Следовательно, если вектор-функции $\vec{\psi}, \vec{\omega}$ удовлетворяют уравнению (21), то

$$rot\ r = 0 \tag{43}$$

и интеграл в левой части равенства (42) равен нулю.

При численном решении задачи расчет давления по формуле (40) даст существенный выигрыш в машинном времени по сравнению с вычислением p из уравнения Пуассона (38).

References

1. *Ovsyannikov L.V., Makarenko N.I., Nalimov V.I.* Nonlinear problems of the theory of surface and internal waves. — Novosibirsk: Nauka, 1985. — 318 p.
2. *Kogin N.E., Kibel M.A., Rose N.V.* Theoretical Hydromechanics. 41. — M.: Fizmatgiz, 1963. — 583 p.
3. *Ladyzhenskaya O.A.* The mathematical theory of incompressible fluid viscous. — M.: Nauka, 1970. — 228 p.
4. *Fikhtengol'ts G.M.* A course in differential and integral calculus. — Vol. 3. — M.: Nauka, 1969. — 656 p.
5. *Sedov L.I.* Continuum Mechanics. — T. 1. — M.: Nauka, 1973. — 536 p.

УДК 517.51

Об ограниченности одного класса интегральных операторов с переменными пределами интегрирования

On boundedness of a class of integral operators with variable limits of integration

Арендаренко Л.С.

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана (E-mail: arendarenko_l@mail.ru)

Мақалада $K(x,s)$ теріс емес үздіксіз ядросымен $\mathrm{K}f(x) = \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,s) f(s) ds,\ \ x \in (a,b),$ түріндегі интегралдау шектері айнымалы болатын интегралдық операторлар қарастырылады. Автормен осы оператордың $L_{p,v}(a,b)$ Лебег салмақтық кеңістігінен p және q интегралдау параметрлері $1<q<p<\infty$ қатынасын қанағаттандырған жағдай үшін $L_{q,w}(a,b)$ Лебег салмақтың кеңістігіне шенелгендік критерийі алынды. Қарастырылатын оператор ядросы, Ойнаровтың жетілдірілген шартын қанағаттандыратын ядролар класына қарағанда, кеңірек класта жатыр.

This paper deals with integral operator with variable limits of integration, which is defined by the formula: $\mathrm{K}f(x) = \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,s) f(s) ds,\ \ x \in (a,b).$ Here the kernel $K(x,s)$ is non-negative and continuous function. The author derived a new criterion for the operator to be bounded from weighed Lebesgue space $L_{p,v}(a,b)$ to weighed Lebesgue space $L_{q,w}(a,b)$ in case the parameters p and q satisfy the condition $1<q<p<\infty.$ The kernel $K(x,s)$ of the operator considered is satisfy the condition which is more general that the modified Oinarov condition.

Мы рассматриваем задачу об ограниченности интегрального оператора с переменными пределами интегрирования

$$\mathrm{K}f(x) = \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,s) f(s) ds,\ x \in (a,b) \tag{1}$$

при некоторых ограничениях на ядро. Здесь $K(x,s)$ — неотрицательное непрерывное по совокупности переменных ядро, а пределы интегрирования $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

(i) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ локально абсолютно непрерывны и строго возрастают на интервале (a,b);

(ii) $\alpha(x)<\beta(x)$ для всех $x\in(a,b)$;

(iii) $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=a,\ \lim\limits_{x\to b}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to b}\beta(x)=b.$

Пусть $1<p,q<\infty,\ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1,\ \dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{p}$ и $(a,b)\subseteq R.$ Считаем, что функции $v(\cdot)$ и $w(\cdot)$ удовлетворяют следующему условию: $v^{-p'}(\cdot)$ и $w^{q}(\cdot)$, и локально интегрируемы на интервале (a,b). Определим весовое пространство Лебега $L_{p,v}(a,b)$ следующим образом:

$$L_{p,v}(a,b)=\left\{f:\ \|f\|_{p,v}=\left(\int_a^b|f(x)|^p v^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\}.$$

Пусть запись $A\approx B$ означает, что найдутся положительные константы c_1, c_2 такие, что $c_1A\le B\le c_2A.$ Через Z мы обозначаем множество целых чисел.

Впервые проблема ограниченности интегральных операторов с переменными пределами интегрирования появилась в работе Батуева и Степанова [1], в которой авторы изучили вопрос ограниченности оператора Стеклова $S_hf(x)=\int\limits_{x-h}^{x+h}f(s)ds,$ где $x\in R,$ а h — фиксированное положительное число. В работах [2–4] была изучена ограниченность интегральных операторов вида (1) с ядром, удовлетворяющим модифицированному условию Ойнарова в виде: найдется константа $d\ge1,$ не зависящая от переменных $x,\ t$ и $s,$ такая, что

$$d^{-1}\left(K(x,\beta(t))+K(t,s)\right)\le K(x,s)\le d\left(K(x,\beta(t))+K(t,s)\right),\ \begin{cases}t\le x;\\ \alpha(x)\le s\le\beta(t).\end{cases}\tag{2}$$

В [5] были введены классы ядер $O_n^{\pm}(\alpha,\beta)$, $n=0,1,...$, более широкие, чем ядра, удовлетворяющие условию (2), и для случая $1<p\le q<\infty$ были установлены критерии ограниченности интегральных операторов вида (1) с ядрами из этих классов. В данной статье мы получили критерий ограниченности интегрального оператора с ядром из класса $O_1^{+}(\alpha,\beta)$ при $1<q<p<\infty.$

Прежде чем перейти к описанию основного результата, сформулируем некоторые вспомогательные утверждения.

При доказательстве основной теоремы мы используем блочно-диагональный метод Батуева-Степанова [1], суть которого заключается в представлении интегрального оператора с двумя переменными пределами интегрирования в виде суммы интегральных операторов с одним переменным пределом и последующим применением критериев ограниченности для интегральных операторов типа Харди. Следующие леммы помогут нам реализовать этот метод.

Лемма 1 [6]. Пусть $0<q<p<\infty,\ \dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{p},\ U=\bigcup\limits_k U_k,\ V=\bigcup\limits_k V_k$ — объединения попарно непересекающихся множеств, и оператор $T=\sum\limits_k T_k,$ где $T_k:L_p(U_k)\to L_q(V_k).$ Тогда

$$\|T\|_{L_p(U)\to L_q(V)}\approx\left(\sum_k\|T_k\|^r_{L_p(U_k)\to L_q(V_k)}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Лемма 2 [6]. Пусть $1<q<p<\infty,\ \dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{p}$ и $a\le c<d\le b.$ Оператор $H^*f(x)=\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(d)}f(s)ds$ *ограничен из* $L_{p,v}(\alpha(c),\beta(d))$ *в* $L_{q,w}(c,d)$ *тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:*

$$M=\left(\int_c^d\left(\int_t^d w^q(x)dx\right)^{\frac{r}{p}}\left(\int_{\alpha(c)}^{\beta(t)}v^{-p'}(s)ds\right)^{\frac{r}{p'}}w^q(t)dt\right)^{\frac{1}{r}}<\infty,$$

при этом для нормы $\|H^*\|$ оператора H^* имеет место двухсторонняя оценка: $\|H^*\|\approx M.$

В работе [7] была исследована проблема ограниченности интегральных операторов типа Харди с ядрами, удовлетворяющими следующему условию:

Условие C_1. Будем говорить, что неотрицательная функция $K(x,s)$, определенная и измеримая на множестве $\{(x,s),\, a<s\le x<b\}$, удовлетворяет условию C_1, если она является неубывающей по первому аргументу, и существуют неотрицательные измеримые функции $V(\cdot)$, $R(\cdot,\cdot)$ и постоянная $d>1$ такие, что при любых x,t,s: $a<s\le t\le x<b$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{d}\big(R(x,t)V(s)+K(t,s)\big)\le K(x,s)\le d\big(R(x,t)V(s)+K(t,s)\big).$$

В частности, был получен следующий критерий ограниченности интегрального оператора:

$$Kf(x)=\int_a^x K(x,s)f(s)ds,\ x\in(a,b); \tag{3}$$

$$d^{-1}(K(x,t)+U(x)Q(t,s))\le K(x,s)\le d(K(x,t)+U(x)Q(t,s)).$$

Теорема А [7]. Пусть $1<q<p<\infty$ и ядро $K(x,s)$ оператора (3) удовлетворяет условию C_1 $1<q<p<\infty$. Оператор (3) $L_{p,v}(a,b)\to L_{q,w}(a,b)$ $L_{p,\rho}(R_+)\to L_{q,v}(R_+)$ ограничен тогда и только тогда, когда конечны величины

$$B_1=\left(\int_a^b\left(\int_a^t V^{p'}(s)v^{-p'}(s)ds\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\left(\int_t^b R^q(x,t)w^q(x)dx\right)^{\frac{p}{p-q}}V^{p'}(t)v^{-p'}(t)dt\right)^{\frac{p-q}{pq}};$$

$$B_2=\left(\int_a^b\left(\int_a^t K^{p'}(t,s)v^{-p'}(s)ds\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\left(\int_t^b w^q(x)dx\right)^{\frac{q}{p-q}}w^q(t)dt\right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

и при этом $\|K\|\approx B_1+B_2$, где $\|K\|$ - $L_{p,v}(a,b)\to L_{q,w}(a,b)$ — норма оператора (3).

Условие, модифицированное для интегральных операторов с переменными пределами интегрирования, соответствующее условию C_1, имеет следующий вид:

Условие C_2. Будем говорить, что неотрицательная функция $K(x,s)$ удовлетворяет условию C_2, если она определена и измерима на множестве $\Omega=\{(x,s),\, a<x<b, \alpha(x)\le s\le\beta(x)\}$, является неубывающей по первому аргументу и существуют неотрицательные измеримые функции $V(\cdot)$, $R(\cdot,\cdot)$ и постоянная $d>1$ такие, что при любых x,t,s: $a<t\le x<b$, $\alpha(x)\le s\le\beta(t)$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{d}\big(R(x,t)V(s)+K(t,s)\big)\le K(x,s)\le d\big(R(x,t)V(s)+K(t,s)\big).$$

Замечание 1. Используя замену $s=\beta(s)$, получаем, что условие C_2 для функции $K(x,s)$ равносильно условию C_1 для функций $\tilde K(x,s)=K(x,\beta(s))$ при $a<s\le t\le x<\alpha^{-1}(\beta(s))$.

Замечание 2. Не ограничивая общности, мы можем считать функцию $R(x,s)$ из условий C_1 и C_2 неубывающей по первому аргументу и невозрастающей по второму. Доказательство этого факта приведено в [7].

Для заданных функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ построим последовательность точек $\{t_k\}_{k\in Z}$ следующим образом [6]. Зафиксируем произвольную точку $t_0\in(a,b)$ и положим $t_{k+1}=\alpha^{-1}\big(\beta(t_k)\big)$, $k\in Z$.

Из определения функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ вытекает следующее представление отрезка (a,b):

$$(a,b)=\bigcup_{k\in Z}\big[t_k,t_{k+1}\big)=\bigcup_{k\in Z}\big[\alpha(t_k),\alpha(t_{k+1})\big)=\bigcup_{k\in Z}\big[\beta(t_k),\beta(t_{k+1})\big).$$

Для построенного таким образом разбиения имеет место следующая

Теорема 1. Пусть $1<q<p<\infty$ и ядро оператора (1) удовлетворяет условию C_2 $1<q<p<\infty$. Оператор (1) $L_{p,\rho}(R_+)\to L_{q,v}(R_+)$ ограничен из пространства $L_{p,v}(a,b)$ в пространство $L_{q,w}(a,b)$ тогда и только тогда, когда конечна величина

$$B=\left(\sum_{k\in Z}\left[B_{k,1}^r+B_{k,2}^r+B_{k,3}^r+B_{k,4}^r\right]\right)^{\frac{1}{r}},$$

где

$$B_{k,1}=\left(\int\limits_{\alpha(t_k)}^{\alpha(t_{k+1})}\left(\int\limits_{t_k}^{\alpha^{-1}(t)}R^q(x,t_k)w^q(x)dx\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int\limits_{t}^{\alpha(t_{k+1})}V^{p'}(s)v^{-p'}(s)ds\right)^{\frac{r}{q'}}V^{p'}(t)v^{-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{r}};$$

$$B_{k,2}=\left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\int\limits_{t_k}^{t}w^q(x)dx\right)^{\frac{r}{p}}\left(\int\limits_{\alpha(t)}^{\alpha(t_{k+1})}K^{p'}(t_k,s)v^{-p'}(s)ds\right)^{\frac{r}{p'}}w^q(t)dt\right)^{\frac{1}{r}};$$

$$B_{k,3}=\left(\int\limits_{\beta(t_k)}^{\beta(t_{k+1})}\left(\int\limits_{\beta^{-1}(t)}^{t_{k+1}}R^q(x,\beta^{-1}(t))w^q(x)dx\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int\limits_{\beta(t_k)}^{t}V^{p'}(s)v^{-p'}(s)ds\right)^{\frac{r}{q'}}V^{p'}(t)v^{-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{r}};$$

$$B_{k,4}=\left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\int\limits_{t}^{t_{k+1}}w^q(x)dx\right)^{\frac{r}{p}}\left(\int\limits_{\beta(t_k)}^{\beta(t)}K^{p'}(t,s)v^{-p'}(s)ds\right)^{\frac{r}{p'}}w^q(t)dt\right)^{\frac{1}{r}},$$

и при этом $\|K\|\approx B,$ где $\|K\|$ - $L_{p,v}(a,b)\to L_{q,w}(a,b)$ — норма оператора (1).

Доказательство. Для неотрицательной функции $f\in L_{p,v}(a,b)$ имеем

$$\|Kf\|_{q,w}^q=\int\limits_a^b w^q(x)\left(\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)}K(x,s)f(s)ds\right)^q dx=\sum_k\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}w^q(x)\left(\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)}K(x,s)f(s)ds\right)^q dx. \qquad (4)$$

Из свойств функций $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и определения разбиения $\{t_k\}_{k\in Z}$ вытекает, что для $x\in[t_k,t_{k+1}]$ выполнены соотношения $\alpha(t_k)\le\alpha(x)\le\alpha(t_{k+1})=\beta(t_k)\le\beta(x)\le\beta(t_{k+1})$. Следовательно, на каждом из интервалов $[t_k,t_{k+1}]$ мы можем представить оператор (1) в виде

$$\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)}K(x,s)f(s)ds=\int\limits_{\alpha(x)}^{\alpha(t_{k+1})}K(x,s)f(s)ds+\int\limits_{\beta(t_k)}^{\beta(x)}K(x,s)f(s)ds. \qquad (5)$$

Введем следующие операторы:

$$T_kf(x)=\int\limits_{\alpha(x)}^{\alpha(t_{k+1})}K(x,s)f(s)ds; \qquad T_k:L_{p,v}[\alpha(t_k),\alpha(t_{k+1})]\to L_{q,w}[t_k,t_{k+1}];$$

$$S_kf(x)=\int\limits_{\beta(t_k)}^{\beta(x)}K(x,s)f(s)ds; \qquad S_k:L_{p,v}[\beta(t_k),\beta(t_{k+1})]\to L_{q,w}[t_k,t_{k+1}].$$

Применяя лемму 1, с учетом (4), (5) получаем следующую оценку для нормы $\|Kf\|_{q,w}$:

$$\|Kf\|_{q,w}^q\approx\sum_k\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}w^q(x)\left(T_kf(x)\right)^q dx+\sum_k\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}w^q(x)\left(S_kf(x)\right)^q dx\approx$$

$$\approx\left[\left(\left(\sum_k \|T_k\|^r\right)^{\frac{q}{r}}+\left(\sum_k \|S_k\|^r\right)^{\frac{q}{r}}\right]\|f\|_{p,v}^q. \tag{6}$$

Поскольку ядро $K(x,s)$ удовлетворяет условию C_2 $1<q<p<\infty$, то для $x\geq t_k$, $\alpha(x)\leq s\leq\beta(t_k)=\alpha(t_{k+1})$ выполняется следующая двухсторонняя оценка: $K(x,s)\approx R(x,t_k)V(s)+K(t_k,s)$. Следовательно, для $x\in[t_k,t_{k+1}]$ имеет место следующая эквивалентность:

$$T_kf(x)=T_{k,0}f(x)+T_{k,1}f(x), \tag{7}$$

где

$$T_{k,0}f(x)=R(x,t_k);$$

$$T_{k,1}f(x)=\int\limits_{\alpha(x)}^{\alpha(t_{k+1})}K(t_k,s)f(s)ds.$$

Рассмотрим каждый из этих операторов отдельно. Подстановкой $\tau=\alpha^{-1}(s)$ мы получим, что неравенство

$$\left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}w^q(x)\left(T_{k,0}f(x)\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\leq C\left(\int\limits_{\alpha(t_k)}^{\alpha(t_{k+1})}f^p(s)v^p(s)ds\right)^{\frac{1}{p}}$$

эквивалентно следующему

$$\left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}w^q(x)R^q(x,t_k)\left(\int\limits_x^{t_{k+1}}V(\alpha(\tau))g(\tau)d\tau\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\leq C\left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}g^p(\tau)\tilde{v}^p(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{8}$$

где $g(\tau)=f(\alpha(\tau))\alpha'(\tau)$, $\tilde{v}(\tau)=v(\alpha(\tau))\alpha'(\tau)^{\frac{1-p}{p}}$.

Неравенство (8) является неравенством Харди, поэтому, используя классические результаты из теории неравенств Харди ([8, 9]), получаем следующую оценку:

$$\|T_{k,0}\|\approx\left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\int\limits_{t_k}^{y}R^q(x,t_k)w^q(x)dx\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int\limits_y^{t_{k+1}}V^{p'}(\alpha(\tau))\tilde{v}^{-p'}(\tau)d\tau\right)^{\frac{r}{q'}}V^{p'}(\alpha(y))\tilde{v}^{-p'}(y)dy\right)^{\frac{1}{r}},$$

из которой, в свою очередь, выполняя замены $s=\alpha(\tau)$ и $t=\alpha(y)$, получаем

$$\|T_{k,0}\|\approx B_{k,1}. \tag{9}$$

Для изучения ограниченности оператора $T_{k,1}$ мы применяем лемму 2 и получаем, что

$$\|T_{k,1}\|\approx B_{k,2}. \tag{10}$$

Чтобы оценить $\|S_k\|$, заметим, что величина $\|S_k\|$ является наилучшей постоянной в неравенстве

$$\left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}w^q(x)\left(\int\limits_{\beta(t_k)}^{\beta(x)}K(x,s)f(s)ds\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\leq\|S_k\|\left(\int\limits_{\beta(t_k)}^{\beta(t_{k+1})}f^p(s)v^p(s)ds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Выполняя в последнем неравенстве замену $s=\beta(y)$, мы придем к следующему неравенству:

$$\left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}w^q(x)\left(\int\limits_{t_k}^{x}K(x,\beta(y))g(y)dy\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\leq\|S_k\|\left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}g^p(y)\tilde{v}^p(y)dy\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $g(y)=f(\beta(y))\beta'(y)$, $\tilde{v}(\tau)=v(\beta(\tau))\beta'(\tau)^{\frac{1-p}{p}}$.

Поскольку ядро $K(x,\beta(y))$ удовлетворяет условию C_1, применяя теорему A, получим, что

$$\|S_k\|\approx\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\int_t^{t_{k+1}}R^q(x,t)w^q(x)dx\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_{t_k}^{t}V^{p'}(\beta(y))\tilde{v}^{-p'}(y)dy\right)^{\frac{r}{q'}}V^{p'}(\beta(t))\tilde{v}^{-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{r}}+$$

$$+\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\int_t^{t_{k+1}}w^q(x)dx\right)^{\frac{r}{p}}\left(\int_{t_k}^{t}K^{p'}(t,\beta(y))\tilde{v}^{-p'}(y)dy\right)^{\frac{r}{p'}}w^q(t)dt\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Из последней оценки, выполняя замены переменных $s=\beta(y)$ и $\tau=\beta(t)$, получаем

$$\|S_k\|\approx B_{k,3}+B_{k,4}. \tag{11}$$

Таким образом, утверждение теоремы вытекает из представлений (6), (7) и оценок (9)–(11).

Условия, характеризующие ограниченность интегральных операторов с переменными пределами интегрирования, в случае $1<q<p<\infty$ имеют неудобную дискретную форму, которая зависит от разбиения $\{t_k\}_{k\in Z}$. Однако мы можем улучшить достаточное условие следующим образом:

Следствие. Пусть $1<q<p<\infty$ и ядро оператора (1) удовлетворяет условию C_2 $1<q<p<\infty$. Если конечна величина $B=\left(B_1^r+B_2^r+B_3^r+B_4^r\right)^{\frac{1}{r}}$, где

$$B_1=\left(\int_a^b\left(\int_a^{\alpha^{-1}(t)}R^q(x,\beta^{-1}(t))w^q(x)dx\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_t^b V^{p'}(s)v^{-p'}(s)ds\right)^{\frac{r}{q'}}V^{p'}(t)v^{-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{r}};$$

$$B_2=\left(\int_a^b\left(\int_a^t w^q(x)dx\right)^{\frac{r}{p}}\left(\int_{\alpha(t)}^b K^{p'}(t,s)v^{-p'}(s)ds\right)^{\frac{r}{p'}}w^q(t)dt\right)^{\frac{1}{r}};$$

$$B_3=\left(\int_a^b\left(\int_{\beta^{-1}(t)}^b R^q(x,\beta^{-1}(t))w^q(x)dx\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_a^t V^{p'}(s)v^{-p'}(s)ds\right)^{\frac{r}{q'}}V^{p'}(t)v^{-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{r}};$$

$$B_4=\left(\int_a^b\left(\int_t^b w^q(x)dx\right)^{\frac{r}{p}}\left(\int_a^{\beta(t)} K^{p'}(t,s)v^{-p'}(s)ds\right)^{\frac{r}{p'}}w^q(t)dt\right)^{\frac{1}{r}},$$

то оператор (1) $L_{p,\rho}(R_+)\to L_{q,v}(R_+)$ ограничен из пространства $L_{p,v}(a,b)$ в пространство $L_{q,w}(a,b)$.

Доказательство. Для доказательства этого утверждения нам необходимо показать, что выполняется неравенство $B\le B.$ Рассмотрим $\sum_{k\in Z}\left(B_{k,i}\right)^r$, $i=1,2,3,4$, по отдельности.

Если t удовлетворяет условию $\alpha(t_k)\le t\le\alpha(t_{k+1})=\beta(t_k)$, то $t_k\ge\beta^{-1}(t)$. Поскольку мы можем считать функцию $R(\cdot,\cdot)$ невозрастающей по второму аргументу (замечание 2), то верна следующая оценка для $\sum_{k\in Z}\left(B_{k,1}\right)^r$:

$$\sum_{k\in Z}\left(B_{k,1}\right)^r=\sum_{k\in Z}\left(\int_{\alpha(t_k)}^{\alpha(t_{k+1})}\left(\int_{t_k}^{\alpha^{-1}(t)}R^q(x,t_k)w^q(x)dx\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_t^{\alpha(t_{k+1})}V^{p'}(s)v^{-p'}(s)ds\right)^{\frac{r}{q'}}V^{p'}(t)v^{-p'}(t)dt\right)\le$$

$$\le\sum_{k\in Z}\left(\int_{\alpha(t_k)}^{\alpha(t_{k+1})}\left(\int_{t_k}^{\alpha^{-1}(t)}R^q(x,\beta^{-1}(t))w^q(x)dx\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_t^{\alpha(t_{k+1})}V^{p'}(s)v^{-p'}(s)ds\right)^{\frac{r}{q'}}V^{p'}(t)v^{-p'}(t)dt\right)=B_1^r.$$

Для оценки $\sum_{k\in Z}\left(B_{k,2}\right)^r$, используя неубывание функции по первому аргументу, получаем

$$\sum_{k\in Z}\left(B_{k,2}\right)^r=\sum_{k\in Z}\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\int_{t_k}^{t}w^q(x)dx\right)^{\frac{r}{p}}\left(\int_{\alpha(t)}^{\alpha(t_{k+1})}K^{p'}(t_k,s)v^{-p'}(s)ds\right)^{\frac{r}{p'}}w^q(t)dt\right)\le$$

$$\le\sum_{k\in Z}\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\int_a^t w^q(x)dx\right)^{\frac{r}{p}}\left(\int_{\alpha(t)}^{b}K^{p'}(t,s)v^{-p'}(s)ds\right)^{\frac{r}{p'}}w^q(t)dt\right)=B_2^r.$$

Выполнение оценок $\sum_{k\in Z}\left(B_{k,3}\right)^r\le B_3$ и $\sum_{k\in Z}\left(B_{k,4}\right)^r\le B_4$ очевидно.

References

1. *Batuev E.N., Stepanov V.D.* Weighted inequalities of Hardy type // Siberian Math. J. — 1989. — Vol. 30. — P. 13–22.
2. *Chen T., Sinnamon G.* Generalized Hardy operators and normalizing measures // J. Ineqal. Appl. — 2002. — Vol. 7. — № 6. — P. 829–866.
3. *Gogatishvili A., Lang J.* The generalized Hardy operators with kernel and variable integral limits in Banach functional spaces // J. Ineqal. Appl. — 1999. — № 4. — P. 1–16.
4. *Stepanov V.D., Ushakova E.P.* On integral operators with variable limits of integration // Tr. Mat. Inst. Steklova. — 2001. — Vol. 232. — P. 290–309.
5. *Oinarov R.* Boundedness and compactness of integral operators with variable limits of integration in weighted Lebesgue spaces // Siberian Math J. — 2011. — Vol. 52. — № 6. — P. 1313–1328.
6. *Stepanov V.D., Ushakova E.P.* Kernel operators with variable intervals of integrations in Lebesgue spaces and applications // Math. Inequal. Appl. — 2010. — Vol. 13. — № 3. — P. 449–510.
7. *Arendarenko L., Oinarov R., Persson L.-E.* On the boundedness of some classes of integral operators in weighted Lebesgue spaces // Research Report. — 2011. — № 9. — P. 1–18.
8. *Kufner A., Persson L.-E.* Weighted inequalities of Hardy type. — New Jersey: Mir Scientific, 2003.
9. *Kufner A., Maligranda L., Persson L.-E.* The Hardy Inequality. About Its History and Some Related Results. — Pilsen: Vydavatelsky Servis, 2007.