УДК 519.865.65

Метод фиктивных областей для задачи двухфазной фильтрации несжимаемой жидкости

Method of the fictitious areas for problem of the two-phase filtering to incondensable liquid

Букенов М.М.

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: ramatur@mail.ru)

Қазіргі кезде мұнай табу жұмысы суландыру әдісі арқылы жүзеге асады, сондықтан айдамалайтын және эксплуатациялық скважиналардың орналасу жері маңызды мағынаға ие, себебі үлкен материалдық шығындарға әкеледі. Мақалада мұнай скважиналарының орналасуының күрделі геометриялық конфигурацияларынан құтылуға мүмкіндік беретін әдіс қолданылған. Алынған екіжақты бағалар алғашқы есептің нақты шешімін минималды ені бар жолаққа енгізуге мүмкіндік туғызады. Жуықталған шешімді анықтау үшін Ричардсон экстраполяциясы қолданылды.

At present mining to oils is realized by irrigation method so location forcing and working bore holes gains of no small importance since it is connected with great material expenses. In given work is used method, allowing avoid the complex geometric configuration of the location of the oil wells. Got double-sided estimations allow to conclude the exact decision of the source problem in band of the minimum width. The extrapolation Richardsona is used for revision of the drawn near decision.

Рассмотрим применение метода фиктивных областей для системы неэволюционного типа, которая будет для нас модельной в задачах фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости с учётом капиллярных сил.

Пусть D — некоторая плоская односвязная область с достаточно гладкой границей γ. В цилиндре $D_T=\left\{Dx\left[0<t\le T\right]\right\}$ с боковой поверхностью $S=\left\{\gamma\times\left[0<t\le T\right]\right\}$ ищется решение смешанной задачи Коши [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t}-\dfrac{\partial u_2}{\partial t}=div\left(k\lambda_1 gradu_1\right)+f_1; \\ -\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+\dfrac{\partial u_2}{\partial t}=div\left(k\lambda_2 gradu_2\right)+f_2; \\ u_1\left(x,0\right)-u_2\left(x,0\right)=\psi\left(x\right), x\in D,\, u_{i/S}=0,\, i=1,2. \end{cases} \tag{1}$$

В (1) $k=k\left(x\right)>0,\ f_i=f_i\left(x,t\right),\ \lambda_i=const>0,$ а нужные для обоснования метода фиктивных областей дополнительные требования на входные данные задачи (1) будут уточнены по ходу изложения. Прежде всего отметим, что если

$$2R=u_1-u_2,\ P=\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2, \tag{2}$$

исходная задача (1) распадается на две независимые задачи:

$$div\left(kgradP\right)+f_1+f_2=0,\ P\big|_s=0, \tag{3}$$

и

$$\frac{\partial R}{\partial t}=div\left(k\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}gradR\right)+\frac{\lambda_2 f_1-\lambda_1 f_2}{2\left(\lambda_1+\lambda_2\right)}, \tag{4}$$

$$2R\left(x,0\right)=\psi\left(x\right),\ R\big|_s=0.$$

При этом в задачу (3) время t входит лишь как параметр. Тем самым обоснование метода фиктивных областей на «дифференциальном уровне» можно провести отдельно для каждой из задач (3), (4). Заметим также, что если в исходной задаче (1) вместо однородного краевого условия первого рода рассмотреть однородное краевое условие второго рода, то вместо $P\big|_s=0$ и $R\big|_s=0$ в (3) и (4) соответственно будем иметь

$$\frac{\partial P}{\partial n_{|S}}=0,\ \frac{\partial R}{\partial n_{|S}}=0. \tag{5}$$

Для задачи (3), (4), если $k \in C\left(\overline{D}\right)$, $\psi \in W_2^1\left(D\right)$, справедливы оценки [2]

$$\left\|P\right\|_{W_2^2(D_T)} \le C_1 \left\|f\right\|_{L_2(D_T)}, \left\|P\right\|_{W_2^{2,1}(D_T)} \le C_2 \left(\left\|f\right\|_{L_2(D_T)} + \left\|\psi\right\|_{W_2^1(D_T)}\right). \tag{6}$$

В соответствии с методом фиктивных областей дополним исходную область D некоторой областью D_1 до области $D_0 = D \cup D_1$, с границей $\Gamma = \partial D_1 \cup \gamma$, $S^0 = \left\{\Gamma \times \left[0 < t \le T\right]\right\}$, [3–5]. В составной области D_0 рассмотрим вспомогательные задачи

$$div\left(k_\varepsilon gradP_\varepsilon + f_1^\varepsilon + f_2^\varepsilon = 0,\ x \in D, \Delta P_\varepsilon = 0,\ x \in D_1\right),$$

$$P_\varepsilon = 0, x \in S,\ P_\varepsilon = 0, x \in S^0,$$

$$\frac{\partial R_\varepsilon}{\partial t} = div\left(k_\varepsilon \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} gradR_\varepsilon\right) + \frac{\lambda_2 f_1^\varepsilon - \lambda_1 f_2^\varepsilon}{2\left(\lambda_1 + \lambda_2\right)},\ x \in D, \tag{7}$$

$$R_\varepsilon\left(x,0\right) = 0,5\psi\left(x\right),$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} - \Delta R_\varepsilon = 0, \tag{8}$$

$$R_\varepsilon\left(x,0\right) = 0,\ x \in D_1,$$

$$R_\varepsilon\left(x,0\right) = 0,\ \left(x,t\right) \in S^0.$$

На кривой разрыва S ставим условия согласования

$$\left[P_\varepsilon\right]_{|s} = 0,\ \left[R\right]_{|s} = 0,\ \frac{\partial R_\varepsilon}{\partial N}_{|s^+} = \frac{Q}{\varepsilon} \frac{\partial R_\varepsilon}{\partial n}_{|s^-}, \tag{9}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр; Q — параметр, принимающий значения: $Q = 1$ или $Q = -1$,

$$k, f_i^\varepsilon = \begin{cases} k\left(x\right), f_i\left(x,t\right), x \in D, \\ Q \cdot \varepsilon^\alpha, 0, x \in D_1. \end{cases} \tag{10}$$

Для задач (3), (4) $\alpha < 0$, а для тех же задач, но с краевыми условиями (5) $\alpha > 0$. Через $\frac{\partial}{\partial N}$ обозначена нормальная производная. Далее $\left[g\right]_{|s} = g_{|s^+} - g_{|s^-}$. Знаки минус или плюс означают, что соответствующая величина есть предельное значение при стремлении x к γ изнутри или извне D. Вспомогательные задачи (7)–(8) имеют прозрачный физический смысл. В зависимости от типа краевого условия исходной задачи в фиктивной области абсолютная проницаемость мала $\left(\alpha > 0\right)$ или велика $\left(\alpha < 0\right)$. Что касается начальных данных в фиктивной области D_1, то R есть аналог капиллярного давления, и поэтому равенство R нулю означает, что в фиктивной области присутствует только вытесняющая фаза. Условия согласования в (6), (7) означают, что при переходе через γ (γ — линия разрыва коэффициентов) непрерывны фазовые давления и фазовые скорости.

Для решения задач (8)–(10), (7), (9), (10) справедливы оценки:

$$\left\|R - \frac{1}{2}\left(R_\varepsilon^+ + R_\varepsilon^-\right)\right\|_{W_2^{2,1}(D_T)} \le C \cdot \varepsilon^2, \tag{11}$$

$$\left\|P - \frac{1}{2}\left(P_\varepsilon^+ + P_\varepsilon^-\right)\right\|_{W_2^{2,0}(D_T)} \le C \cdot \varepsilon^2, \tag{12}$$

где R_ε^+ и R_ε^-, P_ε^+ и P_ε^- соответствуют решению задач (8)–(10), (7), (9), (10) при $Q = 1$ и $Q = -1$. В дальнейшем задачу (8)–(10) назовём задачей I, задачу (7), (9), (10) — II.

Теперь решение задачи I будем искать в виде степенных рядов по параметру ε, $\alpha = -1$.

Пусть $B_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m V_m$ в D_T, $B_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m W_m$ в D_T^1, где $D_T^1 = \left\{D_1 \times \left[0 < t \le T\right]\right\}$ подставим формально в задачу I. Тогда получим систему относительно V_m и W_m:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V_0}{\partial t}=div\left(k\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}gradV_k\right)+\\+\dfrac{\lambda_2 f_1-\lambda_1 f_2}{2\left(\lambda_1+\lambda_2\right)},\ \left(x,t\right)\in D_T,\\V_0\left(x,0\right)=\psi\left(x\right),\ x\in D,\\V_0=0,\left(x,t\right)\in S,\end{cases}\quad\begin{cases}\dfrac{\partial W_1}{\partial t}-\Delta W_1=0,\left(x,t\right)\in D_T^1,\\W_1\left(x,0\right)=0,\ x\in D_1,\\\dfrac{\partial W_1}{\partial n}=Q\dfrac{\partial V_0}{\partial N},\left(x,t\right)\in S,\\W_1=0,\left(x,t\right)\in S,\end{cases}\tag{13}$$

при $m\geq 1$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V_m}{\partial t}=div\left(k\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}gradV_m\right)+\\+\dfrac{\lambda_2 f_1-\lambda_1 f_2}{2\left(\lambda_1+\lambda_2\right)},\ \left(x,t\right)\in D_T,\\V_m\left(x,0\right)=\psi\left(x\right),\ x\in D,\\V_m=W_m,\left(x,t\right)\in S,\end{cases}\quad\begin{cases}\dfrac{\partial W_{m+1}}{\partial t}-\Delta W_{m+1}=0,\left(x,t\right)\in D_T^1,\\W_{m+1}\left(x,0\right)=0,\ x\in D_1,\\\dfrac{\partial W_{m+1}}{\partial n}=Q\dfrac{\partial V_m}{\partial N},\left(x,t\right)\in S,\\W_{m+1}=0,\left(x,t\right)\in S^0.\end{cases}$$

Предположим, что функции в (13) удовлетворяют условиям $V_m\in W_2^{2,1}\left(D_T\right)$, $k=0,1,...,$ $W_m\in W_2^{2,1}\left(D_T^1\right)$, $k=1,2,...,$ тогда верна следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $f\in L_2\left(D_T\right)$, $\psi\in W_2^1\left(D\right)$, тогда найдётся ε_0 такое, что $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, что ряды B_1 и B_2 абсолютно сходятся в $W_2^1\left(D_T\right)$ и $W_2^1\left(D_T^1\right)$ соответственно, и справедливы равенства

$$R_\varepsilon=B_1,\left(x,t\right)\in D_T,R_\varepsilon=B_2,\left(x,t\right)\in D_T^1,\tag{14}$$

где R_ε — решение задачи I.

Доказательство. Из теории неоднородных граничных задач и условий согласования имеем

$$\left\|W_m\right\|_{W_2^{2,1}\left(D_T^1\right)}\leq C_1\left\|\frac{\partial W_m}{\partial n}\right\|_{W_2^{\frac{1}{2},1}(S)}=C_1\left\|\frac{\partial V_{m-1}}{\partial N}\right\|_{W_2^{\frac{1}{2},1}(S)}\leq C_1C_2\left\|V_{m-1}\right\|_{W_2^{2,1}\left(D_T\right)},\tag{15}$$

где константы C_1,C_2 зависят от областей D_1,D_2 и коэффициентов исходной задачи и не зависят от ε. Используем теорему о следах в соболевских пространствах W_2^p:

$$\left\|V_m\right\|_{W_2^{2,1}\left(D_T\right)}\leq C_3\left\|V_m\right\|_{W_2^{\frac{3}{2},1}(S)}=C_3\left\|W_m\right\|_{W_2^{\frac{3}{2},1}(S)}\leq C_3C_4\left\|W_m\right\|_{W_2^{2,1}\left(D_T^1\right)}.$$

Тогда из (6) и (15) следует

$$\begin{gathered}\left\|V_m\right\|_{W_2^{2,1}\left(D_T\right)}\leq C_5\left\|V_{m-1}\right\|_{W_2^{2,1}\left(D_T\right)},\ m\geq 1,\\\left\|V_0\right\|_{W_2^{2,1}\left(D_T\right)}\leq C\left(\left\|f\right\|_{L_2\left(D_T\right)}+\left\|\psi\right\|_{W_2^1(D)}\right),\end{gathered}\tag{16}$$

где $C_5=C_1\cdot C_2\cdot C_3\cdot C_4$.

Пусть $\varepsilon<\varepsilon_0=C_5^{-1}$, тогда ряд B_1 сходится абсолютно в $W_2^{2,1}\left(D_T\right)$. Для получения равенств (14) умножим (13) на ε^m и просуммируем по m:

$$\begin{gathered}LB_1=f,\ \left(x,t\right)\in D_T,\quad\frac{\partial B_2}{\partial t}-\Delta B_2=0,\ \left(x,t\right)\in D_T^1,\\S_1\left(x,0\right)=\psi\left(x\right),\quad B_2\left(x,0\right)=0,\ x\in D_1,\\B_1=B_2,\left(x,t\right)\in S,\quad\frac{\partial B_2}{\partial n}=Q\varepsilon\frac{\partial B_1}{\partial N},\ \left(x,t\right)\in S,\end{gathered}$$

L — оператор в левой части (13), $B_2\left(x,t\right)=0,\left(x,t\right)\in S_T^0$.

Отсюда следует, что $R_\varepsilon=B_1$ в D_T, $R_\varepsilon=B_2$ в D_T^1 при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$. Из теоремы вытекают существование и единственность решения вспомогательных задач (13), а также оценки

$$\left\|R-R_\varepsilon^+\right\|_{W_2^{2,1}\left(D_T\right)}\leq C_6\varepsilon\left(\left\|f\right\|_{L_2\left(D_T\right)}+\left\|\psi\right\|_{W_2^1}\left(D\right)\right),$$

$$\left\|R-R_{\varepsilon}^{-}\right\|_{W_2^{2,1}(D_T)} \le C_6'\varepsilon\left(\|f\|_{L_2(D_T)}+\|\psi\|_{W_2^1}(D)\right). \tag{17}$$

Здесь $R_{\varepsilon}^{+}=R_{\varepsilon}$ при $Q=1$, $R_{\varepsilon}^{-}=R_{\varepsilon}$ при $Q=-1$, из абсолютной сходимости рядов B_1 и B_2 вытекает (11). Убедимся в этом.

Теорема 2. Если $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, то верны оценки

$$\left\|R-\frac{1}{2}\left(R_{\varepsilon}^{+}+R_{\varepsilon}^{-}\right)\right\|_{W_2^{2,1}(D_T)} \le C_7\varepsilon^2\left(\|f\|_{L_2(D_T)}+\|\psi\|_{W_2^1(D)}\right), \tag{18}$$

где R — решение (4), R_{ε}^{+} — решение (8) при $Q=1$ и $Q=-1$ соответственно.

Доказательство. Из теоремы 1 вытекает следующее разложение:

$$R_{\varepsilon}^{+}=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m V_m^{+},\ (x,t)\in D_T,\ R_{\varepsilon}^{+}=\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m W_m^{+},\ (x,t)\in D_T^1, \tag{19}$$

где V_m^{+}, W_m^{+} — решение (13) при $Q=1$.

Используя теорему 1 для R_{ε}^{-}, получим:

$$R_{\varepsilon}^{-}=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m V_m^{-},\ (x,t)\in D_T,\ R_{\varepsilon}^{-}=\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m W_m^{-},\ (x,t)\in D_T^1. \tag{20}$$

Здесь V_m^{-}, W_m^{-} — решение (13) при $Q=-1$, легко видеть, что $V_0^{+}\equiv V_0^{-}\equiv R$ — решения (4).

Пусть $\overline{W_1}=W_1^{+}+W_1^{-}$, тогда функция $\overline{W_1}$ удовлетворяет следующей задаче:

$$\frac{\partial\overline{W_1}}{\partial t}-\Delta\overline{W_1}=0,\ (x,t)\in D_T^1,\quad \frac{\partial\overline{W_1}}{\partial n}=0,\ (x,t)\in S,$$
$$\overline{W_1}(x,0)=0,\ x\in D_1,\ \overline{W_1}=0,\ (x,t)\in S_T^0.$$

Отсюда получаем $\overline{W_1}=0$ или $W_1^{+}=-W_1^{-}$. Положим $\overline{V_1}=V_1^{+}+V_1^{-}$, тогда функция $\overline{V_1}$ является решением следующей задачи:

$$L\overline{V_1}=0,(x,t)\in D_T,$$
$$\overline{V_1}(x,0)=0,\ x\in D,$$
$$\overline{V_1}(x,t)=0,\ (x,t)\in S.$$

Отсюда получаем $\overline{V_1}=0$, тогда $V_1^{+}=-V_1^{-}$. Полагая, что $\overline{W_2}=W_2^{+}-W_2^{-}$, $\overline{V_2}=V_2^{+}-V_2^{-}$, получим $W_2^{+}=W_2^{-}$, $V_2^{+}=V_2^{-}$. Продолжая этот процесс при $m\ge 2$, имеем:

$$\begin{aligned}&V_m^{+}=V_m^{-},\ \text{если } m \text{ — чётное},\\&V_m^{+}=-V_m^{-},\ \text{если } m \text{ — нечётное}.\end{aligned} \tag{21}$$

Тогда, используя (19), (20), из (21) получим в D_T:

$$\begin{aligned}&R_{\varepsilon}^{+}=R+\varepsilon V_1^{+}+\varepsilon^2V_2^{+}+\ldots,\\&R_{\varepsilon}^{-}=R-\varepsilon V_1^{-}+\varepsilon^2V_2^{-}-\ldots\end{aligned} \tag{22}$$

Используя разложение (22) и оценки (17), приходим к (11):

$$\left\|R-\frac{1}{2}\left(R_{\varepsilon}^{+}+R_{\varepsilon}^{-}\right)\right\|\le\varepsilon^2\left\|V_2^{+}+\varepsilon^2V_4^{+}+\ldots\right\|_{W_2^{2,1}(D_T)}\le C_8\varepsilon^2\left\|V_0^{+}\right\|_{W_2^{2,1}(D_T)}\le C_9\varepsilon^2\left(\|f\|_{L_2(D_T)}+\|\psi\|_{W_2^{2,1}(D_T)}\right).$$

Оценка (12) получается аналогично.

Точность получаемых двусторонних приближений в данном случае ограничена оценкой (11), (12). Для того чтобы получить двусторонние оценки R, P с заданной точностью ε^P, применим идею экстраполяции Ричардсона.

Построим экстраполированные решения $U_p^{\pm}$, являющиеся линейной комбинацией $R_{\varepsilon_m}^{\pm}$, с некоторыми весами:

$$U_p^{+}=\sum\nolimits_{m=1}^{p}\beta_m R_{\varepsilon_m}^{+},\ U_p^{-}=\sum\nolimits_{m=1}^{p}\beta_m R_{\varepsilon_m}^{-},\ (x,t)\in D_T. \tag{23}$$

Конкретный вид коэффициентов β_m зависит от выбора последовательности $\varepsilon > \varepsilon_1 > ... > \varepsilon_p > 0$ и показателя точности p. Наиболее распространённым является выбор:

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon}{m},\ m = 1,..., p, \tag{24}$$

при котором коэффициенты β_m находятся в явной форме:

$$\beta_m = \frac{(-1)^{p-m} m^p}{m!(p-m)!},\ m = 1,..., p, \tag{25}$$

и удовлетворяют условиям

$$\sum\nolimits_{m=1}^{p} \beta_m = 1, \sum\nolimits_{m=1}^{p} \frac{\beta_m}{m_j} = 0,\ j = 1,....p-1.$$

При таком способе задания ε_m, β_m находим, что

$$U_p^+ = \sum_{m=1}^{p} \beta_m R_{\varepsilon_m}^+ = \sum_{m=1}^{p} \beta_m R + \sum_{m=1}^{p-1} \sum_{j=1}^{p} \beta_j \left(\frac{\varepsilon}{j}\right) V_m^+ + \sum_{m=1}^{p} \beta_m \left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^p V_p^+ + 0\left(\varepsilon^{p+1}\right) =$$

$$= R\sum_{m=1}^{p} \beta_m + \sum_{m=1}^{p-1} \varepsilon^m V_m^+ \cdot \sum_{j=1}^{p} \beta_j \left(\frac{1}{j}\right)^m + \varepsilon^p V_p^+ \cdot \sum_{j=1}^{p} \beta_j \left(\frac{1}{j}\right)^m + 0\left(\varepsilon^{p+1}\right) = R + C_{10} \varepsilon^p V_p^+ + 0\left(\varepsilon^{p+1}\right),$$

где $C_{10} = \sum\nolimits_{j=1}^{p} \beta_j \left(\frac{1}{j}\right)^p$.

Совершенно аналогично $U_p^- = R - C_{10} \varepsilon^p V_p^- + 0\left(\varepsilon^{p+1}\right)$.

Пусть p — нечётное, тогда $V_p^+ = -V_p^-$ и, значит,

$$U_p^+ = R + C_{10} \varepsilon^p V_p^+ + 0\left(\varepsilon^{p+1}\right),$$
$$U_p^- = R - C_{10} \varepsilon^p + 0\left(\varepsilon^{p+1}\right). \tag{26}$$

С помощью этого представления доказывается теорема.

Теорема 3. Пусть $f \in L_2(D_T)$, R — решение (4), $R_\varepsilon^+ = R_\varepsilon^-$ — решения (8), соответствующие выбору $Q = 1$ и $Q = -1$. Тогда для всех $(x,t) \in D_T$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ имеет место асимптотическое поточечное двустороннее неравенство

$$0\left(\varepsilon^{p+1}\right) + \min\left\{U_p^+, U_p^-\right\} \le R \le \max\left\{U_p^+, U_p^-\right\} + 0\left(\varepsilon^{p+1}\right), \tag{27}$$

где p — нечётное, а $U_\varepsilon^+ = U_\varepsilon^-$ определяются по формуле (26).

Аналогичные оценки получаются для функции P и в силу (2) для функций u_1, u_2.

References

1. *Konovalov A.N.* The problems of filtering of polyphase incondensable liquid. — Novosibirsk: Science, 1988.
2. *Ladygenskaya* Linear and quasi-linear equations of parabolic type. — M.: Science, 1967.
3. *Konovalov A.N.* The fictions regions method in problems of mathematical physics // Computing method in applied sciences and engineering — Amsterdam; New York; Oxford, 1980. — P. 29–40.
4. *Bukenov M.M.* The Method of the fictitious areas for Maxwell's ambience // The Numerical methods and software package for decision of the equations mathematical physicists. — Novosibirsk, 1985. — P. 117–125.
5. *Bukenov M.M.* The small parameters in algorithms of the problems of theory of bounce: Dis. ... kand. ph.-m. s. — Novosibirsk, 1986.