УДК 517.988.68+517.968.22

Дискретный аналог оптимизационного метода для обратной задачи геоэлектрики в околоскважинном пространстве

Discrete analog optimization methods for inverse problems of geoelectric in the borehole environment

Ерденеева А.А.

Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы (e-mail: aigul@mail.ru)

Мақалада ұңғыма кеңістігіндегі геоэлектрикалық есебі үшін кері коэффициентті есеп қарастырылды. Сонымен қатар цилиндрлік координат жүйесіндегі Максвеллдің теңдеулер жүйесі, цилиндрлік координаттар жүйесінде жазылған кері және тура есептердің қойылымы жинақталып зерттелді. Кері коэффициентті есепті шешу үшін белгілі ұтымдылық әдіс қолданылды. Оптимизациялық әдісті көмегімен кері есепті шешудің дискретті аналогы құралды. Қарастырылып отырған функционалдың градиентін есептеудің дискретті формуласы алынды.

In work a coefficient inverse problem for the problem of geoelectric in the borehole environment is considered. Also considered statement of the problem for Maxwell's equations written in cylindrical coordinates. Formulate the consideration of direct and inverse problems, written in cylindrical coordinates. For solving the inverse conductivity problem using known optimization method. The discrete analogue of optimization method of decision of inverse problem is built. The obvious discrete formula of calculation of gradient of examined functional is got.

Постановка задачи

При изучении нефтяных и газовых месторождений большой интерес представляют проницаемые пласты (коллекторы). Скважины обычно заполняют промывочной жидкостью, гидростатическое давление которой превышает, как правило, давление в пласте.

В силу избыточного давления фильтрат промывочной жидкости проникает в проницаемый пласт, в результате чего часть пластовой жидкости оттесняется и заменяется фильтратом промывочной. Это приводит к образованию зоны проникновения, электромагнитные свойства которой отличаются от свойств пласта и промывочной жидкости. Математическое моделирование применительно к электромагнитному каротажу скважин имеет свои цели и особенности. Принципиальная идея электромагнитного каротажа весьма проста и состоит в следующем. Источник и приемник электромагнитного поля помещены в скважину и разнесены вдоль скважины на некоторое расстояние (длина зонда). Перемещая зонд вдоль скважины, измеряют электромагнитное поле и получают зависимость наблюдаемой величины от положения зонда относительно среды. Существующие количественные связи между наблюдаемым электромагнитным полем и электромагнитными характеристиками (как правило, электропроводность и диэлектрическая проницаемость) среды делают принципиально возможным определение свойств среды (по крайне мере, в зоне, прилегающей к скважине).

Среда является неоднородной. Ее электропроводность и диэлектрическая проницаемость изменяются как вдоль оси скважины, так и в зависимости от расстояния до этой оси. Поэтому электромагнитное поле, возбуждаемое и измеряемое в скважине, содержит информацию не только о части среды, расположенной против зонда и примыкающей к скважине, но и об электрической структуре исследуемого объема горных пород. Она зависит от электрических свойств промывочной жидкости, заполняющих скважину, наличия каверн и глинистых корок, от строения промежуточной зоны, возникающей при проникновении фильтрата промывочной жидкости в прискважинную область и т.д. Кроме того, электромагнитное поле зависит от типа и конструктивных особенностей зонда, частоты первичного поля.

Рассмотрим задачу о распространении электромагнитных волн в околоскважинном пространстве.

В качестве модели среды рассматривается цилиндрически-слоистая среда, электромагнитные параметры которой зависят только от расстояния до оси скважины-координаты r цилиндрический системы координат $\{r, \varphi, x_3\}$. Значения ε и σ считаем постоянными в каждом цилиндрическом слое, окружающем скважину, но могут меняться от слоя к слою. Ось x_3 расположена по центру скважины и направлена вниз.

В качестве источника рассмотрим длинный кабель, направленный вдоль оси Ox_3. В момент времени $t = 0$ включается ток, описывающийся функцией $q(t)$, например:

$$q(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Распространение тока в кабеле описывается функцией $\eta(r)$. Полагая, что кабель имеет большую длину и измерения в скважине происходят достаточно глубоко, можно пренебречь влиянием земной поверхности.

Процесс распространения электромагнитных волн в среде описывается системой уравнений Максвелла [1]:

$$\begin{cases} rotH = \varepsilon \dfrac{\partial E}{\partial t} + \sigma E + j^{cm}, \\ rotE = -\mu \dfrac{\partial H}{\partial t}. \end{cases} \tag{1}$$

Вектор плотности сторонних токов j^{cm} при наших предположениях равен:

$$j^{cm} = (0,0,1)^T q(t)\eta(\sqrt{x_1^2 + y_2^2}) = \left(0,0,\gamma_3\right). \tag{2}$$

Считаем, до момента времени $t = 0$ ток в кабеле отсутствует, т.е.

$$E\big|_{t<0} = 0, \; H\;\big|_{t<0} = 0. \tag{3}$$

При такой постановке задачи функции $\varepsilon, \sigma, j^{cm}$ не будут зависеть от координаты x_3, поэтому E и H не зависят от x_3, тогда $E = (0,0,E_3)$, $H = (H_1, H_2, 0)$. Используя определения ротора, распишем систему уравнений Максвелла, окончательно получим систему из шести уравнений:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_1 + \sigma E_1 = \frac{\partial}{\partial x_2} H_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} H_2,$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_2 + \sigma E_2 = -\frac{\partial}{\partial x_1} H_3 + \frac{\partial}{\partial x_3} H_1,$$

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_3 + \sigma E_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} H_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} H_1 - \gamma_3,$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} H_1 = -\frac{\partial}{\partial x_2} E_3 + \frac{\partial}{\partial x_3} E_2,$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} H_2 = -\frac{\partial}{\partial x_1} E_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} E_1$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} H_3 = -\frac{\partial}{\partial x_1} E_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} E_1.$$

В связи с предположением (2) векторы электрической и магнитной напряженности будут иметь компоненты

$$E = \left(0,0,E_3\right), \; H = \left(H_1, H_2, 0\right).$$

Тогда система (1) примет вид:

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t} E_3 + \sigma E_3 = \dfrac{\partial}{\partial x_1} H_2 - \dfrac{\partial}{\partial x_2} H_1 - \gamma_3, \\ \mu \dfrac{\partial}{\partial t} H_1 = -\dfrac{\partial}{\partial x_2} E_3, \\ \mu \dfrac{\partial}{\partial t} H_2 = \dfrac{\partial}{\partial x_1} E_3. \end{cases} \tag{4}$$

С начальными данными $E_3\big|_{t<0}=0$, $H_1\big|_{t<0}=0$, $H_2\big|_{t<0}=0$. Продифференцируем первое уравнение системы (4) по t, второе — по x_2, третье — по x_1 и исключим H_1, H_2 из первого уравнения. Используя два последних, получим:

$$\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_3+\frac{\partial}{\partial t}\sigma E_3=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_1}E_3\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_2}E_3\right)-\frac{\partial}{\partial t}\gamma_3 . \tag{5}$$

Запишем уравнение (5) в цилиндрической системе координат, обозначив $\upsilon(r,\varphi,t)=E_3(x_1,x_2,t)$. Перевод из декартовой системы координат в цилиндрическую производится по формулам

$$x_1=r\cos\varphi,\ x_2=r\sin\varphi,\ r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\ .$$

Производные по переменным x_1, x_2 находятся по формулам

$$\frac{\partial E_3}{\partial x_1}=\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_1}+\frac{\partial\upsilon}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial x_2}=\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_2}+\frac{\partial\upsilon}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}.$$

Так как модель рассматривается осесимметрическая, то функция υ не зависит от переменной φ. Тогда в последних выражениях, при отсутствии последнего слагаемого в правых частях, имеем:

$$\frac{\partial E_3}{\partial x_1}=\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}=\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 E_3}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2\upsilon}{\partial r^2}\cos^2\varphi+\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\frac{\sin^2\varphi}{r},$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial x_2}=\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}=\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 E_3}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2\upsilon}{\partial r^2}\sin^2\varphi+\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\frac{\cos^2\varphi}{r}.$$

Подставив полученные выражения в (5), имеем:

$$\varepsilon\upsilon_{tt}+\sigma\upsilon_t+pq_t=\frac{1}{\mu r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\upsilon}{\partial r}\right),\ t>0,\ r>0 . \tag{6}$$

Так как модель осесимметричная, то имеем граничное условие

$$\upsilon_r\big|_{r=0}=0,\ t>0 . \tag{7}$$

Начальные данные:

$$\upsilon\big|_{t=0}=0,\ \upsilon_t\Big|_{t=0}=\frac{1}{\varepsilon}\eta q(0) . \tag{8}$$

Корректность прямой задачи (6)–(8) вытекает из известных результатов по теории гиперболических уравнений [1]. Поэтому будем предполагать, что коэффициенты в (6) и начальные данные (8) удовлетворяют условиям, характеризующим достаточную гладкость решения и, следовательно, промывочную замену частных производных в (6) их дискретными аналогами. В случае разрывов естественно необходимо добавить условия непрерывности касательных компонент поля. Запишем задачу (6)–(8) в безразмерной системе единиц, положим $\upsilon=\alpha\omega$, $t=\beta\hat{t}$; $r=\gamma\hat{r}$, тогда имеем:

$$\omega_{tt}-a^2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)+2b\omega_t=-c , \tag{9}$$

$$\omega\big|_{t=0}=0,\ \omega_t\Big|_{t=0}=\frac{\eta q(0)}{\varepsilon}, \tag{10}$$

$$\omega_r\big|_{r=0}=0, \tag{11}$$

где $a=\dfrac{\beta}{\gamma\sqrt{\mu\varepsilon}}$, $b=\dfrac{\beta\sigma}{2\varepsilon}$, $c=\dfrac{\beta\eta(r)q'(t)}{\alpha\varepsilon}$. Выбирая параметры α,β,γ следующим образом: $\alpha=\dfrac{2\|\eta q'\|}{\max\sigma}$, $\beta=\dfrac{2\min\varepsilon}{\max\sigma}$, $\gamma=\dfrac{\beta}{\mu\min\varepsilon}$, получим, что $a,b\in[0,1]$, $c\in[-1,1]$, $r\in[0,R]$.

Обратная задача. Найти коэффициенты b из соотношений (9)–(11) по известной дополнительной информации:

$$\omega(0,t;b)=f(t). \tag{12}$$

Пусть $p(r)$ — приближенное решение обратной задачи. Решение обратной задачи рассматривается как управление, доставляющее минимум функционалу:

$$J(p)=\int_0^T\left[\omega(0,t;p)-f(t)\right]^2 dt\ . \tag{13}$$

Для минимизации функционала (13) применим итерационный метод сопряженных градиентов. Пусть задано приближение $p^{(n)}$, последующие приближения определим из

$$p_{(r)}^{(n+1)}=p_{(r)}^{(n)}-\alpha_k\chi_k(r), \tag{14}$$

где $\chi_0=\nabla J^+\left(p^{(0)}\right)$, $\chi_k=\nabla J\left(p^{(k)}\right)-\beta_k\chi_{k-1}$, $k=1,2,...$, $\beta_k=-\left\|\nabla J\left(p^{(k)}\right)\right\|^2\Big/\left\|\nabla J\left(p^{(k-1)}\right)\right\|^2$.

Параметр α_k определен из условий:

$$\alpha_k\le\frac{J\left(p^{(k)}\right)}{\left\|\nabla J\left(p^{(k)}\right)\right\|^2},\ J\left(p^{(k+1)}\right)\le J\left(p^{(k)}\right).$$

Здесь $\nabla J\left(p^{(k)}\right)$ — градиенты функционала, который имеет вид

$$\nabla J\left(p^{(k)}\right)=\int_0^T\omega_t\left(r,t;p^{(k)}\right)\cdot\psi\left(r,t;p^{(k)}\right)dt,\ k=1,2,...,$$

где ω — решение прямой задачи, а $\psi(r,t)$ — решение следующей сопряженной задачи:

$$\psi_{tt}-2p\psi_t+c=a^2(\psi_{rr}+\frac{1}{r}\psi_r), \tag{15}$$

$$\psi_r\big|_{r=0}=2\left[\omega(0,t;p)-f\right], \tag{16}$$

$$\psi\big|_{t=T}=0,\ \psi_t\big|_{t=T}=0, \tag{17}$$

$$\psi\big|_{r=R}=0. \tag{18}$$

Дискретный аналог оптимизационного метода

Рассмотрим сеточную область $\Omega=\left\{(hi,\tau k),\ i=0,N,\ k=0,2N\right\}$. Пусть p_i — приближенное решение обратной задачи. Аппроксимируем задачу (9)–(11) следующей разностной схемой [2]:

$$y_{\bar{t}t}-a^2\left(\hat{y}_{\bar{r}r}+\frac{1}{r}\hat{y}_r\right)+2py_t+c_i^k=0,\ i=\overline{1,N},\ k=\overline{2,2N}=M, \tag{19}$$

$$y_i^0=0,\ y_i^1=\frac{\tau\eta_i q^0}{\varepsilon_i}, \tag{20}$$

$$y_0^k=y_1^k. \tag{21}$$

Пусть относительно решения разностной задачи (19)–(21) известна дополнительная информация:

$$y_0^k=f(t_k),\ 1\le k\le M.$$

Рассмотрим дискретный функционал:

$$J\left[p\right]=\tau\sum_{k=1}^{M}\left[y_0^k\left\{p_i\right\}-f^k\right]^2. \qquad (22)$$

Проводя аналогичное, как в работах [3; 4], рассуждение нетрудно получить, что градиент функционала (22) имеет вид

$$\nabla J\left[p\right]=\tau\sum_{k=2}^{M}y_t\cdot\varphi^{k-1}+(y_i^1-y_i^0)\cdot\varphi^1. \qquad (23)$$

Аппроксимируем сопряженную задачу (15)–(18) следующей разностной схемой:

$$\varphi_{\bar{t}t}-2p\varphi_t+c_i^k=a^2\left(\check{\varphi}_{\bar{r}r}+\frac{1}{r}\check{\varphi}_r\right),\ i=\overline{1,N-1},\ k=M,M-1,...,2, \qquad (24)$$

$$\varphi_{r,0}=2\left[y_0^k-f^k\right],\ k=M,M-1,...,1, \qquad (25)$$

$$\varphi_i^M=0,\ \varphi_{r,i}^M=0,\ i=\overline{0,N}, \qquad (26)$$

$$\varphi_N^k=0,\ k=M,M-1,...,1. \qquad (27)$$

Таким образом, итерационный метод наискорейшего спуска можно осуществить по следующей схеме:

1. Задаем начальное приближение $p_i^{(0)}$.
2. Решая прямую задачу (19)–(21), находим: $y^{(0)}\left\{r_i,t_k;p_i^{(0)}\right\}$.
3. Вычислив краевые условия (25), решая сопряженную задачу (24)–(27), находим: $\varphi^{(0)}\left\{r_i,t_k;p_i^{(0)}\right\}$.
4. По формуле (23) вычисляем градиенты $\nabla J\left[p_i^{(0)}\right]$.
5. По формуле (14) находим очередное приближение $p_i^{(n+1)}$.
6. Проверяем значение функционала (22). Если он достиг минимума, то задача решена, если нет, то повторяем новое приближение $p_i^{(n)}$ по перечисленным шагам 1–6.

References

1. *Romanov V.G., Kabanikhin S.I.* Inverse Geoelectrics. — M.: Nauka, 1991. — 304 p.
2. *Samarskii A.A.* Theory of difference schemes. — M.: Nauka, 1997. — 656 p.
3. *Iskakov K.T., Oralbekova J.O.* Discrete analog of the optimization method for solving the inverse problem for the parabolic kinetic equation // Vestn. KarSU. — 2010. — № 2 (58).
4. *Yerdeneyeva A.A., Tyulepberdinova G.A.* Discrete analog of the optimization method for inverse problem of electrodynamicsomy in the quasistationary approximation // Vestn. KarSU. — 2010. — № 2 (58).