УДК 51

Г.Ж. Каршыгина

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан
(E-mail: karshygina84@mail.ru)

Оптимальные вложения потенциалов типа Бесселя и Рисса на базе пространств Лоренца

В статье изучено пространство потенциалов на n-мерном евклидовом пространстве. В частности, в рассмотрение включены пространства классических потенциалов Бесселя и Рисса. Они построены на основе перестановочно-инвариантных пространств (ПИП) с помощью сверток с ядрами общего вида. Установлены интегральные свойства потенциалов. Для них найдены критерии вложения в ПИП и получены явные описания оптимальных ПИП для этих вложений в случае базового весового пространства Лоренца.

Ключевые слова: свертка, конусы убывающих перестановок, перестановочно-инвариантное пространство, пространство потенциалов, обобщенные потенциалы Бесселя и Рисса.

Введение

В работе изучается пространство потенциалов $H_E^G \equiv H_E^G(R^n)$ на n-мерном евклидовом пространстве:

$$H_E^G(R^n) = \{U = G * f : f \in E(R^n)\},$$

где $E(R^n)$ — перестановочно-инвариантное пространство (ПИП).

Мы используем здесь аксиоматику, развитую в книге К. Беннетта и Р. Шарпли [1, 2]. Ядро свертки назовем допустимым, если $G \in L_1(R^n) + E'(R^n)$. Здесь $E'(R^n)$ означает ассоциированное ПИП для ПИП $E(R^n)$. В работе рассмотрены два варианта дополнительных условий на допустимые ядра. Соответствующие потенциалы можно назвать обобщенными потенциалами Бесселя и Рисса. В частности, исследование охватывает обобщение классических потенциалов Бесселя и Рисса, построенных на базе $L_p(R^n)$ (их теория развита, например, в книгах С.М. Никольского [3], И. Стейна [4] и В.Г. Мазьи [5]). В данной работе обобщение строится на базе весового пространства Лоренца. Здесь мы существенно используем результаты работы [6], в которой установлены точные теоремы вложения в ПИП для обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса:

$$H_E^G(R^n) \subset X(R^n). \tag{1}$$

В них проблема вложения редуцирована к оценкам норм комбинированных операторов типа Харди на положительной полуоси. Установлено точное описание оптимального ПИП, в которое вложено пространство потенциалов. Это значит, что описано ПИП $X_0(R^n)$ такое, что вложение (1) справедливо при $X(R^n) = X_0(R^n)$, и если для ПИП верно вложение (1), то справедливо также вложение $X_0(R^n) \subset X(R^n)$.

Цель данной работы — дать явное описание оптимального ПИП $X_0(R^n)$ для вложения (1) в случае, когда базовое ПИП $E(R^n)$ совпадает с весовым пространством Лоренца $\Lambda_p(u)$.

Обозначения и предварительные сведения

Всюду в работе мы считаем, что $T \in (1, \infty)$ для потенциалов Бесселя, $T = \infty$ для потенциалов Рисса. Для ПИП $E \equiv E(R^n)$ обозначим через $E' \equiv E'(R^n)$ — ассоциированное ПИП, , т.е. ПИП, в котором норма задается соотношением

$$\|g\|_{E'} = sup\left\{\int\limits_{R^n} |gf| d\mu_n : f \in E; \|f\|_E \le 1\right\},$$

а через $\tilde{E} \equiv \tilde{E}(R_+)$, $\tilde{E'} \equiv \tilde{E}'(R_+)$ — их представления Люксембурга, т.е. такие ПИП, что

$$\|f\|_E = \|f^*\|_{\tilde{E}},\ \|g\|_{E'} = \|g^*\|_{\tilde{E'}}, \tag{2}$$

где f^* — убывающая перестановка функции f, т.е. неотрицательная, убывающая, непрерывная справа функция на $R_+ = (0, \infty)$, которая равноизмерима с f :

$$\mu_n\{x \in R^n : |f(x)| > y\} = \mu_1\{t \in R_+ : f^*(t) > y\}, y \in R_+.$$

Здесь μ — это мера Лебега (в R^n или на R_+, соответственно, см. [1; гл. 1, 2]). Введем пространство потенциалов $H_E^G \equiv H_E^G(R^n)$:

$$H_E^G(R^n) = \{F = G * f : f \in E(R^n)\}; \tag{3}$$

$$\|F\|_{H_E^G} = \inf\{\|f\|_E : \quad f \in E(R^n); \quad G * f = F\}. \tag{4}$$

Ядро представления G назовем допустимым, если

$$G \in L_1(R^n) + E'(R^n). \tag{5}$$

Свертка $G * f$ определяется как интеграл

$$(G * f)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R^n} G(x-y) f(y) dy \tag{6}$$

(мы ввели множитель $(2\pi)^{-n/2}$ для удобства при использовании преобразования Фурье). В общем случае для данной $F \in H_E^G$ не гарантирована единственность функции $f \in E$, дающая представление $G * f = F$. Поэтому в (4) взят инфимум по всем $f \in E$, дающим данное представление (фактор-норма).

Теорема 1. [6]. Пусть G — допустимое ядро. Тогда интеграл (6) сходится для почти всех $x \in R^n$. Кроме того, $H_E^G(R^n)$ есть банахово пространство, причем

$$H_E^G(R^n) \subset E(R^n) + L_\infty(R^n), \tag{7}$$

$$\|u\|_{E+L_\infty} \leq \|G\|_{L_1+E'} \|u\|_{H_E^G}, \quad u \in H_E^G. \tag{8}$$

Замечание 1. В случае допустимых ядер мы можем для потенциалов $F \in H_E^G$ определить убывающие перестановки F^* и

$$F^{**}(t) = \frac{1}{t} \int\limits_0^t F^*(\tau) d\tau, \quad t \in R_+. \tag{9}$$

Опишем представление обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса. Пусть $R \in (0, \infty]$. Скажем, что функция $\Phi : R_+ \to R_+$ принадлежит классу $\Im_n(R)$, если выполнены следующие условия:

1) Φ убывает и непрерывна на $(0, R)$;

Существует постоянная $c \in R_+$, такая, что

$$2) \int\limits_0^r \Phi(\rho) \rho^{n-1} d\rho \leq c \Phi(r) r^n, \quad r \in (0, R). \tag{10}$$

Например, для классических потенциалов Рисса

$$\Phi(\rho) = \rho^{\alpha - n} \in \Im_n(\infty), \qquad (0 < \alpha < n).$$

Для $\Phi \in \Im_n$ в силу убывания справедлива оценка

$$\int\limits_0^r \Phi(\rho) \rho^{n-1} d\rho \geq n^{-1} \Phi(r) r^n, \quad r \in (0, R). \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует, что для $\Phi \in \Im_n(R)$

$$\int\limits_0^r \Phi(\rho) \rho^{n-1} d\rho \cong \Phi(r) r^n, \quad r \in (0, R).$$

Для $\Phi \in \Im_n(R)$ обозначим

$$T = V_n R^n, R \in (0,\infty); \quad T = \infty, \quad R = \infty;$$

$$\varphi(\tau) := \Phi\left((\tau/V_n)^{1/n}\right) \in \Im_1(T); \quad f_\Phi(t,\tau) = min\left\{\varphi(t), \varphi(\tau)\right\}, \quad t,\tau \in (0,T). \tag{12}$$

Считаем, что ядро $G \in S_R(\Phi)$, если

$$G(x) \cong \Phi(\rho), \quad \rho = |x| \in (0,R). \tag{13}$$

Предложение 1. Пусть $\Phi \in \Im_n(\infty)$; $f_\Phi(t;\cdot) \in \tilde{E}'(R_+)$, $(t \in R_+)$; $G \in S_\infty(\Phi)$. Тогда G удовлетворяет условиям (5) и, следовательно, является допустимым.

Доказательство. Для $r \in R_+$ обозначим $B_r = \{x \in R^n : |x| \le r\}$, $B_r^c = R^n \backslash B_r$. Тогда

$$G = G_r + \tilde{G}_r; \quad G_r = G\chi_{B_r}, \quad \tilde{G}_r = G\chi_{B_r^c}. \tag{14}$$

При этом $G_r(x) \cong \Phi(|x|)\chi_{B_r}(x)$, так что, переходя к сферическим координатам, имеем

$$\int\limits_{R^n} |G_r| dx \cong \int\limits_0^r \Phi(\rho)\rho^{n-1} d\rho < \infty, \tag{15}$$

т.е. $G_r \in L_1(R^n)$. Далее

$$\tilde{G}_r(x) \le c\Phi(|x|)\chi_{B_r^c}(x) \le c\min\{\Phi(r), \Phi(|x|)\}. \tag{16}$$

Для измеримой функции $f : R^n \to R$ обозначим через $f^\sharp$ симметрическую перестановку функции, т.е. радиально симметричную неотрицательную функцию, убывающую и непрерывную справа как функция сферического радиуса $\rho = |x|$ и равноизмеримую с f . Известна формула, связывающая убывающую перестановку f^* и симметрическую перестановку $f^\sharp$. Именно

$$f^\sharp(x) = f^*(V_n|x|^n), \tag{17}$$

где V_n — объем шара единичного радиуса. Из (16) следует, что

$$\tilde{G}_r^\sharp(x) \le c\min\left\{\Phi(r), \Phi(|x|)\right\}.$$

Поэтому, обозначив $t = V_n r^n$; $\tau = V_n|x|^n$, имеем оценку

$$\tilde{G}_r^*(\tau) \le c\min\left\{\Phi\left((t/V_n)^{1/n}\right), \ \Phi\left((\tau/V_n)^{1/n}\right)\right\} = f_\Phi(t;\tau).$$

Значит,

$$\|\tilde{G}_r\|_{E'(R^n)} = \|\tilde{G}_r^*\|_{\tilde{E}'(R_+)} \le c\|f_\Phi(t;\cdot)\|_{\tilde{E}'(R_+)} < \infty.$$

Итак, представление (14) показывает, что ядро G допустимо. Отметим, что условия $f_\Phi(t;\cdot) \in \tilde{E}'R_+$ эквивалентны между собой при различных значениях $t \in R_+$ $\square$.

Определение 1. В условиях предложения 1 потенциалы $F \in H_E^G(R^n)$ назовем потенциалами типа Рисса [4-6]. Здесь

$$\Phi(\rho) = \rho^{\alpha-n} \in \Im_n(\infty); \quad G \in S_\infty^0(\Phi), \quad f_\Phi(t;\cdot) \in \tilde{E}'(R_+), \ t \in R_+ \ \Leftrightarrow \quad \tau^{\alpha/n-1} \in \tilde{E}'(t,\infty).$$

Приведем пример. Если $\alpha < n/p$, тогда $E = L_p$, $1 < p < \infty$.

Пусть

$$B_R = \{x \in R^n : \ |x| < R\}, \quad R \in R_+, \quad G_R^0 = G\chi_{B_R}, \quad G_R^1 = G\chi_{R^n/B_R}. \tag{18}$$

Определение 2. Пусть $R \in R_+$, $\Phi \in J_n$ и $X = X(R^n)$ является ПИП.

Если

$$(G_R^0)^\sharp(\rho) \cong \Phi(\rho), \quad \rho \in (0,R), \quad G_R^1 \in X(R^n), \tag{19}$$

тогда $G \in S_R(\Phi; X)$.

Если

$$(G_R^0)(x) \cong \Phi(\rho),\ \rho = |x| \in (0,R), \qquad G_R^1 \in X(R^n), \tag{20}$$

тогда $G \in S_R^0(\Phi;X)$. Ясно, что $S_R^0(\Phi;X) \subset S_R(\Phi;X)$.

Замечание 2. Пусть $R \in R_+,\quad \Phi \in J_n$ и $G \in S_R(\Phi;E')$. Тогда G является допустимым.

Определение 3. Пусть $R \in R_+,\quad \Phi \in J_n$ и

$$G \in S_R^0(\Phi; L_1 \cap E'), \qquad \int\limits_{R^n} G dx \neq 0. \tag{21}$$

Тогда потенциалы $F \in H_E^G(R^n)$ назовем потенциалами типа Бесселя [4-6].

Приведем критерий вложения потенциалов типа Бесселя и Рисса в ПИП $X = X(R^n)$ и опишем оптимальное ПИП $X_0 = X_0(R^n)$ для такого вложения. Важнейшую роль здесь играет комбинированный оператор типа Харди $\Re_{\varphi,T}:\ \tilde{E}_0(0,T) \to \tilde{X}(0,T), \quad T \in (0,\infty]$,

$$\Re_{\varphi,T}[g](t) = \int\limits_0^T f_\Phi(t,\tau) g(\tau) d\tau,\ t \in (0,T); \quad g \in \tilde{E}_0(0,T). \tag{22}$$

Здесь

$$\tilde{E}_0(0,T) = \left\{ g \in \tilde{E}(0,T): \quad 0 \le g \downarrow;\ \ g(t+0) = g(t), t \in (0,T) \right\}. \tag{23}$$

Отметим, что ввиду равенства (12) и убывания функции φ справедливо представление оператора в виде суммы двух операторов типа Харди на конусе убывающих функций:

$$\Re_{\varphi,T}[g](t) = \varphi(t) \int\limits_0^t g(\tau) d\tau + \int\limits_t^T \varphi(\tau) g(\tau) d\tau,\ t \in R_+: \quad g \in \tilde{E}_0(R_+). \tag{24}$$

Теорема 2 ([6]). 1) Для потенциалов типа Рисса вложение (1) эквивалентно ограниченности оператора $\Re_{\varphi,T}:\quad \tilde{E}_0(0,T) \to \tilde{X}(0,T), T = \infty$.

2) Для потенциалов типа Бесселя вложение (1) эквивалентно совокупности двух условий:

а) ограниченность оператора $R_{\varphi,T}:\ \tilde{E}_0(0,T) \to \tilde{X}(0,T)$;

б) справедливость вложения $E(R^n) \cap L_\infty(R^n) \subset X(R^n)$).

Оптимальным для вложения (1) является ПИП $X_0(R^n)$, норма в котором, в представлении Люксембурга, имеет вид

$$\|f\|_{\tilde{X}_0(0,T)} = sup \left\{ \int\limits_0^\infty f^* g^* dt : g \in L_0(R_+); \|\Re_{\phi,,T}[g^*]\|_{\tilde{E}'(0,T)} \le 1 \right\}. \tag{25}$$

Некоторые вспомогательные утверждения и основная теорема

Лемма 1 [7]. Справедливо соотношение

$$\|\Re_{\phi,T}\|_{\tilde{E}(0,T) \to \tilde{X}(0,T)} = \|\Re_{\phi,T}\|_{\tilde{E}_0(0,T) \to \tilde{X}(0,T)}.$$

Лемма 2 [7]. Справедливо соотношение

$$\Re_{\phi,T}^*[g^*] = \Re_{\phi,T}[g^*].$$

Доказательство. Так как g^* — убывающая перестановка функции g, а ϕ — из класса монотонных функций $\Im_1(\infty)$, то $\Re_{\phi,T}[g^*]$ как функция от t неотрицательна и убывает. В силу непрерывности функции ϕ и абсолютной непрерывности интеграла Лебега $\Re_{\phi,T}[g^*]$ функция от t является непрерывной. Таким образом, верно искомое соотношение.

ПИП — пространство Лоренца $E(R^n) = \Lambda^p(u)$ с весом u определяется в следующем виде:

$$\|f\|_{\Lambda^p(u)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty f^{*p}(t)u(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 < p < \infty; \\ ess \sup\limits_{t\in(0,\infty)} \{f^*(t)u(t)\}, \ p = \infty. \end{cases} \tag{26}$$

Пространством Лоренца с весом u называется и пространство $\Gamma^p(u)$:

$$\|f\|_{\Gamma^p(u)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty f^{**p}(t)u(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 < p < \infty; \\ ess \sup\limits_{t\in(0,\infty)} \{f^{**}(t)u(t)\}, \ p = \infty. \end{cases} \tag{27}$$

Пространство $\Gamma^\infty(u)$ называют также пространством Марцинкевича.

Ассоциированными к пространствам Лоренца являются пространства, определяемые следующим образом (см., например, [8]):

$$\Lambda^p(u)' = \begin{cases} \Gamma^\infty\left(\frac{t}{U(t)}\right), p = 1; \\ \Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right), 1 < p < \infty; \\ \Lambda^1\left(\frac{1}{ess \sup\limits_{0<s<t} u(s)}\right), p = \infty. \end{cases} \tag{28}$$

Пусть

$$\Omega_1 = \{f \geq 0 : f(\tau) \downarrow\}. \tag{29}$$

Введем величину

$$H_{\Omega_1}(B_\mu) = \sup_{f\in\Omega_1} \frac{\left(\int\limits_0^T (B_\mu f)^q d\gamma\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int\limits_0^T f^p d\beta\right)^{\frac{1}{q}}}, \quad \text{где} \quad p, q \in (1, \infty). \tag{30}$$

В качестве B_μ рассмотрим обобщенный оператор Харди

$$(B_\mu f)(t) = \int\limits_{[t,T)} f d\mu.$$

Здесь β, γ, μ — неотрицательные меры Бореля на $(0, T)$.

Для формулировки результатов об оценке величины $H_{\Omega_1}(B_\mu)$ используем следующие обозначения:

$$\omega_p(t) = \left(\int\limits_0^t d\beta\right)^{\frac{1}{p}}, \ t \in (0, T); \tag{31}$$

$$\Psi(t, \tau) = \int\limits_t^\tau d\mu, \quad 0 < t < \tau < T; \tag{32}$$

$$V_p(t) = \left\{\int\limits_t^T \Psi^{p'}(t, \tau)\left(-d\left[\frac{1}{\omega_p^{p'}(\tau)}\right]\right)\right\}^{\frac{1}{p'}}, \qquad p > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1; \tag{33}$$

$$W_q(t) = \left(\int\limits_0^t d\gamma\right)^{\frac{1}{q}}, t \in (0, T). \tag{34}$$

Критерий конечности $H_\Omega(B_\mu)$ при $p \le q$ будет сформулирован с помощью следующих величин:

$$E_{pq} = \sup_{\tau\in(0,T)} \left[\left(\int\limits_0^\tau \Psi^q(t,\tau)d\gamma(t) \right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{\omega_p(\tau)} \right], \quad p \le q; \tag{35}$$

$$F_{pq} = \sup_{\tau\in(0,T)} \left[V_p(t) W_q(t) \right], \qquad p \le q. \tag{36}$$

Кроме того, считаем, что $\beta = N_p(1) \Leftrightarrow \int\limits_0^1 d\beta = 1, \quad \int\limits_1^T d\beta = \infty.$

Предложение 2. Пусть $1 < p \le q < \infty, \quad \beta \in N_p(1)$, и пусть функции ω_p и W_q непрерывны на $(0,T)$ и $\omega_p(+0) = 0$. Тогда существует постоянная $c_1 = c_1(p,q) \in [1,\infty)$ такая, что

$$c_1^{-1}(E_{pq} + F_{pq}) \le H_{\Omega_1}(B_\mu) \le c_1(E_{pq} + F_{pq}). \tag{37}$$

Доказательство. В работе [9] было показано, что при $p \le q$

$$c_2^{-1}(\dot{E_{pq}} + F_{pq}) \le H_{\Omega_1}(B_\mu) \le c_2(\dot{E_{pq}} + F_{pq}), \tag{38}$$

где $\alpha \in (0,1)$ фиксировано; $\xi_\alpha(\tau) = \omega_p^{-1}(\alpha\omega_p(\tau)); \quad c_2 = c_2(p,q,\alpha) \in [1,\infty)$;

$$\dot{E}_{pq} = \sup_{\tau\in(0,T)} \left[\left(\int\limits_{\xi_\alpha(\tau)}^\tau \left(\int\limits_t^\tau d\mu \right)^q d\gamma(t) \right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{\omega_p(\tau)} \right].$$

Так как $\xi_\alpha(\tau) \in (0,\tau)$, то, в силу (32), получим

$$\dot{E_{pq}} \le E_{pq} = \sup_{\tau\in(0,T)} \left[\frac{\left(\int\limits_0^\tau \left(\int\limits_t^T g_\tau d\mu \right)^q d\gamma(t) \right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int\limits_0^T g_\tau^p d\beta \right)^{\frac{1}{p}}} \right],$$

где $g_\tau(\xi) = \chi_{(0,\tau)}(\xi) \in \Omega_1, \quad$ так как $\quad 0 \le g_\tau(\xi) = \chi_{(0,\tau)}(\xi) \downarrow$ (по ξ).

Отсюда

$$E_{pq} \le \sup_{g\in\Omega_1} \left[\frac{\left(\int\limits_0^T \left(\int\limits_t^T g d\mu \right)^q d\gamma(t) \right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int\limits_0^T g^p d\beta \right)^{\frac{1}{p}}} \right] = H_{\Omega_1}(B_\mu).$$

Из полученного неравенства и левой части оценки (38) следует левая часть оценки (37). Правая часть (37) очевидна, так как $\dot{E_{pq}} \le E_{pq}$. Предложение 2 доказано.

Замечание 3. Доказанное предложение 2 будем применять в следующих обозначениях:

$$d\beta(t) = (\varphi(t)t)^p \upsilon(t)dt,$$

т.е. $\omega_p(t) = \left(\int\limits_0^t (\varphi(\tau)\tau)^p \upsilon(\tau)d\tau \right)^{\frac{1}{p}} : \omega_p(T) = \infty, \qquad d\mu = \varphi(\tau)d\tau.$

Сформулируем основной результат работы. Пусть $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, пусть $T = \infty$ для потенциалов типа Рисса, $T \in (1,\infty)$ для потенциалов типа Бесселя пусть u — измеримая функция, $0 < u < \infty$ почти всюду на $(0,T)$ и для $t \in (0,T)$.

$$U(t) = \int\limits_0^t u(\tau)d\tau, \quad \upsilon(t) = \frac{t^{2p'} u(t)\varphi(t)^{p'}}{U(t)^{p'}}, \; V(t) = \int\limits_0^t \upsilon(\tau)d\tau.$$

Теорема 3. Пусть в обозначениях замечания 3 весовые функции таковы, что выполнены условия

$$H_{\Omega_1}(B_\mu) < \infty. \tag{39}$$

Тогда оптимальное ПИП $X_0(R^n)$ для вложения

$$H^G_{\Lambda^p(u)}(R^n) \subset X(R^n) \tag{40}$$

имеет эквивалентную норму в представлении Люксембурга:

1) для потенциалов типа Рисса

$$\|f\|_{\tilde{X}_0(0,T)} \cong \|f\|_{\Gamma^p(w;(0,T))};$$

2) для потенциалов типа Бесселя

$$\|f\|_{\tilde{X}_0(0,T)} \cong \|f\|_{\Gamma^p(w;(0,T))} + \|f\|_{\tilde{E}(R_+)},$$

где

$$w(t) = \frac{t^{p+p'-1} V(t) \int\limits_t^T \tau^{-p'} \upsilon(\tau) d\tau}{\left(V(t) + t^{p'} \int\limits_t^T \tau^{-p'} \upsilon(\tau) d\tau\right)^{p+1}}.$$

Замечание 3. Критерий выполнения условий (39) был приведен в предложении 2.

Доказательство теоремы. Воспользуемся формулой (22) из равенства (28). Из определения пространства Лоренца для нормы оператора $R_{\phi,T}$ в пространстве $(\Lambda^p(u))'$ имеем

$$\|R_{\phi,T}[g^*]\|_{\Lambda^p(u)'} = \|R_{\phi,T}[g^*]\|_{\Gamma^p\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right)} = \left(\int\limits_0^T \left(R^{**}_{\phi,T}[g^*](t)\right)^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)} dt\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Отсюда из того, что $\varphi \in J_1(T)$, так что $\frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau \cong \varphi(t)$, (в предложении оценки (10), и по лемме 2 следует

$$\|R^{**}_{\phi,T}[g^*(t)]\| \cong \|R^{*}_{\phi,T}[g^*(t)]\| = \|R_{\phi,T}[g^*(t)]\|_{\Lambda^p(u)'} = \left(\int\limits_0^T \left[\int\limits_0^T f_\phi(t,\tau) g^*(\tau) d\tau\right]^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)} dt\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Далее, используя определение функции $f_\phi(t,\tau)$ и учитывая неотрицательность подынтегральных функций, имеем

$$\|R_{\phi,T}[g^*]\|_{(\Lambda^p(u))'} = \left(\int\limits_0^T \left[\phi(t)\int\limits_0^t g^*(\tau)d\tau + \int\limits_t^T \phi(\tau) g^*(\tau) d\tau\right]^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \cong$$

$$\cong \left(\int\limits_0^T \left[\phi(t)\int\limits_0^t g^*(\tau)d\tau\right]^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)} dt\right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int\limits_0^T \left[\int\limits_t^T \phi(\tau) g^*(\tau) d\tau\right]^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)} dt\right)^{\frac{1}{p'}} = I_1 + I_2;$$

где

$$I_1 = \int\limits_0^T \left[\phi(t)\int\limits_0^t g^*(\tau)d\tau\right]^{p'} \tilde{u}(t) dt, \qquad \tilde{u}(t) = \frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)};$$

$$I_2 = \left(\int\limits_0^T \left[\int\limits_t^T \phi(\tau) g^*(\tau) d\tau\right]^{p'} \tilde{u}(t) dt\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Теперь оценим слагаемое I_2 через слагаемое I_1.

Отметим, что в силу убывания функции g^* интеграл I_1 можно оценить снизу:

$$I_1 \geq \left(\int\limits_0^T g^*(t)^{p'} (\phi(t)t)^{p'} \tilde{u}(t)dt \right)^{\frac{1}{p'}} := S. \tag{41}$$

Оценим I_2 сверху через S, т.е. докажем, что

$$I_2 \leq cS, \tag{42}$$

где $c \in (0, \infty)$ не зависит от функции $g \in M(0, \infty)$, измеримой по Лебегу. Отметим что $g \in M(0, \infty) \Leftrightarrow f = g^* \in \Omega_1$.

В результате имеем эквивалентность (42) $\Leftrightarrow H_{\Omega_1}(B_\mu) < \infty$ при $q = p'$.

Для оценки величины $H_{\Omega_1}(B_\mu)$ воспользуемся результатом предложения 2 и замечания 3, согласно которым

$$H_{\Omega_1}(B_\mu) < \infty \Leftrightarrow E_{qq} + F_{qq<\infty},$$

где

$$E_{qq} = \sup_{\tau \in (0,T)} \left[\left(\int\limits_0^\tau \Psi^q(t, \tau) d\gamma(t) \right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{\omega_q(\tau)} \right],$$

т.е.

$$E_{qq} = \sup_{\tau \in (0,T)} \left[\left(\int\limits_0^\tau \left(\int\limits_t^\tau \varphi d\xi \right)^q \upsilon(t)dt \right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{\left(\int\limits_0^\tau (\varphi(\xi)\xi)^q \upsilon(\xi)d\xi \right)^{\frac{1}{q}}} \right];$$

$$F_{qq} = \sup_{\tau \in (0,T)} [V_q(t)W_q(t)] = \sup_{\tau \in (0,T)} \left[V(t)^{\frac{1}{q}} \left\{ \int\limits_t^T \Psi^{q'}(t, \tau) \left(-d \left[\frac{1}{\omega_q^{q'}(\tau)} \right] \right) \right\}^{\frac{1}{q'}} \right].$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $\Psi^{q'}(t, t) = 0, \quad \omega_q(T) = \infty$,

$$\int\limits_t^T \Psi^{q'}(t, \tau) \left(-d \left[\frac{1}{\omega_q^{q'}(\tau)} \right] \right) = \int\limits_t^T \frac{1}{\omega_q^{q'}(\tau)} d\left[\Psi^{q'}(t, \tau) \right] = q' \int\limits_t^T \frac{\Psi^{q'-1}(t, \tau) d\left[\Psi(t, \tau) \right]}{\omega_q^{q'}(\tau)}.$$

Тогда

$$\int\limits_t^T \Psi^{q'}(t, \tau) \left(-d \left[\frac{1}{\omega_q^{q'}(\tau)} \right] \right) = q' \int\limits_t^T \frac{\left(\int\limits_t^\tau \varphi(\xi)d\xi \right)^{q'-1} \varphi(\tau)d\tau}{\left(\int\limits_0^\tau (\varphi(\xi)\xi)^{q'} \upsilon(\xi)d\xi \right)^{\frac{q'}{q}}} = q' \int\limits_t^T \frac{\left(\int\limits_t^\tau \varphi(\xi)d\xi \right)^{q'-1} \varphi(\tau)d\tau}{\left(\int\limits_0^\tau (\varphi(\xi)\xi)^q \upsilon(\xi)d\xi \right)^{q'-1}}.$$

Итак, при $q = p'$, т.е $q' = p$, получаем (42) $\Leftrightarrow E_{qq} + F_{qq} < \infty, \quad$ где

$$F_{qq} = \sup_{t>0} \left[V(t)^{\frac{1}{q}} \left\{ q' \int\limits_t^T \frac{\left(\int\limits_t^\tau \varphi(\xi)d\xi \right)^{q'-1} \varphi(\tau)d\tau}{\left(\int\limits_0^\tau (\varphi(\xi)\xi)^q \upsilon(\xi)d\xi \right)^{q'-1}} \right\}^{\frac{1}{q'}} \right].$$

Из (41) и (42) следует, что $I_1 + I_2 \approx I_1$, и тогда

$$\|R_{\varphi,T}[g^*]\|_{\Lambda^p(u)'} = \|R_{\varphi,T}[g^*]\|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right)} \approx I_1 = \left(\int\limits_0^T \left[\varphi(t)\int\limits_0^t g^*(\tau)d\tau\right]^{p'} \tilde{u}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^T \left[\varphi(t)\frac{1}{t}\int\limits_0^t g^*(\tau)d\tau\right]^{p'} \frac{t^{2p'}u(t)}{U^{p'}(t)}dt\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int\limits_0^T [\varphi(t)g^{**}(t)]^{p'} \frac{t^{2p'}u(t)}{U^{p'}(t)}dt\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \left(\int\limits_0^T g^{**}(t)^{p'} \frac{t^{2p'}u(t)\varphi^{p'}(t)}{U^{p'}(t)}dt\right)^{\frac{1}{p'}} = \|g\|_{\Gamma^{p'}(\upsilon)}. \tag{43}$$

Из формулы (25) видим, что норма в оптимальном ПИП $\widetilde{X}_0(0,T)$ является ассоциированной к норме (43), т.е.

$$\|f\|_{\widetilde{X}_0(0,T)} \cong \|f\|_{[\Gamma^{p'}(\upsilon)]'}, \tag{44}$$

где

$$\upsilon(t) = \frac{t^{2p'}u(t)\varphi^{p'}(t)}{U^{p'}(t)}.$$

В работе [10] показано, что норма, стоящая в правой части (44), может быть записана в следующем виде:

$$\|f\|_{[\Gamma^{p'}(\upsilon)]'} \cong \left(\int\limits_0^T \frac{t^{p+p'-1}f^{**}(t)^p V(t)\int\limits_t^T \tau^{-p'}\upsilon(\tau)d\tau}{\left(V(t) + t^{p'}\int\limits_t^T \tau^{-p'}\upsilon(\tau)d\tau\right)^{p+1}}dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

где

$$V(t) = \int\limits_0^t \upsilon(\tau)d\tau = \int\limits_0^t \frac{\tau^{2p'}u(\tau)\varphi^{p'}(\tau)}{U^{p'}(\tau)}d\tau;$$

$$\omega(t) = \frac{t^{p+p'-1}V(t)\int\limits_t^T \tau^{-p'}\upsilon(\tau)d\tau}{\left(V(t) + t^{p'}\int\limits_t^T \tau^{-p'}\upsilon(\tau)d\tau\right)^{p+1}}.$$

Функция $\omega(t)$ является весом, который входит в условие теоремы 3.

Таким образом, мы получаем, что:

1) для обобщенных потенциалов Рисса:

$$\|f\|_{\tilde{X}_0(R_+)} \cong \|f\|_{\Gamma^p(w;R_+)};$$

2) для обобщенных потенциалов Бесселя

$$\|f\|_{\tilde{X}_0(R_+)} \cong \|f\|_{\Gamma^p(w;(0,T))} + \|f\|_{\tilde{E}(R_+)},$$

тем самым, теорема доказана.

Замечание 4. В работе [7] были рассмотрены обобщенные потенциалы Рисса. При получении оптимального ПИП для вложения (37) на весовые функции было наложено условие, гарантирующее конечность величины:

$$H(B_\mu) = \sup_{0\le f\in M(0,\infty)} \frac{\left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_t^\infty g d\tau\right)^q \upsilon(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int\limits_0^\infty g(t)^q t^q \upsilon(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}},$$

а именно:

$$H(B_\mu) < \infty \Leftrightarrow B = \sup_{r>0} \left(\int_0^r \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int_r^\infty \frac{U^p(t)}{t^{2p} u^{\frac{p}{p'}}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Условия, наложенные в данной работе, учитывают убывание функций $f \in \Omega_1$ и эквивалентны конечности величины $H_{\Omega_1}(B_\mu)$. Эти условия, приведенные в предложении 2, менее жесткие, чем условие $B < \infty$. Кроме того, в данной работе в рассмотрение включены также обобщенные потенциалы Бесселя.

Список литературы

1 Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М.: Наука, 1990. — 724 с.

2 Bennett C. Interpolation of Operators / C.Bennett, R.Sharpley. — Leningrad: Academic Press INC, 1946. — 469 p.

3 Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М.Никольский. — М.: Наука, 1977. — 456 с.

4 Стейн И.М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / И.М.Стейн. — М.: Мир, 1973. — 344 с.

5 Мазья В.Г. Пространства Соболева / В.Г.Мазья. — Л.: ЛГУ, 1985. — 415 с.

6 Goldman M.L. Optimal Embeddings of Generalized Bessel and Riesz Potentials / M.L. Goldman // Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics. —2010.—№ 4.—pp. 1–21.

7 Гольдман М.Л. Оптимальные вложения потенциалов типа Бесселя и Рисса / М.Л. Гольдман, О.М. Гуссельникова // Вестн. РУДН. Сер. Математика, информатика, физика. — 2011. — № 3. — С. 5–17.

8 Малышева А.В. Оптимальные вложения обобщенных потенциалов Рисса / А.В. Малышева // Вестн. РУДН. Сер. Математика, информатика, физика. — 2013. — № 2. — С. 28–37.

9 Gogatishvili A. Characterisation of embeddings in Lorentz spaces / A.Gogatishvili, M.Johansson, C.A. Okpoti and L.-E.Persson // Bulletin Austral. Math. Soc. — 2007. — Vol. 76. — No. 1. — P. 69–92.

10 Гольдман М.Л. Об оценке равномерного модуля непрерывности обобщенного потенциала Бесселя / М.Л. Гольдман, А.В. Малышева // Труды Математического ин-та им.В.А.Стеклова. — 2013. — 283. — № 4. — С. 1–12.

Г.Ж. Қаршыгина

Лоренц кеңістігі базасында Бессел және Рисс түріндегі потенциалдарды тиімді іштестіру

Мақалада n-өлшемді евклид кеңістігінде потенциалдар кеңістігі қарастырылды. Олар жалпы түрдегі түйіндердің орамдарының көмегімен алмастырылымды-инвариантты кеңістіктер негізінде құрастырылған. Соның ішінде классикалық Бессел және Рисс потенциалдар кеңістіктері зерттелді. Сондайақ потенциалдардың интегралдық қасиеттері қойылуын және олар үшін алмастырылымды-инвариантты кеңістіктерге іштестіру критерийлері табылған. Салмағы бар Лоренц кеңістігі базасында тиімді іштестіру жолы дәлелденген.

Кілт сөздер: орам, кемімелі алмастырылымды конустар, алмастырылымды-инвариантты кеңістіктер, потенциалдар кеңістігі, жалпыланған Бессел және Рисс кеңістіктері.

G.Zh. Karshygina

Optimal embeddings potentials type Bessel and Riesz on the base of Lorentz spaces

In this article, we study the spaces of potentials is n-dimensional Euclidean space. They constructed on the basis of rearrangement-invariant spaces (RISs) by means of convolutions with kernels of general form. In particular included in the consideration, the classical spaces of potentials of Bessel and Riesz. For them, the criteria for embedding in the RIS are found, and explicit descriptions of the optimal RIS for these embeddings are obtained in the case of the basic weight Lorentz space.

Keywords: convolution, cones of decreasing rearrangements, potential space, generalized Bessel and Riesz potentials.

References

1 Tikhonov, A.N. & Samarsky, A.A. (1990). *Uravneniia matematicheskoi fiziki [The mathematical equation].* Moscow: Nauka [in Russian].

2 Bennett, C. & Sharpley, R. (1946). *Interpolation of Operators.* Leningrad: Academic Press INC.

3 Nikolsky, S.M. (1977). *Priblizhenie funktsii mnohikh peremennykh i teoremy vlozheniia [Approximation of functions of many variables and embedding theorems].* Moscow: Nauka [in Russian].

4 Steyn, I.M. (1973). *Sinhuliarnye intehraly i differentsialnye svoistva funktsii [Singular integrals and differential properties of functions].* Moscow: Mir [in Russian].

5 Mazya, B.G. (1985). *Prostranstva Soboleva [The Sobolev space].* Leningrad: LHU [in Russian].

6 Goldman, M.L. (2010). Optimal Embeddings of Generalized Bessel and Riesz Potentials. *Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics, 4,* 1–21.

7 Goldman, M.L.& Gusselnikova, O.M. (2011). Optimalnye vlozheniia potentsialov tipa Besselia i Rissa [Optimal Embeddings of Generalized Bessel and Riesz Potentials]. *Vestnik RUDN. Seriia matematika, informatika – Bulletin of the RUDN, series mathematics, computer science, physics, 3,* 5–17 [in Russian].

8 Malysheva, A.B. (2013). Optimalnye vlozheniia obobshchennykh potentsialov Rissa [Optimal embeddings of generalized Riesz potentials]. *Vestnik RUDN. Seriia matematika, informatika – Bulletin of the RUDN, series mathematics, computer science, physics, 2,* 28–37 [in Russian].

9 Gogatishvili, A., Johansson, M., Okpoti, C.A. & Persson, L.-E. (2007). Characterisation of embeddings in Lorentz spaces. *Bulletin Austral. Math. Soc., Vol. 76,* 1, 69–92.

10 Goldman, M.L. & Malysheva, A.B. (2013). Ob otsenke ravnomernoho modulia nepreryvnosti obobshchennoho potentsiala Besselia [On the estimation of the uniform modulus of continuity of the generalized Bessel potential]. Trudy Matematicheskoho instituta imeni V.A.Steklova – Proceeding of the V.A.Steklov Institute of Mathematics, 283, 4, 1–12 [in Russian].