Сонымен қатар өндірістердің құбыр арқылы тасымалдауға арналған жабдықтарды шығаратын және бәсекелесетін өндірістерді интенсивті дамыту, мысалы, мұнай-химиялық мекемелер пластмастан құбырлар мен контейнерлерді жасайды.

Ғылыми және инновациялық қызмет тәжірибесі

Қазіргі уақытта бізде өндірістердің әр түрлі салаларында гидродинамикалық кешендерді игерудің біршама тәжірибесі қалыптасты. Бұл тәжірибелер техникалық шешімдер мен технологиялардың жұмыс істеу қабілетін көрсетіп ғана қоймай, экономиканың жаңа бағытының тиімділігін айқындады.

Проблеманың ғылыми және инновациялық шешуін мемлекеттік басқару және қаржыландыру

Осыған дейін су арқылы тасымалдаудың барлық ғылыми өнімдері құрастырушылардың ықпалы негізінде, ал инновациялық бөлігі өндірістің тапсырысы бойынша орындалады.

Біздің мемлекеттік қаржыландыру алу мақсатымыздың барлығы мәселеге тереңірек үңіліп, жан-жақты зерттеулерді талап етіп ғана қоймай, құбыр арқылы қатты түйіршікті материалдарды тасымалдауын толық теріске шығаратын сын-пікірлер берумен аяқталып келді. Мемлекеттік қаржыландыруға біз әлі жеткен жоқпыз. Неліктен екенін талқыламай-ақ, өз ойымызды айта кетейік.

Ғылыми-техникалық және технологиялық өнімдерді құрастыру, алғашқы сынақ өнімдері мен бұйымдарын құрастыру кезеңінің өзінде көптеген қаржы мен уақытты талап етеді. Әрине, мемлекеттік қаржыландыру бойынша шешім қабылдау үшін ұсынылған жоба авторларының қорғауымен аяқталатын сараптамалық баға болу керек.

Мемлекеттік заңдар кәсіпорындардың инновациялық өнімдерді сатып алуына жағдай жасауы тиіс, яғни жаңа технология мен өнімдерді кәсіпорындарда іске асыру үшін бұл кәсіпорынның экономикалық тұрғыдан қызығушылығы болу қажет. Мысалы, жаңа өнімді өндіріске енгізген кәсіпорыннан өнімді өндіріске енгізгеннен түскен пайдадан біраз уақыт салық алмау тиіс.

Біздің ойымызша, бұл бізге жаңалыққа әрқашан қызыға қарайтын өндірістегі қарапайым жұмысшылардың арасындағы жұмыс істеуді жеңілдетеді.

Әдебиеттер тізімі

1. *Смолдырев А.Е.* Трубопроводный транспорт. — М.: Наука, 1980. — 283 с.
2. *Дробаденко В.П., Сысоев В.Н.* Трубопроводный транспорт твердых материалов. — М.: Знание, 1980. — 65 с.

УДК 517.946

Г.Н.Шайхова

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана

МЕТОД ХИРОТЫ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Солитондық шешімдерін табу үшін синус-Гордон теңдеуіне Хирота әдісі қолданылды. Бір-, екі- және үшсолитонды шешімдер алынды.

Hirota method is applied to the sine-Gordon equation for finding soliton solutions. One-soliton, two-soliton, three-soliton solutions are found.

1. Введение. Известно, что сложные физические явления связаны с нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных (НДУЧП). Эти уравнения применяются в физике, биологии, химии, механике и т.д. Исследование точных решений НДУЧП позволяют лучше понять явления, которые они описывают. В настоящее время существует много различных методов нахождения точных решений НДУЧП, такие как метод обратной задачи рассеяния [1], преобразование Бэклунда [1], tanh метод и др.

Одним из эффективных прямых методов нахождения точных решений НДУЧП является метод Хироты [2]. Этот метод был введен Хиротой в 1971 г. и является прямым методом построения солитонных решений НДУЧП. Он основывается на следующей идее:

– произвести замену зависимой переменной, которое должно привести эволюционное уравнение к так называемой билинейной форме, квадратичной по зависимым переменным;
– записать билинейную форму через оператор Хироты (D-оператор);
– рассмотреть формальные ряды теории возмущения для этого билинейного уравнения. В случае солитонных решений эти ряды обрываются;
– произвести анализ коэффициентов параметра ε.

Оператор Хироты имеет следующий вид:

$$D_t^n D_x^m a\cdot b = \left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^m a(t,x)b(t',x')\big|_{t=t',x=x'}. \tag{1}$$

В этой работе мы применяем метод Хироты для (2+1)-мерного уравнения синус-Гордон. Это уравнение играет важную роль во многих областях физики, в частности, в настоящее время оно нашло применение и в биологии [3–4]. А именно было предложено, что решения этого уравнения описывают вращательные движения оснований в однородной молекуле ДНК. Различные решения уравнения синус-Гордон найдены в работе [5]. В работах [3–4] строятся односолитонное, двухсолитонное решения этого уравнения. Здесь мы, в дополнение предыдущим работам [3–4], строим трехсолитонное решение уравнения синус-Гордон.

2. Солитонные решения. Рассмотрим (2+1)-мерное уравнение синус — Гордон в виде

$$u_{xx}+u_{yy}-\beta u_{tt}=\alpha\sin u, \tag{2}$$

где $\alpha,\beta = const$. Введем преобразование

$$u = 4\arctan\left(\frac{G}{F}\right). \tag{3}$$

Подставив (3) в (2), получим следующую билинейную форму:

$$\begin{gathered}(F^2-G^2)[(G_{xx}F-2G_xF_x+GF_{xx})+(G_{yy}F-2G_yF_y+GF_{yy})-\\ -\beta(G_{tt}F-2G_tF_t+GF_{tt})-\alpha GF]-2GF[(FF_{xx}-F_x^2-GG_{xx}+G_x^2)+\\ +(FF_{yy}-F_y^2-GG_{yy}+G_y^2)+\beta(FF_{tt}-F_t^2-GG_{tt}+G_t^2)]=0.\end{gathered} \tag{4}$$

Расщепив уравнения (4) и переходя к операторам Хироты, получим:

$$[D_x^2+D_y^2-\beta D_t^2](F\cdot G)=\alpha(F\cdot G),\qquad [D_x^2+D_y^2-\beta D_t^2](F\cdot F-G\cdot G)=0. \tag{5}$$

Решение (5) ищем в виде ряда теории возмущений по некоторому малому параметру ε:

$$G=\varepsilon G^{(1)}+\varepsilon^3G^{(3)}+\varepsilon^5G^{(5)}+\ldots, \tag{6.а}$$

$$F=1+\varepsilon^2F^{(2)}+\varepsilon^4F^{(4)}+\varepsilon^6F^{(6)}+\ldots. \tag{6.б}$$

Подставив (6) в (5), получим:

$$\begin{gathered}[D^2+D_y^2-\beta D_t^2]((1+\varepsilon^2F^{(2)}+\varepsilon^4F^{(4)}+\varepsilon^6F^{(6)}+\ldots)\cdot(\varepsilon G^{(1)}+\varepsilon^3G^{(3)}+\varepsilon^5G^{(5)}+\ldots))=\\ =\alpha((1+\varepsilon^2F^{(2)}+\varepsilon^4F^{(4)}+\varepsilon^6F^{(6)}+\ldots)(\varepsilon G^{(1)}+\varepsilon^3G^{(3)}+\varepsilon^5G^{(5)}+\ldots)),\end{gathered} \tag{7.а}$$

$$\begin{gathered}[D_x^2+D_y^2-\beta D_t^2]((1+\varepsilon^2F^{(2)}+\varepsilon^4F^{(4)}+\varepsilon^6F^{(6)}+\ldots)\cdot(1+\varepsilon^2F^{(2)}+\varepsilon^4F^{(4)}+\varepsilon^6F^{(6)}+\ldots)-\\ -(\varepsilon G^{(1)}+\varepsilon^3G^{(3)}+\varepsilon^5G^{(5)}+\ldots)\cdot(\varepsilon G^{(1)}+\varepsilon^3G^{(3)}+\varepsilon^5G^{(5)}+\ldots))=0.\end{gathered} \tag{7.б}$$

Приравняв к нулю коэффициенты при каждой степени ε, имеем следующие системы: для (7.1)

$$\begin{aligned}&\varepsilon^1: && [D_x^2+D_y^2-\beta D_t^2](1\cdot G^{(1)})=\alpha G^{(1)},\\ &\varepsilon^3: && [D_x^2+D_y^2-\beta D_t^2](1\cdot G^{(3)})-\alpha G^{(3)}=-[D_x^2+D_y^2-D_t^2](F^{(2)}\cdot G^{(1)})+\alpha(F^{(2)}G^{(1)}),\\ &\varepsilon^5: && [D_x^2+D_y^2-\beta D_t^2](1\cdot G^{(5)})-\alpha G^{(5)}=\\ & && =-[D_x^2+D_y^2-\beta D_t^2](F^{(2)}\cdot G^{(3)}+F^{(4)}\cdot G^{(1)})+\alpha(F^{(2)}G^{(3)}+F^{(4)}G^{(1)}),\\ &\varepsilon^7: && [D_x^2+D_y^2-\beta D_t^2](F^{(2)}\cdot G^{(5)}+F^{(4)}\cdot G^{(3)}+F^{(6)}\cdot G^{(1)})=\\ & && =\alpha(F^{(2)}G^{(5)}+F^{(4)}G^{(3)}+F^{(6)}G^{(1)})\end{aligned} \tag{8.а}$$

и для (7.2)

$$\varepsilon^0: \quad [D_x^2 + D_y^2 - \beta D_t^2](1\cdot 1) = 0,$$

$$\varepsilon^2: \quad [D_x^2 + D_y^2 - \beta D_t^2](1\cdot F^{(2)} + F^{(2)}\cdot 1 - G^{(1)}\cdot G^{(1)}) = 0,$$

$$\varepsilon^4: \quad [D_x^2 + D_y^2 - \beta D_t^2](1\cdot F^{(4)} + F^{(2)}\cdot F^{(2)} + F^{(4)}\cdot 1 - G^{(1)}\cdot G^{(3)} - G^{(3)}\cdot G^{(1)}) = 0, \tag{8.б}$$

$$\varepsilon^6: \quad [D_x^2 + D_y^2 - \beta D_t^2](1\cdot F^{(6)} + F^{(2)}\cdot F^{(4)} + F^{(4)}\cdot F^{(2)} + F^{(6)}\cdot 1 - $$
$$- G^{(1)}\cdot G^{(5)} - G^{(3)}\cdot G^{(3)} - G^{(5)}\cdot G^{(1)}) = 0.$$

2.1. Односолитонное решение. Для нахождения односолитонного решения уравнения синус-Гордон (2) возьмем

$$G = \varepsilon G^{(1)},\ F = 1, \tag{9}$$

где $G^{(1)} = e^{\theta_1}$; $\theta_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 t + \delta_1$; a_1, b_1, c_1, δ_1 — вещественные числа. Подставив вышеприведенные выражения в (5), получаем следующие уравнения:

$$[D_x^2 + D_y^2 - \beta D_t^2](1\cdot G^{(1)}) = \alpha G^{(1)}, \tag{10.а}$$

$$[D_x^2 + D_y^2 - \beta D_t^2](1\cdot 1) = 0, \tag{10.б}$$

$$-[D_x^2 + D_y^2 - \beta D_t^2](G^{(1)}\cdot G^{(1)}) = 0. \tag{10.в}$$

Другие уравнения системы удовлетворяются тождественно. Рассмотрим уравнение (10.а), которое после преобразования примет вид

$$G_{xx}^{(1)} + G_{yy}^{(1)} - \beta G_{tt}^{(1)} = \alpha G^{(1)}. \tag{11}$$

Подставив выражения $G^{(1)} = e^{\theta_1}$ в (11), получим $\sqrt{\dfrac{a_1^2 + b_1^2 - \alpha}{\beta}} = c_1$. Уравнение (10.б) удовлетворяет тождественно. Аналогично уравнение (10.в) принимает вид

$$-2(G_{xx}^{(1)}G^{(1)} - G_x^{(1)^2} + G_{yy}^{(1)}G^{(1)} - G_y^{(1)^2} - \beta G_{tt}^{(1)}G^{(1)} + \beta G_t^{(1)^2}) = 0, \tag{12}$$

которое после подстановки значения $G^{(1)}$ выполняется тождественно.

Пусть $\varepsilon = 1$, таким образом, имеем $G = e^{\theta_1}$, $F = 1$. Односолитонное решение уравнения синус-Гордон (2) имеет следующий вид:

$$u = 4\arctan(e^{\theta_1}), \tag{13}$$

где $\theta_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 t + \delta_1$; $c_1 = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + b_1^2 - \alpha}{\beta}}$. Графики для односолитонного решения приведены на рисунке 1.

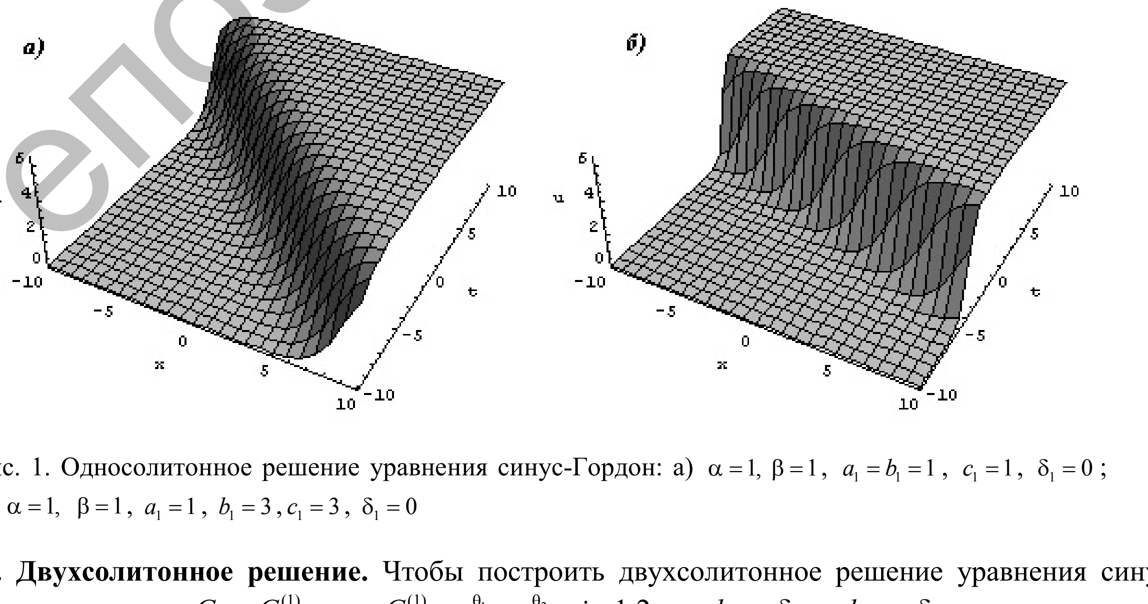

Рис. 1. Односолитонное решение уравнения синус-Гордон: а) $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $a_1 = b_1 = 1$, $c_1 = 1$, $\delta_1 = 0$; б) $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $a_1 = 1$, $b_1 = 3$, $c_1 = 3$, $\delta_1 = 0$

2.2. Двухсолитонное решение. Чтобы построить двухсолитонное решение уравнения синус-Гордон, мы положим $G = \varepsilon G^{(1)}$, где $G^{(1)} = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}$, $i = 1,2$; $a_1, b_1, c_1, \delta_1, a_2, b_2, c_2, \delta_2$ — вещественные числа и $F = 1 + \varepsilon^2 F^{(2)}$, где $F^{(2)}$ будет определен позже. Подставив выражения для G, F в систему (5), получим систему:

$$[D_x^2 + D_y^2 - \beta D_t^2](1 \cdot G^{(1)}) = \alpha G^{(1)}, \tag{14.а}$$

$$[D_x^2 + D_y^2 - \beta D_t^2](F^{(2)} \cdot G^{(1)}) = \alpha (F^{(2)} G^{(1)}), \tag{14.б}$$

$$[D_x^2 + D_y^2 - \beta D_t^2](1 \cdot 1) = 0, \tag{14.в}$$

$$[D_x^2 + D_y^2 - \beta D_t^2](1 \cdot F^{(2)} + F^{(2)} \cdot 1 - G^{(1)} \cdot G^{(1)}) = 0, \tag{14.г}$$

$$[D_x^2 + D_y^2 - \beta D_t^2](F^{(2)} \cdot F^{(2)}) = 0. \tag{14.д}$$

После подстановки и некоторых вычислений уравнение (14.а) принимает вид

$$[a_1^2 + b_1^2 - \beta c_1^2 - \alpha] e^{\theta_1} + [a_2^2 + b_2^2 - \beta c_2^2 - \alpha] e^{\theta_2} = 0, \tag{15}$$

из которого получаем $a_1^2 + b_1^2 - \beta c_1^2 = \alpha$, $a_2^2 + b_2^2 - \beta c_2^2 = \alpha$. Уравнение (14.б) пока не исследуем, так как нам неизвестно $F^{(2)}$. Уравнение (14.в) выполняется тождественно. Из (14.г) имеем

$$F_{xx}^{(2)} + F_{yy}^{(2)} - \beta F_{tt}^{(2)} = ((a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 - \beta (c_1 - c_2)^2) e^{\theta_1 + \theta_2}. \tag{16}$$

Решение этого уравнения ищем в виде $F^{(2)} = A e^{\theta_1 + \theta_2}$. Подставив $F^{(2)}$ в (16), находим:

$$A = \frac{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 - \beta (c_1 - c_2)^2}{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 - \beta (c_1 + c_2)^2}. \tag{17}$$

Уравнение (14.д) удовлетворяет тождественно. Теперь возвращаемся к уравнению (14.б). Простые вычисления дают

$$(a_2^2 + b_2^2 - \beta c_2^2) e^{2\theta_1 + \theta_2} + (a_1^2 + b_1^2 - \beta c_1^2) e^{\theta_1 + 2\theta_2} = \alpha (e^{2\theta_1 + \theta_2} + e^{\theta_1 + 2\theta_2}). \tag{18}$$

Если положим $\varepsilon = 1$, то имеем $G = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}$ и $F = 1 + A e^{\theta_1 + \theta_2}$. Таким образом, двухсолитонное решение уравнения синус-Гордон (2) имеет вид

$$u = 4 \arctan\left(\frac{G^{(1)}}{1 + F^{(2)}}\right) = 4 \arctan\left(\frac{e^{\theta_1} + e^{\theta_2}}{1 + A e^{\theta_1 + \theta_2}}\right), \tag{19}$$

где $\theta_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 t + \delta_2$; $\theta_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 t + \delta_2$; $c_1 = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + b_1^2 - \alpha}{\beta}}$; $c_2 = \sqrt{\dfrac{a_2^2 + b_2^2 - \alpha}{\beta}}$; $A = \dfrac{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 - \beta (c_1 - c_2)^2}{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 - \beta (c_1 + c_2)^2}$. Графики для двухсолитонного решения приведены на рисунке 2.

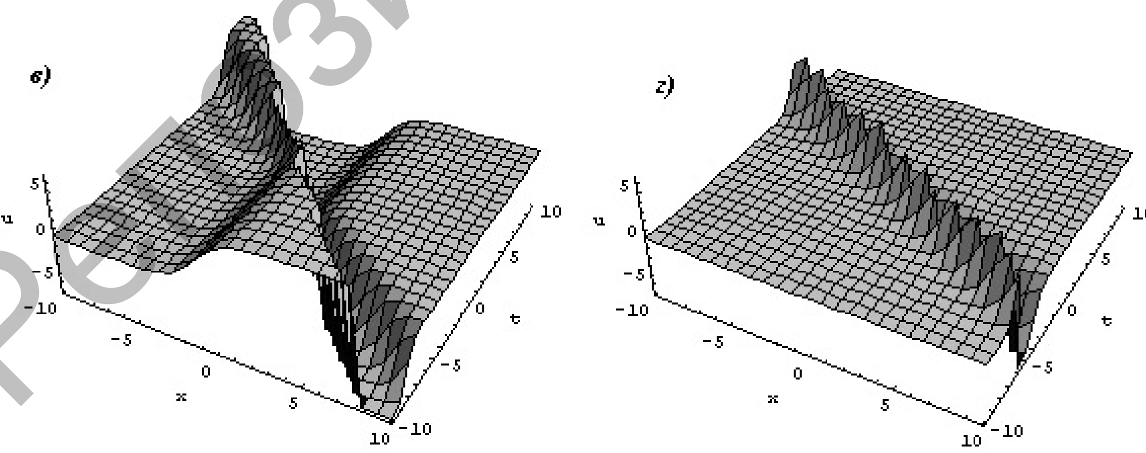

Рис. 2: Двухсолитонное решение уравнения синус-Гордон: в) $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = b_2 = 2$, $c_1 = 0$, $c_2 = \sqrt{6}$, $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$; г) $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = b_2 = 2$, $c_1 = 2$, $c_2 = \sqrt{10}$, $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$

2.3. Трехсолитонное решение. Чтобы построить трехсолитонное решение уравнения синус-Гордон (2), положим $G = \varepsilon^1 G^{(1)} + \varepsilon^3 G^{(3)}$, где $G^{(1)} = e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3}$; $\theta_i = a_i x + b_i y + c_i t + \delta_i$, $i = 1,2,3$;

$a_1, b_1, c_1, \delta_1, a_2, b_2, c_2, \delta_2, a_3, b_3, c_3, \delta_3$ — вещественные числа и $F = 1 + \varepsilon^2 F^{(2)}$. $G^{(3)}$, $F^{(2)}$ будут определены. Подставим G, F в систему (5) и расмотрим коэфициенты при различных степенях ε. Как результат получаем следующие уравнения:

$$[D_x^2 + D_y^2 - \beta D_t^2](1 \cdot G^{(1)}) = \alpha G^{(1)}, \tag{20.а}$$

$$[D_x^2 + D_y^2 - \beta D_t^2](1 \cdot G^{(3)}) - \alpha G^{(3)} = -[D_x^2 + D_y^2 - \beta D_t^2](F^{(2)} \cdot G^{(1)}) + \alpha(F^{(2)} G^{(1)}), \tag{20.б}$$

$$[D_x^2 + D_y^2 - \beta D_t^2](F^{(2)} \cdot G^{(3)}) = \alpha(F^{(2)} G^{(3)}), \tag{20.в}$$

$$[D_x^2 + D_y^2 - \beta D_t^2](1 \cdot 1) = 0, \tag{20.г}$$

$$[D_x^2 + D_y^2 - \beta D_t^2](1 \cdot F^{(2)} + F^{(2)} \cdot 1 - G^{(1)} \cdot G^{(1)}) = 0, \tag{20.д}$$

$$[D_x^2 + D_y^2 - \beta D_t^2](F^{(2)} \cdot F^{(2)} - G^{(1)} \cdot G^{(3)} - G^{(3)} \cdot G^{(1)}) = 0, \tag{20.е}$$

$$-[D_x^2 + D_y^2 - \beta D_t^2](G^{(3)} \cdot G^{(3)}) = 0. \tag{20.ж}$$

Из (20.а) получаем

$$(a_1^2 + b_1^2 - \beta c_1^2)e^{\theta_1} + (a_2^2 + b_2^2 - \beta c_2^2)e^{\theta_2} + (a_3^2 + b_3^2 - \beta c_3^2)e^{\theta_3} = \alpha(e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_3}), \tag{21}$$

откуда имеем $a_1^2 + b_1^2 - \beta c_1^2 = \alpha$, $a_2^2 + b_2^2 - \beta c_2^2 = \alpha$, $a_3^2 + b_3^2 - \beta c_3^2 = \alpha$. Уравнения (20.б) и (20.в) пока не рассматриваем, так как нам не известны функции $G^{(3)}$, $F^{(2)}$. Переходим к (20.г), которое удовлетворяется тождественно. Из (20.д) имеем

$$F_{xx}^{(2)} + F_{yy}^{(2)} - \beta F_{tt}^{(2)} = G_{xx}^{(1)} G^{(1)} - G_x^{(1)^2} + G_{yy}^{(1)} G^{(1)} - G_y^{(1)^2} - \beta G_{tt}^{(1)} G^{(1)} + \beta G_t^{(1)^2}. \tag{22}$$

Отсюда, проделав некоторые вычисления, получим:

$$F_{xx}^{(2)} + F_{yy}^{(2)} - \beta F_{tt}^{(2)} = [(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2) - \beta(c_1 - c_2)]e^{\theta_1 + \theta_2} + [(a_1 - a_3)^2 + (b_1 - b_3) - \beta(c_1 - c_3)]e^{\theta_1 + \theta_3} +$$
$$+[(a_2 - a_3)^2 + (b_2 - b_3) - \beta(c_2 - c_3)]e^{\theta_2 + \theta_3}. \tag{23}$$

Решение (23) ищем в виде

$$F^{(2)} = A_1 e^{\theta_1 + \theta_2} + A_2 e^{\theta_1 + \theta_3} + A_3 e^{\theta_2 + \theta_3}. \tag{24}$$

Подставляя (24) в левую часть (23), находим:

$$A_1 = \frac{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 - \beta(c_1 - c_2)^2}{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 - \beta(c_1 + c_2)^2}, \tag{25.а}$$

$$A_2 = \frac{(a_1 - a_3)^2 + (b_1 - b_3)^2 - \beta(c_1 - c_3)^2}{(a_1 + a_3)^2 + (b_1 + b_3)^2 - \beta(c_1 + c_3)^2}, \tag{25.б}$$

$$A_3 = \frac{(a_2 - a_3)^2 + (b_2 - b_3)^2 - \beta(c_2 - c_3)^2}{(a_2 + a_3)^2 + (b_2 + b_3)^2 - \beta(c_2 + c_3)^2}. \tag{25.в}$$

Определив $F^{(2)}$, теперь можем вернуться к уравнениям (20.б) и (20.в). Уравнение (20.б) имеет вид

$$G_{xx}^{(3)} + G_{yy}^{(3)} - \beta G_{tt}^{(3)} - \alpha G^{(3)} = -(F_{xx}^{(2)} G^{(1)} - 2F_x^{(2)} G_x^{(1)} + F^{(2)} G_{xx}^{(1)} + F_{yy}^{(2)} G^{(1)} - 2F_y^{(2)} G_y^{(1)} + F^{(2)} G_{yy}^{(1)} -$$
$$-\beta F_{tt}^{(2)} G^{(1)} + \beta 2 F_t^{(2)} G_t^{(1)} - \beta F^{(2)} G_{tt}^{(1)}) + \alpha(F^{(2)} G^{(1)}) \tag{26}$$

или, подставив значения $F^{(2)}$, $G^{(1)}$ в (26), получаем:

$$G_{xx}^{(3)} + G_{yy}^{(3)} - \beta G_{tt}^{(3)} - \alpha G^{(3)} = -[e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}(A_1((a_1 + a_2 - a_3)^2 + (b_1 + b_2 - b_3)^2 - \beta(c_1 + c_2 - c_3)^2) +$$
$$+A_2((a_1 + a_3 - a_2)^2 + (b_1 + b_3 - b_2)^2 - \beta(c_1 + c_3 - c_2)^2) + A_3((a_2 + a_3 - a_1)^2 + (b_2 + b_3 - b_1)^2 -$$
$$-\beta(c_2 + c_3 - c_1)^2))] + \alpha e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}[A_1 + A_2 + A_3]. \tag{27}$$

Решение (27) ищем в виде

$$G^{(3)} = B e^{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3}. \tag{28}$$

Подставив (28) в (27) и проделав некоторые вычисления, получим:

$$B = A_1 A_2 A_3. \tag{29}$$

Из уравнения (21.в) имеем

$$F_{xx}^{(2)} G^{(3)} - 2F_x^{(2)} G_x^{(3)} + F^{(2)} G_{xx}^{(3)} + F_{yy}^{(2)} G^{(3)} - 2F_y^{(2)} G_y^{(3)} + F^{(2)} G_{yy}^{(3)} - \beta F_{tt}^{(2)} G^{(3)} + 2\beta F_t^{(2)} G_t^{(3)} - \beta F^{(2)} G_{tt}^{(3)} =$$
$$= \alpha(F^{(2)} G^{(3)}). \tag{30}$$

Подставляя сюда выражения для $F^{(2)}$, $G^{(3)}$, убеждаемся, что это уравнение удовлетворяется тождественно. Далее исследуем уравнение (20.е), которое перепишем в виде

$$(F_{xx}^{(2)}F^{(2)}-F_x^{(2)})+(F_{yy}^{(2)}F^{(2)}-F_y^{(2)})-\beta(F_{tt}^{(2)}F^{(2)}-F_t^{(2)})-(G_{xx}^{(1)}G^{(3)}-2G_x^{(1)}G_x^{(3)}+G^{(1)}G_{xx}^{(3)})-$$
$$-(G_{yy}^{(1)}G^{(3)}-2G_y^{(1)}G_y^{(3)}+G^{(1)}G_{yy}^{(3)})+\beta(G_{tt}^{(1)}G^{(3)}-2G_t^{(1)}G_t^{(3)}+G^{(1)}G_{tt}^{(3)})=0. \qquad (31)$$

После некоторых преобразований уравнение (31) принимает следующий вид:

$$e^{2\theta_1+\theta_2+\theta_3}(A_1A_2[(a_2-a_3)^2+(b_2-b_3)^2-\beta(c_2-c_3)^2]-B[(a_2+a_3)^2+(b_2+b_3)^2-\beta(c_2+c_3)^2])+$$
$$+e^{\theta_1+2\theta_2+\theta_3}(A_1A_3[(a_1-a_3)^2+(b_1-b_3)^2-\beta(c_1-c_3)^2]-B[(a_1+a_3)^2+(b_1+b_3)^2-\beta(c_1+c_3)^2])+$$
$$+e^{\theta_1+\theta_2+2\theta_3}(A_2A_3[(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2-\beta(c_1-c_2)^2]-B[(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2-\beta(c_1+c_2)^2])=0, \qquad (32)$$

откуда получаем $B=A_1A_2A_3$. Уравнение (20.ж) после некоторых вычислений удовлетворяет тождественно. Как и выше, положим $\varepsilon=1$. Таким образом, имеем $G=e^{\theta_1}+e^{\theta_2}+e^{\theta_3}+Be^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}$, $F=1+A_1e^{\theta_1+\theta_2}+A_2e^{\theta_1+\theta_3}+A_3e^{\theta_2+\theta_3}$. Окончательно для трехсолитонного решения уравнения синус-Гордон получим следующее выражение:

$$u=4\arctan\left(\frac{e^{\theta_1}+e^{\theta_2}+e^{\theta_3}+Be^{\theta_1+\theta_2+\theta_3}}{1+A_1e^{\theta_1+\theta_2}+A_2e^{\theta_1+\theta_3}+A_3e^{\theta_2+\theta_3}}\right), \qquad (33)$$

где

$$\theta_i=a_ix+b_iy+c_it+\delta_i,\ i=1,2,3;\ c_1=\sqrt{\frac{a_1^2+b_1^2-\alpha}{\beta}};\ c_2=\sqrt{\frac{a_2^2+b_2^2-\alpha}{\beta}};\ c_3=\sqrt{\frac{a_3^2+b_3^2-\alpha}{\beta}};$$
$$A_1=\frac{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2-\beta(c_1-c_2)^2}{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2-\beta(c_1+c_2)^2};\ A_2=\frac{(a_1-a_3)^2+(b_1-b_3)^2-\beta(c_1-c_3)^2}{(a_1+a_3)^2+(b_1+b_3)^2-\beta(c_1+c_3)^2};$$
$$A_3=\frac{(a_2-a_3)^2+(b_2-b_3)^2-\beta(c_2-c_3)^2}{(a_2+a_3)^2+(b_2+b_3)^2-\beta(c_2+c_3)^2};\ B=A_1A_2A_3.$$

3. Заключение. Таким образом, в данной работе описан метод Хироты (прямой метод), для нахождения точных решений НДУЧП. В частном случае мы применили его к (2+1)-мерному уравнению синус-Гордон. Построили для него односолитонное, двухсолитоное, трехсолитоное решения. Исследовали решения при различных значениях. Отметим, что эффективность метода заключается в нахождении удобного преобразования и определении билинейной формы уравнения, что является одним из сложных этапом метода. Приведенный метод можно применить и для других нелинейных дифференциальных уравнений.

Список литературы

1. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. — М.: Наука, 1987.
2. *Hietarinta J.* Introduction to the Hirota bilinear method // arXiv: solv-int/9708006v1
3. *Шайхова Г.Н.* Об одной (2+1)-й модели молекулы ДНК // Моделирование механических систем и процессов: Материалы Респ. науч. конф. — Караганда, 2007. — С. 199.
4. *Шайхова Г.Н., Мырзакулов Р.* Нелинейные волны в ДНК // Современные достижения физики и фундаментальное физическое образование: Материалы 5-й междунар. науч. конф. — Алматы, 2007. — С. 32–34.
5. *Ferreira L.A., Zakrewski W.J.* Wobbles and other kink-breather solutions of the Sine-Gordon model // arXiv:0708.1088v1 [hep-th].