МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

К теории эллиптических систем на плоскости с сингулярной точкой

Theory of elliptic systems in the lane with singular point

Абдыманапов С.А.

АО «Финансовая академия», Астана (E-mail: rector@fin-academy.kz)

Мақалада Гельдер функциялары мағынасындағы үздіксіз кластағы сингулярлы нүктелі Карлеман-Векуа теңдеуінің шартсыз шешілетіндігі дәлелденген. Ол үшін Риман-Гильберттің жалпылама есебі шешілген, бірінші және екінші текті шешімдердің интегралдық көрінісі алынған, шешімдердің нөлдері мен полюстерінің құрылымдары зерттелген. Сингулярлы нүктелі жазықтықтағы теңдеу шешімдері нөлдерінің, полюстерінің және бос мүшесінің құрылымдарының үйлесетіндігі, бұл құрылымдардың теңдеудің коэффициенттеріне тәуелсіздігі, оларға тек қана теңдеудің шешілуі тәуелді болатындығы анықталған.

The unconditional resolvability of the Karleman-Vekua equation with the singular point in the class of continuous by Holder's mean functions was proved in the work. The extended Riman-Hilbert problem for it was solved, the integral approximation of the first and second kinds of solution is received and the structures of zeroes and solution poles are studied. It was established that the structures of zeroes, solution poles and the free component of the equation on a plane with singular coefficient coincide and these structures do not depend on the coefficients of the equation, only the resolvability of the equation depends on it.

Пусть G — ограниченная область комплексной плоскости с границей $\Gamma \in C^{1,\alpha}$, $0<\alpha<1$, содержащая внутри точку $z=a$. Через $S(G)$ обозначим класс измеримых и существенно ограниченных в G функций с нормой

$$\| f \|_{S(G)} = \sup_{z\in G} vrai\, | f(z) | = \lim_{p\to\infty} \| f \|_{L_p(G)} .$$

Приводим также определения пространств, используемых в дальнейшем.

$S_\nu(G,a)$ — класс функций $f(z)$, для которых $f(z)\cdot |z-a|^\nu \in S(G)$. Норму в $S_\nu(G,a)$ определим по формуле

$$\| f \|_{S_\nu(G,a)} = \| f(z)\cdot |z-a|^\nu \|_{S(G)} ,$$

где ν — действительное число.

$C_\nu(\bar{G},a)$ — класс функций $f(z)$, для которых $f(z)\cdot |z-a|^\nu \in C(\bar{G})$. Норму в $C_\nu(\bar{G},a)$ определим по формуле

$$\| f \|_{C_\nu(\bar{G},a)} = \| \, |z-a|^\nu \cdot f(z) \|_{C(\bar{G})} .$$

$U_0(G)$ — класс голоморфных в G функций. $W_p^1(G)$, $p>1$, — пространство С.Л.Соболева [1].

Рассмотрим в G уравнение

$$\partial_{\bar z} V + A(z)V + B(z)\bar{V} = F(z), \qquad (1)$$

где $\partial_{\bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$; $A(z), B(z) \in S_1(G)$; $F(z) \in S_\beta(G,a)$, $0<\beta<\frac{2}{q}$, $q>2$.

При $a=0$ мы получим уравнение

$$\partial_{\bar z} V + \frac{A_0(z)}{|z|} V + \frac{B_0(\bar z)}{|z|} V = F(z), \tag{2}$$

где $A_0(z), B_0(z) \in S(G)$, $F(z) \in S_\beta(G,0)$, $2 < \beta < \frac{2}{q}$, $q > 2$.

Уравнение вида (2) при $F(z) \equiv 0$ возникает в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения [2, 3]. При этом важную роль играет существование непрерывных решений уравнения (2) в окрестности особой точки $z=0$. В связи с этим уравнение (2) изучено во многих работах Л.Г.Михайлова, З.Д.Усманова, А.Б.Тунгатарова [4–6] и других.

Во всех известных нам исследованиях, как правило, предполагается достаточная малость коэффициентов $A_0(z)$ и $B_0(z)$ по абсолютной величине или малость области G, содержащей точку $z=0$. В настоящей работе доказывается существование решений $V(z)$ уравнения (2), удовлетворяющих условию $V(0)=0$, без каких-либо условий малости коэффициентов или окрестности особой точки $z=0$. В работе также получены интегральные представления первого и второго рода решений уравнения (1) из класса

$$W_q^1(G) \cap C_{\beta-1}(\bar G, a), \ 2 < \beta < \frac{2}{q}, \ q > 2, \tag{3}$$

решена задача Римана-Гильберта для уравнения (2) в классе (3) при $a=0$ без каких-либо условий малости, налагаемых на коэффициенты, которые имеются в работах [4–6]. Исследованы структуры нулей и особых точек решений уравнения (1) из класса (3).

Представления первого и второго рода решений уравнения (1) из класса (3). Решения уравнения (1) ищем из класса (3). Как и в монографии [1], доказывается, что уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$V(z) + (P_G V)(z) = (T_G F)(z) + \Phi(z), \ z \in G, \tag{4}$$

где $(T_G f)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dG_\zeta$; $\Phi(z) \in U_0(G)$; $(P_G f)(z) = \left(T_G f^*\right)(z)$; $f^* = A(z)\cdot f + B(z)\bar f$.

Так как функция $V(z)$ принадлежит классу (3), то $V(a)=0$. Поэтому из (4) получим:

$$(P_G V)(a) = (T_G F)(a) + \Phi(a). \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует:

$$V(z) + (P_{G,a} V)(z) = (T_{G,a} F)(z) + (z-a)\Phi(z), \ z \in G, \tag{6}$$

где $(P_{G,a} f)(z) = (P_G f)(z) - (P_G f)(a)$; $(T_{G,a} f)(z) = (T_G f)(z) - (T_G f)(a)$; $\Phi(z) \in U_0(G)$.

Таким образом, любое решение уравнения (1) из класса (3) удовлетворяет уравнению (6). Решение уравнения (6) ищем в классе $C_{\beta-1}(\bar G, a)$. Покажем, что любое решение уравнения (6) из класса $C_{\beta-1}(\bar G, a)$ принадлежит классу (3) и почти всюду в G удовлетворяет уравнению (1). В дальнейшем через M обозначим положительные постоянные, не зависящие от рядом стоящего сомножителя.

Лемма 1. Оператор $(T_{G,a} f)(z)$ переводит пространство $S_\beta(G,a)$, $0 < \beta < \frac{2}{q}$, $q > 2$, в пространство $C_{\beta-1}(\bar G, a) \cap C^\alpha(\bar G)$; $\alpha = 1 - \frac{2}{q}$; $0 < \beta < \frac{2}{q}$, $q > 2$, и при этом справедливы оценки

$$\| (T_{G,a} f)(z) \|_{C_{\beta-1}(\bar G, a)} \le M_\beta(G) \cdot \| f \|_{S_\beta(G,a)}; \tag{7}$$

$$\| (T_{G,a} f)(z) \|_{C^\alpha(\bar G)} \le M \cdot \| f \|_{L_q(G)}, \tag{8}$$

где $M_\beta(G) = \sup\limits_{z \in G} \frac{|z-a|^\beta}{\pi} \iint_G \frac{dG_\zeta}{|\zeta - a|^{1+\beta} |\zeta - z|}$.

Доказательство. Пусть $f(z)\in S_\beta(G,a)$, $0<\beta<\frac{2}{q}$, $q>2$. С помощью неравенства Адамара [1] получим $|(T_{G,a}f)(z)|\le M_\beta(G)\cdot\|f\|_{S_\beta(G,a)}\cdot|z-a|^{1-\beta}$. Отсюда следует неравенство (7). Так как $f(z)\in L_q(G)$, $q>2$, то неравенство (8) следует из оценки (6.8) работы [1]. Лемма доказана.

Лемма 2. Оператор $(P_{G,a}f)(z)$ переводит пространство $C_{\beta-1}(\overline{G},a)$ в пространство $C_{\beta-1}(\overline{G},a)\bigcap C^\alpha(\overline{G})$, $\alpha=1-\frac{2}{q}$, $0<\beta<\frac{2}{q}$, $q>2$, и при этом справедливы оценки

$$\|(P_{G,a}f)(z)\|_{C_{\beta-1}(\overline{G},a)}\le\mu\cdot M_\beta(G)\cdot\|f\|_{C_{\beta-1}(\overline{G},a)};\tag{9}$$

$$\|(P_{G,a}f)(z)\|_{C^\alpha(\overline{G})}\le\mu\cdot M\cdot\|f\|_{C_{\beta-1}(\overline{G},a)};\tag{10}$$

$$\|(P_{G,a}f_1)(z)-(P_{G,a}f_2)\|_{C_{\beta-1}(\overline{G},a)}\le\mu\cdot M_\beta(G)\cdot\|f_1-f_2\|_{C_{\beta-1}(G,a)},\tag{11}$$

где $\mu=\|A\|_{S_1(G,a)}+\|B\|_{S_1(G,a)}$; f_1,f_2 — любые функции из класса $C_{\beta-1}(\overline{G},a)$.

Доказательство. Пусть $f(z)\in C_{\beta-1}(\overline{G},a)$. Используя неравенство Адамара, имеем:

$$|(P_{G,a}f)(z)|<\mu M_\beta\cdot\|f\|_{C_{\beta-1}(\overline{G},a)}\cdot|z-a|^{1-\beta}.$$

Отсюда следует неравенство (9). Аналогично доказывается неравенство (11). Так как

$$f^*(z)\in L_q(G),\ 0<\beta<\frac{2}{q},\ q>2$$

и

$$\|f^*(z)\|_{L_q(G)}\le M\cdot\mu\cdot\|f\|_{C_{\beta-1}(G,a)}<\infty,$$

то неравенство (10) следует из формулы (6.8) [1; 56]. Лемма доказана.

Из вида уравнения (6) и лемм 1 и 2 в силу результатов работы [1] вытекает, что любое решение этого уравнения из класса $C_{\beta-1}(\overline{G},a)$ принадлежит классу $W_q^1(G)$, $0<\beta<\frac{2}{q}$, $q>2$, и удовлетворяет почти всюду в G уравнению (1). Таким образом, справедлива

Теорема 1. Любое решение уравнения (1) из класса (3) удовлетворяет уравнению (6). И обратно: если $\Phi(z)\in U_0(G)$, то любое решение из класса $C_{\beta-1}(\overline{G},a)$ уравнения (6) принадлежит классу $W_q^1(G)$, $0<\beta<\frac{2}{q}$, $q>2$, и удовлетворяет почти всюду в G уравнению (1).

Пусть $(K_\Gamma f)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(t)}{t-z}dt$, $\left(K_{\Gamma,a}f\right)(z)=\left(K_\Gamma f\right)(z)-(K_\Gamma f)(a)$. Если действуем оператором $\left(K_\Gamma f\right)(z)$ при $z\in G$ к обеим частям уравнения (6), то получим:

$$\left(K_\Gamma V\right)(z)+\left(P_G\,V\right)(a)=\left(T_G\,F\right)(a)+(z-a)\Phi(z).\tag{12}$$

Отсюда при $z=a$ имеем:

$$\left(K_\Gamma\,V\right)(a)+\left(P_G\,V\right)(a)=\left(T_G\,F\right)(a).\tag{13}$$

Из (12) и (13) следует, что $(z-a)\,\Phi(z)=\left(K_{\Gamma,a}V\right)(z)$. Следовательно, интегральное представление первого рода для решений из класса (3) уравнения (1) имеет вид: $V(z)=-\left(P_{G,a}V\right)(z)+\left(K_{\Gamma,a}V\right)(z)+\left(T_{G,a}\,F\right)(z)$, $z\in G$. Так как $0<\beta<1$, то из $V(z)\in C_{\beta-1}(\overline{G},a)$ следует, что $V(z)\in C(\overline{G})$ и $V(a)=0$. Поэтому из леммы 2 по теореме Арцела вытекает, что оператор $P_{G,a}$ вполне непрерывен в классе $C_{\beta-1}(\overline{G},a)$ и переводит этот класс в $C_{\beta-1}(\overline{G},a)\bigcap C^\alpha(\overline{G})$. Следовательно, для доказательства разрешимости уравнения (6) в классе $C_{\beta-1}(\overline{G},a)$ достаточно показать, что соответствующее однородное уравнение

$$V(z)+\left(P_{G,a}V\right)(z)=0,\ z\in G\tag{14}$$

имеет только тривиальное решение в $C_{\beta-1}(\overline{G},a)$.

Для этой цели докажем основную лемму для однородного уравнения
$$\partial_{\bar z} V + A(z)V + B(z)\bar V = 0,\ z\in G. \tag{15}$$
Лемма 3. Любое решение уравнения (15) из класса (3) представимо в виде
$$V(z) = \Phi(z)\cdot \exp(-\omega(z)),\ z\in G, \tag{16}$$
где $\Phi(z)\in U_0(G)\bigcap S_\nu(G,a)$, $\nu=\beta-1-8\mu\pi$, $\omega(z)=\left(T_G V^\wedge\right)(z)$, $V^\wedge = \dfrac{V^*}{V}$, $V^* = A(z)V + B(z)\bar V$.

Доказательство. Так как $V(z)=\partial_{\bar z}\omega\in L_p(G)$, $p>1$, то, как и в [1; 91], можно показать, что $\exp\omega(z)\in W_p^1(G)$, $p>1$, и $\partial_{\bar z}\exp\omega(z)=\exp\omega(z)\cdot\partial_{\bar z}\omega = V^\wedge(z)\cdot\exp\omega(z)$. Но тогда в силу теоремы 1.38 работы [1]
$$\partial_{\bar z}\left(V(z)\exp\omega(z)\right)=\exp\omega(z)\cdot\left(\partial_{\bar z}V + V\cdot\partial_{\bar z}\omega\right)=\exp\omega(z)\cdot\left(\partial_{\bar z}V + A(z)V+B(z)\bar V\right)=0.$$
Следовательно, в силу результатов работы [1] имеет место представление (16), где $\Phi(z)\in U_0(G)$. В силу неравенства Адамара [1] имеем: $|\omega(z)|\le M(G)+8\mu\pi|\ln|z-a||$, где $M(G)>0$ — постоянное, зависящее только от G.

Отсюда следует, что $\exp(-\omega(z))\in S_{8\pi\mu}(G,a)$. Но тогда из (16) следует, что $\Phi(z)\in S_\nu(G,a)$, $\nu=\beta-1-8\pi\mu$ и $\Phi(a)=0$. Лемма доказана.

Следствие 1. Если непрерывное в G решение $V(z)$ уравнения (15) имеет нуль бесконечного порядка в точке $z=a$, то $V(z)\equiv 0$ в G.

Докажем теперь, что однородное уравнение (14) имеет только тривиальное решение в классе $C_{\beta-1}(\bar G,a)$.

Доказательство проводим от противного. Пусть уравнение (14) имеет нетривиальное решение $V(z)$ из класса $C_{\beta-1}(\bar G,a)$. Тогда из вида (14) следует, что $V(z)\in C(E)\bigcap U_0(E-\bar G)$ и $V(a)=0$. Здесь E — комплексная плоскость.

С другой стороны, $V(z)$, как решение уравнения (15), представимо в виде (16), где $\Phi(z)\in U_0(G)\bigcap S_\nu(G,a)$, $\nu=\beta-1-8\mu\pi$. Так как $\omega(z)\in U_0(E-\bar G)$, то из (16) вытекает, что $\Phi(z)\in U_0(E)$ и $\Phi(a)=0$. Это означает, что $\Phi(z)\equiv 0$ и, следовательно, $V(z)\equiv 0$. Таким образом, доказана

Теорема 2. Уравнение (6) разрешимо в классе $C_{\beta-1}(\bar G,a)$ для любой правой части из этого же класса.

Из этой теоремы в силу теоремы 1 следует

Теорема 3. Уравнение (1) разрешимо в классе (3).

Нули и полюсы решений уравнения (1). Пусть k — целое число. Рассмотрим в G уравнение (1), где $F(z)\in S_{\beta-k}(G,a)$, $0<\beta<1$, $A(z), B(z)\in S_1(G,a)$.

Решение уравнения (1) из класса
$$W_q^1(G)\bigcap S_{\beta-k-1}(G,a) \tag{17}$$
ищем в виде
$$V(z)=(z-a)^k W(z), \tag{18}$$
где $W(z)$ — новая неизвестная функция из класса (3).

Подставив (18) в (1), имеем:
$$\partial_{\bar z}W + A(z)W + B_k(z)\bar W = F_k(z), \tag{19}$$
где $B_k(z)=B(z)\exp(-2ik\arg(z-a))$, $F_k(z)=(z-a)^{-k}F(z)$.

Очевидно, что $B_k(z)\in S_1(G,a)$, $F_k(z)\in S_\beta(G,a)$. Поэтому в силу результатов §1 уравнение (19) имеет решения из класса (3), которые находятся из уравнения
$$W(z)+\left(P_{G,a}^\wedge W\right)(z)=\left(T_{G,a}F_k\right)(z)+(z-a)\Phi(z), \tag{20}$$
где $\left(P_{G,a}^\wedge f\right)(z)=\left(T_{G,a}f_k^*\right)(z)$, $f_k^*(z)=A(z)\cdot f + B_k(z)\cdot\bar f$.

Итак, справедлива

Теорема 4. Уравнение (1), где $F(z)\in S_{\beta-k}(G,a)$; $0<\beta<\dfrac{2}{q}$; $q>2$; k — целое число; $A(z),\ B(z)\in S_1(G,a)$, имеет решения из класса (17), которые находятся по формулам (18), (20).

Замечание 1. При $k>0$ свободный член и решения уравнения (1) имеют в точке $z=a$ общие нули, а при $k<0$ — полюсы. Из теоремы 4 следует, что у решений уравнения (1) кратность таких нулей на единицу больше кратности нулей свободного члена, а порядок таких полюсов на единицу меньше порядка полюсов свободного члена.

Обобщенная задача Римана-Гильберта для уравнения (1). Пусть $R>0$, $G=\{z:|z|<R\}$, $\Gamma=\{t:|t|=R\}$.

Рассмотрим в G уравнение (1), где $A(z),\ B(z)\in S_1(G,0)$; $F(z)\in S_\beta(G,0)$; $0<\beta<\dfrac{2}{q}$; $q>2$.

Решение уравнения (1) ищем в классе

$$W_q^1(G)\bigcap S_{\beta-1}(G,0),\ 0<\beta<\frac{2}{q},\ q>2. \tag{21}$$

Рассмотрим в G обобщенную задачу Римана-Гильберта для уравнения (1) в каноническом виде [1]. К такому виду с помощью конформного отображения приводятся более общие случаи [1].

Задача R-G. Требуется найти решение уравнения (1) из класса (21), удовлетворяющее граничному условию

$$\mathrm{Re}[t^{-m}V(t)]=g(t),\ t\in\Gamma, \tag{22}$$

где m — целое число; $g(t)\in C^\alpha(\Gamma)$; $\alpha=1-\dfrac{2}{q}$; $q>2$.

1°. Пусть $m\ge 1$. Для решения задачи R-G используем уравнение (6) при $a=0$:

$$V+\left(P_{G,0}V\right)(z)=\left(T_{G,0}F\right)(z)+z\Phi(z),\ z\in G, \tag{23}$$

где $\Phi(z)\in U_0(G)\bigcap C^\alpha(\bar{G})$; $\alpha=1-\dfrac{2}{q}$.

Следуя [1, гл. 4, §7], в уравнении (23) функцию $\Phi(z)$ представим в виде

$$\Phi(z)=\Phi_0(z)-\left(P_mV\right)(z)+\left(Q_mF\right)(z), \tag{24}$$

где

$$\Phi_0(z)\in U_0(G)\bigcap C^\alpha(\bar{G}),\ \left(P_mV\right)(z)=\left(Q_mV^*\right)(z),\ V^*=A(z)V+B(z)\bar{V};$$

$$\left(Q_mf\right)(z)=-\frac{z^{2m}}{\pi R^{2m}}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}\,dG_\zeta}{R^2-\bar{\zeta}z}-\frac{z^{2m-1}}{\pi R^{2m}}\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta}}\,dG_\zeta.$$

После этого, подставив представление (23) для $V(z)$ в граничное условие (22), имеем:

$$\mathrm{Re}[t^{-m+1}\Phi_0(t)]=g(t).$$

Следуя [1, гл. 4, §7], можно получить общее решение этой задачи:

$$\Phi_0(z)=\left(D_{m-1}g\right)(z)+\Phi_{0m}(z), \tag{25}$$

где

$$\left(D_mg\right)(z)=\frac{z^m}{2\pi i}\int_\Gamma g(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t};$$

$$\Phi_{0m}(z)=\sum_{k=0}^{m-2}\left(\alpha_k(z^k-R^{2(k-m-1)}z^{2m-k-2})+i\beta_k(z^k-R^{2(k-m+1)}\cdot z^{2m-k-2})\right)+i\beta_mz^{m-1},\ \text{если } m\ge 2. \tag{26}$$

$\Phi_{0m}(z)=i\beta_m$, если $m=1$. Здесь α_k,β_k, $(k=\overline{0,m-2})$, β_m — произвольные действительные числа.

Из формул (23–25) следует:

$$V(z)+(P_m^\wedge V)(z)=(D_mg)(z)+(Q_m^\wedge F)(z)+z\Phi_{0m}(z),\ z\in G, \tag{27}$$

где $\left(P_m^\wedge V\right)(z)=\left(P_{G,0}V\right)(z)+z\left(P_mV\right)(z)$; $\left(Q_m^\wedge V\right)(z)=\left(T_{G,0}F\right)(z)+z\left(Q_mF\right)(z)$.

Таким образом, при $m \geq 1$ задача R-G приводится к эквивалентному уравнению (27). Каковы бы ни были постоянные α_k и β_k, $(\overline{k=0,m-2})$, решение уравнения (27) будет решением задачи R-G. Докажем, что уравнение (27) имеет решение из класса $C_{\beta-1}(\overline{G},0)$. Как и в случае оператора $\left(P_{G,a}V\right)(z)$, доказывается, что оператор $\left(P_m^{\wedge}V\right)(z)$ вполне непрерывен в $C_{\beta-1}(\overline{G},0)$.

Поэтому наше утверждение будет доказано, если покажем, что однородное уравнение

$$V+\left(P_m^{\wedge}V\right)(z)=0,\ z\in G, \tag{28}$$

не имеет нетривиального решения в классе $C_{\beta-1}(G,0)$. Из (28) в силу интегральной формулы Коши [7] получим:

$$\left(K_\Gamma V\right)(z)-\left(P_G V\right)(0)=-z\left(P_m V\right)(z),\ z\in G.$$

Если разложим в ряд левую и правую части последнего равенства по степеням z, $|z|<R$, то получим:

$$\int_\Gamma V(t)e^{-ik\theta}d\theta=0,\ (k=\overline{1,2m-1}),\ t=\mathrm{R}e^{i\theta}. \tag{29}$$

Кроме того, в силу леммы 3 любое решение уравнения (29), как решение уравнения (15), можно представить в виде

$$V(z)=\Phi(z)\cdot\exp\Omega(z), \tag{30}$$

где

$$\Phi(z)\in U_0(G)\cap C^{\alpha}(\overline{G}),\ \Phi(0)=0;$$

$$\Omega(z)=\frac{-1}{\pi}\iint_G\left(\frac{V^{\wedge}(\zeta)}{\zeta-z}-\frac{z\overline{V^{\wedge}(z)}}{R^2-\overline{\zeta}z}\right)dG_\zeta,\ V^{\wedge}(z)=\frac{V^*(z)}{V(z)}.$$

Но $V(z)$ удовлетворяет также однородному краевому условию

$$\mathrm{Re}[t^{-m}V(t)]=0,\ t\in\Gamma. \tag{31}$$

Так как $\mathrm{Re}[i\Omega(t)]=0$, $t\in\Gamma$, то краевое условие (31) в силу (30) принимает вид $\mathrm{Re}[t^{-m}\Phi(t)]=0$. Общее решение этой задачи в силу $\Phi(0)=0$ имеет вид $\Phi(z)=\sum_{k=1}^{2m-1}c_k z^k$, где c_k, $(k=\overline{1,2m-1})$, — комплексные постоянные, удовлетворяющие условиям $c_{2m-k}=-\overline{c}_k$ $(k=\overline{1,m})$. Поэтому в силу (30) решение уравнения (28) должно иметь вид $V(z)=\sum_{k=1}^{2m-1}c_k z^k\exp\Omega(z)$.

Внося это в равенство (29), получим:

$$\sum_{k=1}^{2m-1}c_k\int_\Gamma t^k t^{-n}\exp\Omega(t)dt=0,\ (n=\overline{1,2m-1}). \tag{32}$$

Отсюда следует, что $c_k=0$ $(k=\overline{1,2m-1})$, ибо детерминант системы (32) отличен от нуля как детерминант Грамма для системы линейно независимых функций

$$t^k\exp\left(\frac{\Omega(t)}{2}\right),\ (k=\overline{1,2m-1}),\ \Omega(t)=\overline{\Omega(t)},\ t\in\Gamma.$$

Это доказывает, что однородное уравнение (28) не имеет нетривиального решения. Следовательно, неоднородное уравнение (27) имеет решение из $C_{\beta-1}(\overline{G},0)$ для всякой правой части, принадлежащей $C_{\beta-1}(\overline{G},0)$.

Таким образом, при $m>0$ неоднородная задача R-G всегда имеет решение, а однородная задача R-G ($F\equiv 0,\ g\equiv 0$) имеет ровно $2m-1$ линейно независимых решений над полем действительных чисел. Последнее следует из того, что однородная задача эквивалентна интегральному уравнению

$$V+\left(P_m^{\wedge}V\right)(z)=z\Phi_{0m}(z),$$

где $\Phi_{0m}(z)$ определена по формуле (26), правая часть которой является линейной комбинацией $2m-1$ линейно независимых функций.

Следовательно, имеет место

Теорема 5. При $m>0$ неоднородная задача R-G всегда разрешима, а однородная задача R-G имеет $2m-1$ линейно независимых решений над полем действительных чисел.

2°. Пусть $m=0$. Следуя пункту 1°, в уравнении (23) функцию $z\Phi(z)$ представим в виде

$$z\Phi(z)=\left(D_0 g\right)(z)+ic_0-z\left(P_0 V\right)(z)+z\left(Q_0 F\right)(z), \tag{33}$$

где c_0 — произвольное действительное число.

Функция $\Phi(z)$, заданная по формуле (33), будет принадлежать классу $U_0(G)$, если выполняются равенства

$$\left(D_0 g\right)(0)=0; \tag{34}$$

$$c_0=0. \tag{35}$$

Используя (33)–(35), из (23) получим:

$$V(z)+\left(P^{\wedge}V\right)(z)=\left(D_0 g\right)(z)+\left(Q^{\wedge}F\right)(z),\ z\in G, \tag{36}$$

где $\left(P^{\wedge}V\right)(z)=\left(P_{G,0}V\right)(z)+z\left(P_0 V\right)(z);\ \left(Q^{\wedge}V\right)(z)=\left(T_{G,0}F\right)(z)+z\left(Q_0 F\right)(z)$.

Если выполняется равенство (34), то любое решение уравнения (36) из $C_{\beta-1}(\overline{G},0)$ удовлетворяет граничному условию (22) при $m=0$. Разрешимость уравнения (36) в классе $C_{\beta-1}(\overline{G},0)$ доказывается аналогично доказательству разрешимости уравнения (27). Следовательно, при выполнении условия (34) задача R-G разрешима.

Итак, справедлива

Теорема 6. При $m=0$ для разрешимости задачи R-G необходимо и достаточно выполнения одного условия (34). При выполнении условия (34) решения задачи R-G находятся из уравнения (36).

3°. Пусть $m<0$. Так как нам нужны решения задачи R-G из класса (21), в этом случае формула (27) не пригодна. Поэтому введем в рассмотрение функцию $W(z)=z^{k+1}V(z)$, где $k=-m$. Функция $W(z)$ удовлетворяет уравнению $\partial_{\bar z}W+A(z)W+B_{-k-1}(z)\overline{W}=F_{-k-1}(z)$, где $B_{-k-1}(z)=\exp(2(k+1)i\ \arg z)\cdot B(z)$, $F_{-k-1}(z)=z^{k+1}F(z)$, и краевому условию $\operatorname{Re}[t^{-1}W(t)]=g(t)$, $t\in\Gamma$.

Очевидно, что $B_{-k-1}(z)\in S_1(G,0)$, $F_{-k-1}(z)\in S_\beta(G,0)$. Поэтому эта задача соответствует рассмотренной в пункте 1^0 задаче при $m=1$. Следовательно, функция $W(z)$ находится из уравнения (см. формулу (27))

$$W(z)+\left(P_1^{\wedge}W\right)(z)=\left(D_1 g\right)(z)+\left(Q_1^{\wedge}F_{-k-1}\right)(z)+ic_0 z,\ z\in G,$$

где c_0 — произвольное действительное число;

$$\left(P_1^{\wedge}W\right)(z)=\left(T_{G,0}W_{-k-1}^{*}\right)(z)+z\left(Q_1 W_{-k-1}^{*}\right)(z),\ W_{-k-1}^{*}=A(z)W+B_{-k-1}(z)\overline{W}.$$

Таким образом, решение задачи R-G при $m<0$ находится из уравнения

$$V(z)+\left(QV\right)(z)=\frac{z}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(t)dt}{t^{k+1}(t-z)}+\left(T_{G,0}F_{-k-1}\right)(z)+\sum_{j=1}^{k}a_j z^{-j},\ z\in G, \tag{37}$$

где

$$(QV)(z)=\left(T_{G,0}\left(z^{k+1}V^{*}(z)\right)\right)(z)-\frac{z}{\pi}\iint_{G}\frac{\overline{\zeta}^{2k}\overline{V^{*}(\zeta)}}{1-\overline{\zeta}z}dG_{\zeta};$$

$$a_j=\frac{1}{\pi}\iint_{G}\zeta^{j-1}V^{*}(\zeta)dG_{\zeta}+\frac{1}{\pi}\iint_{G}\overline{\zeta}^{2k-j-1}\overline{V^{*}(\zeta)}\,dG\zeta+\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}t^{j-k-1}(t)dt\quad (j=\overline{0,k-1});$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\iint_{G}\zeta^{k-1}V^{*}(\zeta)dG_{\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(t)}{t}dt+ic_0,\ V^{*}=A(z)V+B(z)\overline{V}.$$

Из (37) видно, что для непрерывности функции $V(z)$ внутри G необходимо и достаточно выполнения равенств

$$a_j=0,\ \ (j=\overline{0,k}). \tag{38}$$

Условия (38) содержат $2k+2$ вещественных равенств. Выполнение одного из них, а именно $\operatorname{Im} a_k = 0$, можно обеспечить посредством подходящего выбора постоянного c_0. Следовательно, остается $2k+1$ условий. Таким образом, при $m<0$ задача R-G приводится к уравнению

$$V(z)+(QV)(z)=\frac{z}{\pi i}\int_\Gamma \frac{g(t)dt}{t^{k+1}(t-z)}+\left(T_{G,0}F_{-k-1}\right)(z),\ z\in G. \tag{39}$$

Оператор $(QV)(z)$ вполне непрерывен в $C_{\beta-1}(G,0)$ и переводит это пространство в $C_{\beta-1}(\bar{G},0)\bigcap C^\alpha(\bar{G})$.

Если в уравнении $V(z)+(QV)(z)=0$ сделаем замену $V(z)=zW(z)$, то получим уравнение вида (7.33) из [1; 300], которое имеет только тривиальное решение. Поэтому уравнение (39) разрешимо в $C_{\beta-1}(G,0)$ при любой правой части из этого же класса.

Итак, справедлива

Теорема 7. При $m<0$ для разрешимости задачи R-G необходимо и достаточно выполнения $2|m|+1$ условий (38), за исключением условия $\operatorname{Im} a_k = 0$.

Задача Римана-Гильберта с начальным условием для уравнения (1). Пусть $G=\{z:|z|<R\}$, $\Gamma=\{t:|t|=R\}$; $\nu>0$; $k=[\nu]$; $k\neq\nu$, $\beta=1-\nu+k$; $R>0$. Рассмотрим в G уравнение (1), где $A(z),B(z)\in S_1(G,0)$, $F(z)\in S_{1-\nu}(G,0)$.

Рассмотрим задачу Римана-Гильберта с начальным условием в следующем виде:

Задача (R–G)$_0$. Требуется найти решение уравнения (1) из класса

$$C_{-\nu}(G,0)\bigcap W_q^1(G),\ 2<q<\frac{2}{\beta},$$

удовлетворяющее граничному условию

$$\operatorname{Re}[t^{-n}V(t)]=g(t),\ t\in\Gamma, \tag{40}$$

где $g(t)\in C^\alpha(\Gamma)$; $\alpha=1-\dfrac{2}{q}$; n — целое число.

Решение задачи (R-G)$_0$ ищем в виде

$$V(z)=z^k\cdot W(z), \tag{41}$$

где $W(z)$ — новая неизвестная функция из класса $W_q^1(G)\bigcap S_{\beta-1}(G,0)$; $0<\beta<\dfrac{2}{q}$; $q>2$.

Замечание 2. Если $\nu<1$, то подстановка (41) нам не понадобится.

Замечание 3. Если $\nu>0$ — целое число, то из $V(z)=O\left(|z|^{\nu+\beta}\right)$, $z\to 0$, $0<\beta<1$, следует $V(z)=O\left(|z|^{\nu}\right)$, $z\to 0$. Поэтому результаты, которые будут получены при $[\nu]\neq\nu$, справедливы и при $[\nu]=\nu$.

Подставив (41) в (1) и (40), соответственно получим:

$$\partial_{\bar z}W + A(z)W + B_k(z)\bar{W} = F_k(z),\ z\in G, \tag{42}$$

где $B_k(z)=B(z)\cdot\exp(-2ik\phi)$, $F_k(z)=z^{-k}F(z)$ и $\operatorname{Re}[t^{-m}W(t)]=g(t)$, $t\in\Gamma$, $m=n-k$.

Очевидно, что $B_k(z)\in S_1(G,0)$, $F_k(z)\in S_\beta(G,0)$, $0<\beta<1$. Следовательно, мы получим задачу Римана-Гильберта для уравнения (42), решенную в §3. Поэтому из результатов §3 следует

Теорема 8. 1) При $n>[\nu]$ задача $(R-G)_0$ всегда разрешима. Соответствующая однородная задача имеет $2(n-[\nu])-1$ линейно независимых решений над полем вещественных чисел;

2) при $n=[\nu]$ для разрешимости задачи R-G необходимо и достаточно выполнения одного условия (34);

3) при $n<[\nu]$ для разрешимости задачи $(R-G)_0$ достаточно выполнения $2n-[\nu]+1$ условий вида (38), записанного относительно уравнения (42).

Замечание 4. Приведенные здесь рассуждения и результаты без особого труда распространяются и на уравнение [8]

$$\partial_{\bar{z}}V + f(z,V) = \mathrm{F}\ (z),$$

где $F(z) \in S_\beta(G,a)$; $0 < \beta < 1$, а $f(z,v)$, как функция от z, для любых V из класса $C_{\beta-1}(\overline{G},a)$ принадлежит классу $S_1(G,a)$, а также для любых $V_1, V_2 \in C_{\beta-1}(\overline{G},a)$ удовлетворяют условиям $\left\| \dfrac{f(z,V_1) - f(z,V_2)}{V_1 - V_2} \right\|_{S_1(G,a)} \leq c$, $c > 0$ — заданное действительное число, и $f(z,0) \in S_\beta(G,a)$.

References

1. *Vekua I.N.* Generalized analytic functions. — M.: Fizmatgiz, 1959 (Russian). English translation, Pergamon Press, Oxford, 1962. — 628 p.
2. *Usmanov Z.D.* Infinitesimal bandings of surfaces of positive curvature with a flattening point // Differential Geometry. — Banach Center Publications. — Vol. 12. — Warsaw, 1984. — P. 241–272.
3. *Usmanov Z.D.* Infinitesimal bandings of surfaces of positive curvature with an isolated flattening point // Math. Sb. — 1970. — 83 (125). — 4 (12). — P. 596–615.
4. *Mikhailov L.G.* A new class of singular integral equations and its applications to differential equations with a singular coefficients. — Dushanbe: Irfon, 1963.
5. *Usmanov Z.D.* Generalized Cauchy-Riemann systems with a singular point // Sib. Math. — 1973. — J. 14. — № 5. — P. 1076–1087.
6. *Abdymanapov S.A., Tungatarov A.B.* Some classes of elliptic systems in the lane with singular coefficients. — Almaty: Bilim, 2010. — 143 p.
7. *Bitsadze A.V.* Some classes of partial differential equations. — M.: Nauka, 1981. — 448 p.
8. *Abdymanapov S.A., Tungatarov A.B., Uajsov B.* On a nonlinear Carleman-Vekua equation with a singular point // Eurasian Mathematical Journal. — 2008. — № 1. — P. 3–16.