)$$

где a_k, b_k — неизвестные коэффициенты. Ряд (5) сходится абсолютно и равномерно по (r, φ) при $r \leq \rho < 1$.

Формально применяя оператор J_{μ}^{α} к функции (5), при $\mu > 0$ с учетом равенства (3) получаем:

$$J_{\mu}^{\alpha}[u](r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (k + \mu)^{-\alpha} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi). \quad (6)$$

Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{(k + \mu)^{-\alpha}} = 1$, то радиусы сходимости рядов (5) и (6) совпадают, и поэтому сумма ряда (6) представляет гармоническую функцию в области Ω [4].

Если $\mu = 0$ и $u(0) = 0$, то функция $J_0^{\alpha}[u](r, \varphi)$ определена, отсюда

$$J_0^{\alpha}[u](r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k^{-\alpha}} = 1$, то функция $J_0^{\alpha}[u](r, \varphi)$ определена во всем Ω и представляет там гармоническую функцию. Теорема 1 доказана.

Следствие 2. Пусть $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$, $0 < \alpha_j < 1$, $\mu_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, и $u(r, \varphi)$ — гармоническая функция в области Ω . Тогда:

1) если $p = 0$, то функция $J_{\vec{\mu}}^{\vec{\alpha}}[u](r, \varphi)$ является гармонической в области Ω ;

2) если $p > 0$, то при $u(0) = 0$ функция $J_{\vec{\mu}}^{\vec{\alpha}}[u](r, \varphi)$ также является гармонической в области Ω .

Доказательство. Если $p = 0$, то по условию $\mu_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, и применяя оператор $J_{\vec{\mu}}^{\vec{\alpha}}$ к функции (5), с учетом равенства 1) и 2) из следствия 1 имеем:

$$J_{\vec{\mu}}^{\vec{\alpha}}[u](r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k,m}^{-1} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

Далее, очевидно, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\gamma_{k,m}^{-1}} = 1$, и поэтому $J_{\vec{\mu}}^{\vec{\alpha}}[u](r, \varphi)$ — гармоническая функция в области Ω .

Если $p > 0$, то при выполнении условия $u(0) = 0$ из (5) получаем

$$J_{\vec{\mu}}^{\vec{\alpha}}[u](r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{k,m}^{-1} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

И тогда $J_{\vec{\mu}}^{\vec{\alpha}}[u](r, \varphi)$ также является гармонической в области Ω . Следствие доказано.

Теорема 2. Пусть $u(r, \varphi)$ — гармоническая в шаре Ω функция, тогда функция $D_{\mu}^{\alpha}[u](r, \varphi)$ также является гармонической в Ω и при $\mu = 0$ справедливо $D_0^{\alpha}[u](0) = 0$.

Доказательство. Пусть $u(r, \varphi)$ — гармоническая функция в области Ω . Тогда для любого $(r, \varphi) \in \Omega$ функция $u(r, \varphi)$ представляется в виде ряда (5).

Применяя формально оператор D_{μ}^{α} к ряду (5) и учитывая лемму (1), получим:

$$D_{\mu}^{\alpha}[u](r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (k + \mu)^{\alpha} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi). \quad (7)$$

Сходимость данного ряда показывается как в случае теоремы 1. Далее, поскольку $D_0^{\alpha}[1] = 0$, то в разложении функции $D_0^{\alpha}[u](r, \varphi)$ в ряд в виде (5) отсутствует свободный член и поэтому $D_0^{\alpha}[u](0) = 0$. Теорема доказана.

Следствие 3. Пусть $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$, $0 < \alpha_j < 1$, $\mu_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, и $u(r, \varphi)$ — гармоническая функция в области Ω . Тогда функция $D_{\vec{\mu}}^{\vec{\alpha}}[u](r, \varphi)$ также является гармонической в области Ω , причем если $p > 0$, то $D_{\vec{\mu}}^{\vec{\alpha}}[u](0) = 0$.

Доказательство. Гармоничность функции $D_{\bar{\mu}}^{\bar{\alpha}}[u](r, \varphi)$ доказывается аналогично функции из теоремы 1. Если $p > 0$, то $D_{\bar{\mu}}^{\bar{\alpha}}[1] = 0$ и поэтому в представлении гармонической функции $D_{\bar{\mu}}^{\bar{\alpha}}[u](r, \varphi)$ в виде ряда (5) отсутствует свободный член. Следовательно, $D_{\bar{\mu}}^{\bar{\alpha}}[u](0) = 0$.

Теорема 3. Пусть $0 < \alpha < 1$, $\mu \geq 0$ и $u(r, \varphi)$ — гармоническая функция в области Ω . Тогда для любого $(r, \varphi) \in \Omega$ справедливы равенства

$$1) \text{ при } \mu = 0 \quad u(r, \varphi) = u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{-1} D_0^\alpha [u](sr, \varphi) ds;$$

$$2) \text{ при } \mu > 0 \quad u(r, \varphi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{\mu-1} D_\mu^\alpha [u](sr, \varphi) ds.$$

Доказательство. Пусть $\mu = 0$. Представим гармоническую функцию $u(r, \varphi)$ в виде ряда

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha \frac{r^k}{k^\alpha} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) + a_0.$$

Так как $a_0 = u(0)$ и

$$\frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{k-1} ds, k \in N,$$

то

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= u(0) + \sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{-1} (sr)^k ds = \\ &= u(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{-1} D_0^\alpha [(sr)^k] (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) ds = \\ &= u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{-1} D_0^\alpha \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (sr)^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \right\} ds \\ &= u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{-1} D_0^\alpha \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (sr)^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \right\} ds = \\ &= u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{-1} D_0^\alpha [u](sr, \varphi) ds. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство 1) доказано.

Пусть $\mu > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k,1} \frac{r^k}{\gamma_{k,1}} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k,1} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{\mu-1} (sr)^k ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{\mu-1} \sum_{k=0}^{\infty} D_\mu^\alpha [(sr)^k] (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{\mu-1} D_\mu^\alpha \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (sr)^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \right\} ds = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{\mu-1} D_\mu^\alpha [u](sr, \varphi) ds. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $\bar{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$, $0 < \alpha_j < 1$, $\mu_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, и $u(r, \varphi)$ — гармоническая функция в области Ω . Тогда:

1) если $p = 0$, то справедливо равенство

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\Gamma(\bar{\alpha})} \int_0^1 ds_1 \dots \int_0^1 |\ln s|^{\bar{\alpha}-1} s^{\bar{\mu}-1} D_{\bar{\mu}}^{\bar{\alpha}} [u](sr, \varphi) ds_m;$$

2) если $p > 0$, то справедливо равенство

$$u(r, \varphi) = u(0) + \frac{1}{\Gamma(\bar{\alpha})} \int_0^1 ds_1 \dots \int_0^1 |\ln s|^{\bar{\alpha}-1} s^{\bar{\mu}-1} D_{\bar{\mu}}^{\bar{\alpha}}[u](sr, \varphi) ds_m,$$

где

$$\Gamma(\bar{\alpha}) = \Gamma(\alpha_1) \cdot \Gamma(\alpha_2) \cdot \dots \cdot \Gamma(\alpha_m), \quad |\ln s|^{\bar{\alpha}-1} = |\ln s|^{\alpha_1-1} \cdot |\ln s|^{\alpha_2-1} \cdot \dots \cdot |\ln s|^{\alpha_m-1},$$

$$s^{\bar{\mu}-1} = s^{\mu_1-1} \cdot s^{\mu_2-1} \cdot \dots \cdot s^{\mu_m-1}, \quad (sr, \varphi) = (s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_m r_1, \varphi).$$

Доказательство. Пусть $p = 0$. Тогда по условию $\mu_j > 0, j = 1, 2, \dots, m$. Учитывая (5), представим гармоническую в круге Ω функцию $u(r, \varphi)$ в виде

$$u(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k,m} \frac{r^k}{\gamma_{k,m}} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

Далее, учитывая утверждение следствия 1 и равномерную сходимость ряда по r при $r \leq \rho < 1$ (поэтому для этих $(r, \varphi) \in \Omega$ суммирование по r и интегрирование по s_1, s_2, \dots, s_m можно поменять местами), его можно привести к виду:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{\mu-1} (sr)^k ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1) \cdot \dots \cdot \Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \dots \int_0^1 |\ln s|^{\bar{\alpha}-1} s^{\bar{\mu}-1} D_{\bar{\mu}}^{\bar{\alpha}}[u](sr, \varphi) ds_m.$$

Теорема доказана.

Случай $p > 0$ доказывается аналогично.

Теорема 5. Пусть $u(r, \varphi)$ — гармоническая функция в шаре Ω . Тогда справедливы равенства:

- 1) если $\mu = 0$, то $J_0^\alpha [D_0^\alpha [u]](r, \varphi) = u(r, \varphi) - u(0)$;
- 2) если $u(0) = 0$ при $\mu = 0$, то $D_0^\alpha [J_0^\alpha [u]](r, \varphi) = u(r, \varphi)$;
- 3) если $\mu > 0$, то $J_\mu^\alpha [D_\mu^\alpha [u]](r, \varphi) = D_\mu^\alpha [J_\mu^\alpha [u]](r, \varphi) = u(r, \varphi)$.

Доказательство. Докажем первое равенство теоремы. Так как $D_0^\alpha [u](0) = 0$, то к функции $D_0^\alpha [u](r, \varphi)$ можно применить оператор J_0^α , и поэтому

$$J_0^\alpha [D_0^\alpha [u]](r, \varphi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s^{-1} |\ln s|^{\alpha-1} D_0^\alpha [u](sr, \varphi) ds.$$

Далее, учитывая теорему 3, получаем:

$$J_0^\alpha [D_0^\alpha [u]](r, \varphi) = u(r, \varphi) - u(0).$$

Равенство 1) доказано.

Для доказательства второго равенства теоремы применим оператор D_0^α к функции $J_0^\alpha [u](r, \varphi)$.

Будем иметь

$$D_0^\alpha [J_0^\alpha [u]](r, \varphi) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{-(\alpha+1)} s^{-1} [J_0^\alpha [u](r, \varphi) - J_0^\alpha [u](sr, \varphi)] ds =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{-(\alpha+1)} s^{-1} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln \tau|^{\alpha-1} \tau^{-1} [u(\tau r, \varphi) - u(\tau sr, \varphi)] d\tau ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln \tau|^{\alpha-1} \tau^{-1} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{-(\alpha+1)} s^{-1} [u(\tau r, \varphi) - u(s\tau r, \varphi)] ds d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln \tau|^{\alpha-1} \tau^{-1} D_0^\alpha [u](\tau r, \varphi) d\tau = u(r, \varphi) - u(0) = u(r, \varphi).$$

Равенство 2) доказано.

Докажем третье равенство теоремы. Применяя к функции $D_\mu^\alpha[u](r, \varphi)$ оператор J_μ^α , будем иметь:

$$J_\mu^\alpha [D_\mu^\alpha[u]](r, \varphi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{\mu-1} D_\mu^\alpha[u](sr, \varphi) ds.$$

Далее, учитывая теорему 3, получаем:

$$J_\mu^\alpha [D_\mu^\alpha[u]](r, \varphi) = u(r, \varphi).$$

Для доказательства равенства $D_\mu^\alpha [J_\mu^\alpha[u]](r, \varphi) = u(r, \varphi)$ применим оператор D_μ^α к функции $J_\mu^\alpha[u](r, \varphi)$. Будем иметь

$$\begin{aligned} D_\mu^\alpha [J_\mu^\alpha[u]](r, \varphi) &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{-(\alpha+1)} s^{\mu-1} [J_\mu^\alpha[u](r, \varphi) - J_\mu^\alpha[u](sr, \varphi)] ds + \mu^\alpha J_\mu^\alpha[u](r, \varphi) = \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{-(\alpha+1)} s^{\mu-1} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{\alpha-1} s^{\mu-1} [u(\tau r, \varphi) - u(\tau sr, \varphi)] d\tau ds + \mu^\alpha J_\mu^\alpha[u](r, \varphi) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln \tau|^{\alpha-1} \tau^{\mu-1} \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 |\ln s|^{-(\alpha+1)} s^{\mu-1} [u(\tau r, \varphi) - u(s\tau r, \varphi)] ds d\tau + \mu^\alpha J_\mu^\alpha[u](r, \varphi) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln \tau|^{\alpha-1} \tau^{\mu-1} [D_\mu^\alpha[u](\tau r, \varphi) - \mu^\alpha u(\tau r, \varphi)] d\tau + \mu^\alpha J_\mu^\alpha[u](r, \varphi) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln \tau|^{\alpha-1} \tau^{\mu-1} D_\mu^\alpha[u](\tau r, \varphi) d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln \tau|^{\alpha-1} \tau^{\mu-1} \mu^\alpha u(\tau r, \varphi) d\tau + \mu^\alpha J_\mu^\alpha[u](r, \varphi) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 |\ln \tau|^{\alpha-1} \tau^{\mu-1} D_\mu^\alpha[u](\tau r, \varphi) d\tau - \mu^\alpha J_\mu^\alpha[u](r, \varphi) + \mu^\alpha J_\mu^\alpha[u](r, \varphi) = u(r, \varphi). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Используя связь между операторами D_μ^α и J_μ^α , несложно установить следующее утверждение.

Теорема 6. Если $u(r, \varphi)$ — гармоническая функция в круге Ω , то справедливы равенства:

- 1) если $p = 0$, то $J_\mu^{\bar{\alpha}} [D_\mu^{\bar{\alpha}}[u]](r, \varphi) = u(r, \varphi)$, $D_\mu^{\bar{\alpha}} [J_\mu^{\bar{\alpha}}[u]](r, \varphi) = u(r, \varphi)$;
- 2) если $p > 0$, то $J_\mu^{\bar{\alpha}} [D_\mu^{\bar{\alpha}}[u]](r, \varphi) = u(r, \varphi) - u(0)$;
- 3) если $p > 0$ и $u(0) = 0$, то $D_\mu^{\bar{\alpha}} [J_\mu^{\bar{\alpha}}[u]](r, \varphi) = u(r, \varphi)$.

3. Постановка и решение краевых задач

Теперь перейдем к постановке и решению некоторых краевых задач, включающих значения операторов $D_\mu^{\bar{\alpha}}$ на границе.

Задача 1. Найти гармоническую в круге Ω функцию $u(r, \varphi)$ из класса $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, для которой функция $D_0^\alpha[u](r, \varphi)$ непрерывна в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяет равенству

$$D_0^\alpha[u](r, \varphi) \Big|_{r=1} = f(\varphi), \quad -\pi \leq \varphi < \pi.$$

Задача 2. Найти гармоническую в круге Ω функцию $u(r, \varphi)$ из класса $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, для которой функция $D_\mu^\alpha[u](r, \varphi)$ непрерывна в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяет равенству

$$D_\mu^\alpha[u](r, \varphi) \Big|_{r=1} = f(\varphi), \quad -\pi \leq \varphi < \pi.$$

Задача 3. Найти гармоническую в круге Ω функцию $u(r, \varphi)$ из класса $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, для которой функция $D_\mu^{\bar{\alpha}}[u](r, \varphi)$ непрерывна в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяет равенству

$$D_\mu^{\bar{\alpha}}[u](r, \varphi) \Big|_{r=1} = f(\varphi), \quad -\pi \leq \varphi < \pi.$$

Заметим, что аналогичные задачи с операторами целого порядка рассматривались в работах [2–4]. Для операторов дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля и Капуто рассматривались в работе [5], а для операторов дробного порядка в смысле Адамара-Маршо в случае $\mu = 0$ — в работе [6].

Пусть $v(r, \varphi)$ — классическое решение задачи Дирихле в Ω , т.е.

$$\begin{cases} \Delta v(r, \varphi) = 0, (r, \varphi) \in \Omega \\ v(r, \varphi)|_{r=1} = f(\varphi) \end{cases} \quad (8)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. Пусть $f(\varphi) \in C[-\pi, \pi]$. Тогда для разрешимости задачи 1 необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi = 0. \quad (9)$$

Если решение задачи 1 существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде

$$u(r, \varphi) = C + J_0^\alpha[v](r, \varphi), \quad (10)$$

где C — произвольная постоянная, а $v(r, \varphi)$ — решение задачи (8).

Доказательство. Пусть решение задачи 1 существует, и это $u(r, \varphi)$. Применим к функции $u(r, \varphi)$ оператор D_0^α и обозначим $D_0^\alpha[u](r, \varphi) = v(r, \varphi)$. Ясно, что $v(r, \varphi) \in C(\partial\Omega)$. Поскольку $u(r, \varphi)$ — гармоническая функция в Ω , то в силу утверждения теоремы 1 функция $v(r, \varphi)$ — тоже гармоническая в круге Ω , $v(0) = D_0^\alpha[u](0) = 0$ и $v(r, \varphi)|_{\partial\Omega} = D_0^\alpha[u(r, \varphi)]|_{\partial\Omega} = f(\varphi)$. Таким образом, функция $v(x)$ является решением задачи Дирихле (8). С другой стороны, решение задачи (8) представляется в виде интеграла Пуассона [7]:

$$v(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-\varphi)+r^2} f(\theta) d\theta, \quad (11)$$

и поэтому

$$0 = v(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta.$$

Мы получили условие (9). Применяя оператор J_0^α к равенству $D_0^\alpha[u(r, \varphi)] = v(r, \varphi)$ и используя теорему 5, получим:

$$J_0^\alpha[v](r, \varphi) = J_0^\alpha[D_0^\alpha[u]](r, \varphi) = u(r, \varphi) - u(0).$$

Значит, $u(r, \varphi) = u(0) + J_0^\alpha[v](r, \varphi)$, и мы получаем (10). Необходимость доказана.

Покажем, что условие (9) является достаточным и для существования решения задачи 1. Действительно, если выполняется условие (9) и $v(r, \varphi)$ — решение задачи Дирихле (8), то $v(0) = 0$, и поэтому к гармонической функции $v(r, \varphi)$ можно применить оператор J_0^α . Причем по теореме 1 функция является гармонической в Ω .

Далее, в силу теоремы 5 и $D_0^\alpha[C] = 0$ имеем $D_0^\alpha[u](r, \varphi) = D_0^\alpha[J_0^\alpha[v]](r, \varphi) + D_0^\alpha[C] = v(r, \varphi)$, поэтому $D_0^\alpha[u](r, \varphi)|_{r=1} = v(r, \varphi)|_{r=1} = f(\varphi)$.

Таким образом, если выполняется условие (9) и $v(x)$ — решение задачи (8), то функция $u(x) = C + J_0^\alpha[v](x)$ является решением задачи 1. Теорема доказана.

Рассмотрим задачу 2. Так как при $\mu = 0$ $D_\mu^\alpha = D_0^\alpha$, то рассмотрим случай $\mu > 0$. Имеет место

Теорема 8. Пусть $\mu > 0$ и $f(\varphi) \in C[\pi, \pi]$. Тогда решение задачи 2 существует единственно и представляется в виде

$$u(r, \varphi) = J_\mu^\alpha[v](r, \varphi), \quad (12)$$

где $v(r, \varphi)$ — решение задачи Дирихле (8).

Доказательство. Пусть решение $u(r, \varphi)$ задачи 2 существует. Применим к функции $u(r, \varphi)$ оператор D_μ^α и обозначим $D_\mu^\alpha[u](r, \varphi) = v(r, \varphi)$. Ясно, что $v(r, \varphi) \in C(\partial\Omega)$. Поскольку $u(r, \varphi)$ — гармоническая функция в Ω , то в силу утверждения теоремы 1 функция $v(r, \varphi)$ — тоже гармоническая в круге Ω и $v(r, \varphi)|_{r=1} = D_\mu^\alpha[u](r, \varphi)|_{r=1} = f(\varphi)$. Таким образом, функция $v(r, \varphi)$ является решением задачи Дирихле (8). Причем, если $f(\varphi)$ — непрерывная функция, то решение этой задачи существует единственно, и $v(r, \varphi) \in C(\overline{\Omega})$. Применим к равенству $D_\mu^\alpha[u](r, \varphi) = v(r, \varphi)$ оператор J_μ^α и, используя теорему 5, получим:

$$J_\mu^\alpha[v](r, \varphi) = J_\mu^\alpha[D_\mu^\alpha[u]](r, \varphi) = u(r, \varphi).$$

Значит, $u(r, \varphi) = J_\mu^\alpha[v](r, \varphi)$, и мы получаем (12).

Пусть, наоборот, функция $v(x)$ является решением задачи Дирихле (8) при $f(\varphi) \in C(\partial\Omega)$. Ясно, что $v(r, \varphi) \in C(\overline{\Omega})$. Рассмотрим функцию $u(r, \varphi) = J_\mu^\alpha[v](r, \varphi)$. В силу теоремы 5 будем иметь

$$D_\mu^\alpha[u](r, \varphi) = D_\mu^\alpha[J_\mu^\alpha[v]](r, \varphi) = v(r, \varphi).$$

Значит, функция $u(x)$ — гармоническая в Ω и $D_\mu^\alpha[u](r, \varphi)|_{r=1} = v(r, \varphi)|_{r=1} = f(\varphi)$. Теорема доказана.

Из утверждений теорем 7 и 8 следует, что рассматриваемая задача в случае $\mu > 0$ обобщает задачу Дирихле, а в случае $\mu = 0$ — задачу Неймана.

Теорема 9. Пусть $f(\varphi) \in C[\pi, \pi]$. Тогда:

1) если $p = 0$, то решение задачи 3 существует единственно и представляется в виде

$$u(r, \varphi) = J_\mu^\alpha[v](r, \varphi); \tag{13}$$

2) если $p > 0$, то решение задачи 3 существует тогда и только тогда, когда выполняется условие (9). Если решение задачи 1 существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде

$$u(r, \varphi) = C + J_\mu^\alpha[v](r, \varphi), \tag{14}$$

где C — произвольная постоянная, а $v(r, \varphi)$ — решение задачи (8).

Доказательство.

1. Пусть $f(x) \in C(\partial\Omega)$, $p = 0$, и пусть решение $u(r, \varphi)$ задачи 3 существует. Применим к функции $u(r, \varphi)$ оператор $D_\mu^{\bar{\alpha}}$ и обозначим $D_\mu^{\bar{\alpha}}[u](r, \varphi) = v(r, \varphi)$. Ясно, что $v(r, \varphi) \in C(\partial\Omega)$. Поскольку $u(r, \varphi)$ — гармоническая функция в Ω , то в силу следствия 2 функция $v(r, \varphi)$ — также гармоническая в шаре Ω и $v(r, \varphi)|_{r=1} = D_\mu^{\bar{\alpha}}[u](r, \varphi)|_{r=1} = f(\varphi)$. Таким образом, функция $v(r, \varphi)$ является решением задачи Дирихле (8). Причем если $f(\varphi) \in C(\partial\Omega)$, то решение этой задачи существует, единственно и $v(x) \in C(\overline{\Omega})$. Применим к равенству $D_\mu^{\bar{\alpha}}[u](r, \varphi) = v(r, \varphi)$ оператор $J_\mu^{\bar{\alpha}}$ и, используя теорему 6, получим:

$$J_\mu^{\bar{\alpha}}[v](r, \varphi) = J_\mu^{\bar{\alpha}}[D_\mu^{\bar{\alpha}}[u]](r, \varphi) = u(r, \varphi).$$

Значит, $u(r, \varphi) = J_\mu^{\bar{\alpha}}[v](r, \varphi)$, и мы получаем (13).

Пусть, наоборот, функция $v(r, \varphi)$ является решением задачи Дирихле (8) при $f(\varphi) \in C(\partial\Omega)$. Ясно, что $v(r, \varphi) \in C(\overline{\Omega})$. Рассмотрим функцию $u(r, \varphi) = J_\mu^{\bar{\alpha}}[v](r, \varphi)$. В силу теоремы 6 будем иметь

$$D_\mu^{\bar{\alpha}}[u](r, \varphi) = D_\mu^{\bar{\alpha}}[J_\mu^{\bar{\alpha}}[v]](r, \varphi) = v(r, \varphi).$$

Значит, функция $u(r, \varphi)$ — гармоническая в Ω , и

$$D_\mu^{\bar{\alpha}}[u](r, \varphi)|_{r=1} = v(r, \varphi)|_{r=1} = f(\varphi).$$

2. Пусть $f(\varphi) \in C(\partial\Omega)$, $p > 0$, и пусть решение задачи 3 существует, и это $u(r, \varphi)$. Применим к функции $u(r, \varphi)$ оператор $D_\mu^{\bar{\alpha}}$ и обозначим $D_\mu^{\bar{\alpha}}[u](r, \varphi) = v(r, \varphi)$. Ясно, что $v(r, \varphi) \in C(\partial\Omega)$. Посколь-

ку $u(r, \varphi)$ — гармоническая функция в Ω , то в силу утверждения следствия 2 функция $v(r, \varphi)$ — тоже гармоническая в шаре Ω , $v(0) = D_{\mu}^{\alpha}[u](0) = 0$ и $v(r, \varphi)|_{r=1} = D_{\mu}^{\alpha}[u](r, \varphi)|_{r=1} = f(\varphi)$. Таким образом, функция $v(r, \varphi)$ является решением задачи Дирихле (8). С другой стороны, решение задачи (8) представляется в виде интеграла Пуассона (11), и поэтому

$$0 = v(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta.$$

Мы получили условие (9). Применяя оператор J_{μ}^{α} к равенству $D_{\mu}^{\alpha}[u](r, \varphi) = v(r, \varphi)$ и используя теорему 6, получим:

$$J_{\mu}^{\alpha}[v](r, \varphi) = J_{\mu}^{\alpha}[D_{\mu}^{\alpha}[u]](r, \varphi) = u(r, \varphi) - u(0).$$

Значит, $u(r, \varphi) = u(0) + J_{\mu}^{\alpha}[v](r, \varphi)$, и мы получаем (14). Необходимость доказана.

Покажем, что условие (9) является достаточным и для существования решения задачи 3. Действительно, если выполняется условие (9) и $v(r, \varphi)$ — решение задачи Дирихле (8), то $v(0) = 0$, и поэтому функция $u(r, \varphi) = J_{\mu}^{\alpha}[v](r, \varphi) + C$ является решением задачи 3.

Так как

$$D_{\mu}^{\alpha}[u](r, \varphi) = D_{\mu}^{\alpha}[J_{\mu}^{\alpha}[v]](r, \varphi) + D_{\mu}^{\alpha}[C] = v(r, \varphi),$$

то

$$D_{\mu}^{\alpha}[u](r, \varphi)|_{r=1} = v(r, \varphi)|_{r=1} = f(\varphi).$$

Таким образом, если выполняется условие (9) и $v(x)$ — решение задачи (8), то функция (14) является решением задачи 3. Теорема доказана.

References

- 1 *Kilbas A.A., Tityura A.A.* The Fractional derivative of the Hadamard-Marshaud type and inversion of fractional integrals // Rep. Akad. of Sciences of Belarus. — Vol. 50. — № 4, 5 (2006).
- 2 *Bavrin I.I.* The operator for harmonic functions and their Applications // Differ.equat. 9 — 1985. — Vol. 21 (1).
- 3 *Bitsadze A.V.* On the Neumann problem for harmonic functions // Rep. Akad. of Sciences USSR. — 1990, 11 (1990).
- 4 *Karachik V.V., Turmetov B.Kh.* One problem for the harmonic equation // Izv. Akad. Nauk UzbSSR, Ser. Phis.-Mat. sciences. — № 4, 17 (1990).
- 5 *Karachik V.V., Turmetov B.Kh., Torebek B.T.* On some integro-differential operators in the class of harmonic functions and their application // Mathem. Pr. 14 (1), 99 (2011).
- 6 *Turmetov B.Kh., Ilyasova M.T.* About one a boundary value problem for the Poisson equation with the boundary operator of fractional order in sense Hadamard-Marshaud // Bulletin of ENU. Series natural-technical sciences. — № 4 (2009). — P. 6–15.
- 7 *Bitsadze A.V.* Mathematical physics equations. — Moscow: Science, 1982. — P. 336.

Б.Х.Турметов, Н.З.Байметова

Адамар-Маршо түріндегі оператор қатысқан кейбір шеттік есептердің шешімділігі туралы

Мақалада гармониялық функциялар класында анықталған Адамар-Маршо түріндегі интегралды-дифференциалдық операторлардың қасиеттері зерттелді. Бұл теңдеуді құрудың жаңа әдісі, сондай-ақ осы қасиеттердің қолданылуы ретінде Лаплас теңдеуі үшін дөңгелекте кейбір шеттік есептердің шешімділігі қарастырылды.

B.H.Turmetov, N.Z.Bayimetova

On solvability of some boundary value problem with the Hadamard-Marshaud operator

In this work we investigate the properties of some integro-differential Hadamard-Marshaud operators in the class of harmonic functions. As an application of the obtained results we consider solvability of one boundary value problem for the Laplace equation on the unit ball.

УДК 517.95

Б.Х.Турметов, А.У.Куанишбаева

Международный казахско-турецкий университет им. Х.А.Ясави, г.Туркестан (E-mail: aknur_19_87@mail.ru)

Об одном методе решения дифференциальных уравнений дробного порядка

В статье рассмотрен новый метод решения дифференциальных уравнений дробного порядка. Этот метод является обобщением метода, основанного на методе операторного алгоритма. Также введены и исследованы новые типы специальных функций.

Ключевые слова: уравнения дробного порядка, оператор интегрирования Римана-Лиувилля, дифференцирование в смысле Капуто.

Введение. Пусть $X = X(\Omega)$ — некоторое линейное пространство функций, определенных в области $\Omega \subset R^n$, и L_1, L_2 — линейные операторы, заданные в пространстве $X = X(\Omega)$. Приведем следующее определение [1].

Определение 1. Бесконечную систему функций $f_k(t) \in X, k = 0, 1, 2, \dots$, любая конечная подсистема которой линейно независима, назовём f -нормированной относительно оператора L_1 в области Ω , если всюду в этой области выполняются равенства $L_1 f_k(t) = f_{k-1}(t), k \geq 1$, и $L_1 f_0(t) = f(t)$.

Если $f_0(t) = 0$, то система $f_k(t) \in X, k = 0, 1, 2, \dots$, называется 0-нормированной или просто нормированной [2]. Основным свойством нормированных систем является следующее: если $\{f_k(t)\}$ — система функций, f -нормированная относительно L_1 в области Ω таких, что ряд $y(t) = \sum_{a=0}^{\infty} f_a(t)$ сходится и допускает почленное применение операторов L_1 и L_2 , то функция $y(t)$ в области Ω будет решением уравнения

$$(L_1 - L_2)y(t) = f(t). \quad (1)$$

Приведем необходимые определения операторов интегро-дифференцирования дробного порядка, с которыми в дальнейшем будем работать.

Пусть $0 < \alpha$ — действительное число. Выражение

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0,$$

называется оператором интегрирования α -го порядка в смысле Римана-Лиувилля [3].

Пусть далее $m-1 < \alpha \leq m, m = 1, 2, \dots$. Рассмотрим оператор

$$D_*^\alpha f(t) = I^{m-\alpha} \frac{d^m}{dt^m} f(t).$$