

Қ.Жетпісов, Д.Т.Әбдыкешова

Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті

АЛГЕБРАЛЫҚ АМАЛДАРДЫ ОҚЫП-ҮЙРЕНУДІҢ КЕЙБІР ПРОБЛЕМАЛАРЫ ЖАЙЛЫ

В статье рассматриваются свойства основных и производных операций, определенные в конечных множествах. Показана некоторая методика изучения свойств особых элементов (нейтральные, симметричные, регулярные) относительно данных операций.

In given article properties of main and derived operations defined in finite sets are considered. Some techniques of studying of properties of singular elements (identity elements, symmetrical elements, regular elements) concerning the given operations is shown.

«Алгебралық амал» ұғымы «алгебралық жүйе» ұғымының негізгі құраушысы ретінде өзінің маңыздылығын жан-жақты пропедевтивтік ұғынуды талап етеді. Сонымен қатар бұл мақалада «амал» ұғымының тура индуктивті мағыналық көрінісінен аксиомалар жүйесі түрінде абстракциялы берілу жолының кезеңдеріне тоқталамыз.

Басты назар бинарлық және унарлық (бірорынды және екіорынды) амалдарға аударылады. Бұл амалдар классикалық алгебралық жүйелердің негізгі амалдарының санына енеді. Сандық жиындарды анықталған арифметикалық (рационал) амалдарға пропедевтивтік саяхаттан бастап, абстракциялық жиында берілген алгебралық амалдар концепциясына байланысты анықтамалар мен ұғымдар жүйесін оқып-зерттеу айтылады.

Жеке жағдайда бинарлық амалдардың аксиомалық берілуі мектептен белгілі, формалдық әріптік теңдіктердің арифметикалық амалдардың заңдылықтары ретінде өрнектелуі түрінен шыққандығын айта кетуге болады. «Бинарлық алгебралық амал» ұғымын анықтауға жетелеуші, көптеген анықтамалардың мағыналық кері бейнесінің баламалары болып кәдімгі қосу, көбейту, алу, бөліктік амал (бөлу) және олардың қарапайым қасиеттері болып табылады.

Алгебралық жүйелер класын абстрактілі сипаттауға байланысты қойылатын мақсаттың бірі — қарастырылатын класта анықталған жүйенің негізгі амалдары мен қатынастардың басқа қасиеттерін беруші тиімді аксиомалар жиынтығын таңдау. Бұл жағдайда амалдар мен қатынастардың басқа қасиеттері сол сияқты жүйенің құрылымдық қасиеттері толығымен осы таңдалып алынған аксиоматика негізінде анықталады, яғни олардың салдары ретінде алынады.

Амалдарды Кэли кестесінің көмегімен беру оның қасиеттері туралы маңызды мағлұматтарды тереңірек зерттеуге көмектеседі.

Табиғаттары әр түрлі n -элементті жиындарда анықталған әр түрлі алгебралық амалдардың Кэли кестесін салыстыру белгілі бір деңгейде бұл амалдардың «ұқсастығын», белгілі бір жағдайда олардың қасиеттерінің бірдей екендігін анықтауға және оларды алгебралық жүйелерді изоморфизмге дейінгі дәлдікпен оқып-зерттеу концепциясын орындауға көмегін тигізеді [1].

n -элементті жиындарда анықталған екіорынды амалдарды салыстыруды талқыласақ, амалдардың тікелей берілуіне қарағанда, олардың арасында ортақ ештеңе жоқ сияқты. Осыған қарамастан, бұл айырмашылықтың таза сыртқы екендігін, яғни белгілі бір мағынада қарастырып отырған алгебралардың бір-бірінің тура көшірмесі екендігін түсінеміз.

1. Амалдарға қатысты ерекше элементтер (нейтралды, симметриялы, регулярлы)

Мектептегі математикадан кейбір сандық емес табиғаттағы элементтерден тұратын жиындарда анықталған амалдардың белгілі бір заңдылықтарға бағынатынын білеміз.

Мысалы, жазықтықтағы барлық векторлар жиыны векторларды қосу және алу, векторларды скаляр шамаға көбейту және қарама-қарсы векторларды алу амалдарына қатысты.

Z , Q және R бүтін, рационал, нақты сандар жиындарында әрбір a саны үшін қарама-қарсы ($-a$) саны бірімәнді анықталған.

Q және R жиындарында кез келген $a \neq 0$ саны үшін a^{-1} саны бірімәнді анықталған, яғни Z , Q және R жиындарында «қарама-қарсы элементті алу» туралы айтуға болса, ал Q және R жиындарында «кері элементті алу» туралы айтуға тура келеді. Осының арқасында Z , Q және R жиындарындағы алу амалын және Q және R жиындарындағы (бөліктік) бөлу амалын қосу және көбейту

амалдарын ғана қолданып анықтауға болады. Яғни, $\forall a, b \in Z(Q, R)$ үшін $a - b = a + (-b)$, ал $\forall a, b \in Q(R)$, $(b \neq 0)$, үшін $a \div b = a \cdot b^{-1}$.

« \rightarrow » және « \div » амалдарының осындай түрде анықталуы қосу және көбейту амалдары, кері және қарама-қарсы элементтерді алу туралы айтуға болатындықтан, пропедевтивтік деңгейінде қызығушылық тудырады. Яғни қарама-қарсы және кері элементті алу негізгі болса, онда алу мен бөлу амалдары — туынды амалдар, олар негізгілерден кейбіреулердің суперпозициясының көмегімен алынған. a және b нақты сандарына арифметикалық амалдарды қолдану салдарында қайтадан нақты сан аламыз. Осы типті амалдарды *алгебралық* деп атаймыз.

Жазықтықтағы барлық векторлар жиынында анықталған векторларды скаляр көбейту амалы алгебралық емес амалға мысал болады.

Арифметикалық амалдардың заңдылықтары нақты сандарға қолданылған мыңдаған ғасырлық практикалық жұмыстардың нәтижесінде анықталған. Тек соңғы ғасырларда олар өздерінің формал әріптің теңдіктер түріндегі өрнектелуін тапты. Сондықтан нақты сандардың табиғаты осы заңдардың қалыптасуының бастау көзі болып табылады.

Кез келген табиғаттағы математикалық объектілермен көп уақыттың практика нәтижесінде алынған тәжірибе абстрактілі жиында анықталған алгебралық амалдардың жалпы концепциясын анықтауға көмегін тигізді.

Алгебралық амалдар және олардың қасиеттеріне тоқталайық.

Анықтама 1 [2]. Егер M кез келген бос емес жиын және $n \in \mathbb{N}$ болса, онда $M^n = \{ \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \mid a_i \in M; i = 1, 2, \dots, n \}$ арқылы M жиынының декарттық n дәрежесін белгілейміз. M жиынында анықталған n -орынды алгебралық амал деп $f: M^n \rightarrow M$ бірмәнді (іштей) бейнелеуін айтады.

M жиынының декарттық n дәрежесінің элементтерін n -орынды кортеж деп атайды.

Кортеж индуктивті анықталады.

$$\langle a_1 \rangle = \{a_1\}$$

$$\langle a_1, a_2 \rangle = \{a_1; \{a_1, a_2\}\}$$

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle = \langle \langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle; a_n \rangle$$

Кортеж — реттелген элементтер тізбегі.

$$\langle a_1, a_2 \rangle \neq \langle a_2, a_1 \rangle$$

$$\text{Себебі, } \langle a_1, a_2 \rangle = \{a_1; \{a_1, a_2\}\}; \langle a_2, a_1 \rangle = \{a_2; \{a_2, a_1\}\}$$

f бейнелеуіндегі $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in M^n$ n -орынды кортеждің бейнесін $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ арқылы белгілейміз және ол a_1, a_2, \dots, a_n реттелген элементтер тізбегіне f амалын қолдану нәтижесі деп аталады.

Анықтама 2 [3]. Егер $n = 1$ болса, f — *унарлық* (бірорынды), ал егер $n = 2$ болса, f *бинарлық* (екіорынды) амал деп аталады. **Нөл орынды** алгебралық амал деп M жиынының нақты (бөлініп алынған) элементін айтамыз.

Екіорынды амал болған жағдайда $f(x, y)$ жазуын және f таңбасының орнына

* (• немесе \circ) таңбаларын қолданамыз.

M жиынында анықталған * екіорынды амалы:

а) коммутативті деп аталады, егер $(\forall x, y \in M) (x * y = y * x)$ болса;

ә) ассоциативті деп аталады, егер $\forall x, y, z \in M ((x * y) * z = x * (y * z))$ болса;

б) $e \in M$ элементі * амалына қатысты сол (оң) нейтралды деп аталады, егер $(\forall x \in M)(e * x = x)$ $((\forall x \in M)(x * e = x))$ болса.

Бір уақытта сол және оң нейтралды болатын элемент осы амалға қатысты **нейтралды элемент** деп аталады.

в) $x \in M$ элементі * амалына қатысты сол (оң) жағынан **симметрияланады** деп аталады, егер $(\exists x' \in M) (x' * x = e)$ $((\exists x' \in M) (x * x' = e))$ болса. Бір уақытта сол және оң жағынан симметрияла-

натын элемент **симметрияланатын элемент** деп аталады. M жиынында нейтралды e элементі бар деп саналады.

г) Егер a элементі $*$ амалына қатысты симметрияланатын болса, онда $a' \in M$ және $(a' * a = a * a' = e)$ орындалатын a' элементі a элементіне симметриялы деп аталады.

M жиынында анықталған $*$ алгебралық амалы үшін индуктивтік өріс анықтамасын (n –натурал саны бойынша) пайдаланып, кез келген $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in M$ үшін $a_1 * a_2 * \dots * a_n$ өрнегін анықтауға болады.

Индуктивтік қадамда ($n = k + 1$)

$$a_1 * a_2 * \dots * a_k * a_{k+1} = (a_1 * a_2 * \dots * a_k) * a_{k+1} \text{ деп аламыз.}$$

$*$ амалы ассоциативті болған жағдайда кез келген $m, n \in N, 1 \leq m \leq n - 1$ үшін

$a_1 * a_2 * \dots * a_m * a_{m+1} * a_{m+2} * \dots * a_n = (a_1 * a_2 * \dots * a_m) * (a_{m+1} * a_{m+2} * \dots * a_n)$ теңдігінің орындалатынын дәлелдеу қиын емес.

Егер $*$ ассоциативті екі орынды амалы M жиынында анықталған және осы амалға қатысты нейтралды элемент e болса, онда $a \in M$ элементінің ретін

$$\underbrace{a * a * \dots * a}_k = e$$

теңдігі орындалатын ең кіші k саны ретінде анықтаймыз.

Сандық жиындарда екі орынды амалдардың дәстүрлі мысалдары кәдімгі «+» және «•» амалдары болады.

1 - кесте

Екіорынды амалдардың жазылуының аддитивті және мультипликативті түрлері

Амал $*$	Элементтер $a; b$	Нәтиже $a * b$	Нейтралды элемент e	Симметриялы a'	$\underbrace{a * a * \dots * a}_k = e$ k рет
Қосу +	Қосылғыштар $a; b$	Қосынды $a + b$	Нөл 0	Қарама-қарсы $-a$	n -еселік $n \bullet a$
Көбейту •	Көбейткіштер $a; b$	Көбейтінді $a \bullet b$	Бір 1	Кері a^{-1}	n -дәреже a^n

Көп жағдайларда абстракциялық жиындардың өздеріне де екі орынды амалдарды белгілеу үшін осы таңбаларды пайдаланады.

Кәдімгі қосу және көбейту амалдары анықталған $M = Z(Q, R)$ жиындарында кез келген $a, b, c \in M$ элементтері үшін $a + c = b + c$ теңдігінен $a = b$ қатынасы алынады. $c \neq 0$ болғанда $a \cdot c = b \cdot c$ теңдігінен $a = b$ қатынасы алынады.

Анықтама 3. \circ — екіорынды алгебралық амалы M жиынында анықталған болсын, $c \in M$ элементі \circ -амалына қатысты сол жағынан (оң жағынан) регулярлы деп аталады, егер сәйкесінше кез келген $a, b \in M$ үшін $c \circ a = c \circ b$ ($a \circ c = b \circ c$) болғандықтан, $a = b$ болса.

Бір уақытта сол және оң жағынан (берілген амалға қатысты) регулярлы болатын элемент осы амалға қатысты **регулярлы** деп аталады.

Анықтамадан шығатын қорытынды: c элементі регулярлы болған жағдайда

$$c \circ a = c \circ b, a \circ c = b \circ c \text{ теңдіктерінен } c \text{ -ға «қысқарту» орынды.}$$

«+»-амалын кез келген $c \in M = Z(Q, R)$ элементінің осы амалға қатысты регулярлы болатындығын тексеру қиын емес.

Шынында, егер $a, b \in M$ элементтері үшін $a \oplus c = b \oplus c$ теңдігі орынды болса, $c \in M$ элементінің «+» амалына қатысты симметриялатындығын ескеріп, $(a \oplus c) \oplus (-c) = (b \oplus c) \oplus (-c)$ теңдігін аламыз.

\oplus амалының ассоциативтілігінен $a \oplus (c \oplus (-c)) = b \oplus (c \oplus (-c))$, немесе $a = b$, себебі $c \oplus (-c)$

\oplus амалына қатысты нейтралды элементті береді. Осыған ұқсас c -элементінің оң жағынан регулярлы болатындығы дәлелденеді.

2. Негізгі және туынды амалдар

Туынды амалдармен байланысты алгебралық амалдар мен ұғымдарды оқып-зерттемес бұрын өзімізге таныс Z , Q , R сәйкесінше бүтін, рационал, нақты сандық жиындарында анықталған қосу, көбейту, қарама-қарсы және кері элементті алу сияқты амалдардан бастаған дұрыс.

Негізгі амалдарға қатысты, айта кетсек, қосу және көбейту екі орынды амалдар болса, қарама-қарсы элементті алу — бірорынды амал, ал кері элементті алу амалы — бөліктік бірорынды амал. Z жиынында тек қана 1 және (-1) өзара кері элементтер болса, ал Q және R жиындарында 0-ден басқа элементтердің кері элементтері бар.

Мектептегі алгебрадан таныс, арифметикалық амалдардың суперпозициясы негізінде алынған туынды амалдардың мысалдарына талдау осы амалдардың қарапайым заңдарына негізделген.

Мысалы: M жиыны Z , Q , R жиындарының бірі болсын.

\oplus және \otimes амалдарын M жиынында келесі ережемен анықтайық:

$$(\forall x, y \in M) (x \oplus y = x + y + 1), \quad (\forall x, y \in M) (x \otimes y = x + y + x \cdot y),$$

мұндағы $+$ және \cdot — сәйкесінше M жиынындағы қосу және көбейту (табиғи) амалдары.

Анықтамадан \oplus және \otimes амалдарының M жиынындағы екі орынды амалдар екендігін көреміз. Бұл амалдардың коммутативтілік, ассоциативтілік қасиеттерін тексеру өте оңай.

Мысалы:

$$a \oplus b = b \oplus a \quad \forall a, b \in M.$$

$$a \oplus b = a + b + 1 \quad b \oplus a = b + a + 1.$$

M жиынында $a + b = b + a$ болғандықтан, $a \oplus b = b \oplus a$.

\oplus және \otimes амалына қатысты дистрибутивтілік қасиетін көрсетейік. Яғни $(\forall x, y, z \in M)((x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z))$.

Сонымен, M жиынының кез келген a, b, c элементтері алынып, ондағы негізгі $+$ және \cdot амалдарының қасиеттеріне сүйеніп, $(a \oplus (b \otimes c)) = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$ теңдігі дәлелденеді. Ол үшін теңдіктің кез келген бір бөлігін (оң немесе сол) алып, түрлендірулер жасай отырып, екінші бөлігін аламыз немесе ыңғайлы түрлендірудің көмегімен теңдіктің оң және сол жақ бөліктерінен өзара тең өрнектер аламыз

$$\begin{aligned} \text{А)} (a \oplus b) \otimes c &= (a + b + 1) \otimes c = a + b + 1 + c + (a + b + 1) \cdot c = a + b + 1 + c + a \cdot c + b \cdot c + c = \\ &= a + b + 2c + a \cdot c + b \cdot c + 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ә)} (a \otimes c) \oplus (b \otimes c) &= (a \otimes c) + (b \otimes c) + 1 = a + c + a \cdot c + b + c + b \cdot c + 1 = \\ &= a + b + 2c + a \cdot c + b \cdot c + 1. \end{aligned}$$

3. Ақырлы жиындарда анықталған амалдар. Кэли кестесінің ерекшелігі

Егер ақырлы $M(M = \{a_1, \dots, a_n\}, n \in \mathbb{N})$ жиынында $*$ екі орынды алгебралық амал анықталған болса, онда n жолдан, n бағанадан тұратын квадраттық (шаршылық) кесте құруға болады.

Кестенің жолдары мен бағаналары M жиынының элементтері арқылы нөмірленеді және a_i -ші жол мен a_j -ші бағананың қиылысуына осы a_i және a_j элементтеріне $*$ амалын қолданудың нәтижесі жазылады, яғни онда $a_i * a_j \in M(i, j \in \{1, 2, \dots, n\})$ элементі тұрады. Осындай кестелерді математикада **Кэли кестесі** [4] (ағылшын математигі Кэлидің атымен) деп атайды. Кэли кестесінің құрылымын зерттеу арқылы $*$ амалы мен қасиеттері туралы маңызды мағлұматтар алуға болады.

Мысалы, бұл кестенің бас диагональға қатысты симметриялылығы, $*$ амалының коммутативтілігі туралы айтады. Егер кестеде a_i нөмірлі бағана бар болып, ал жолдардың нөмірлерінің бағанасымен сәйкес келсе, онда a_i элементі $*$ амалына қатысты оң нейтралды элементі болады. Осыған ұқсас, жолдарды талдау арқылы сол нейтралды элементтің бар (жоқ) болуы туралы айта аламыз.

Егер Кэли кестесінде $(a_i * a_j) * a_k$ және $a_i * (a_j * a_k)$ элементтерінің орындарында $M(i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\})$ жиынының бірдей элементтері тұрса, онда $*$ амалы ассоциативті болады. Нейтралды элементтің бар болатындығы анықталған соң осы амалға қатысты симметрияланатын барлық элементтер табылады.

Кэли кестесі

a_j	a_1	a_2	...	a_j	...	a_n
a_i	$a_1 * a_1$	$a_1 * a_2$...	$a_1 * a_j$...	$a_1 * a_n$
a_1	$a_2 * a_1$	$a_2 * a_2$...	$a_2 * a_j$...	$a_2 * a_n$
a_2
...	$a_i * a_1$	$a_i * a_2$...	$a_i * a_j$...	$a_i * a_n$
a_i
...	$a_n * a_1$	$a_n * a_2$...	$a_n * a_j$...	$a_n * a_n$
a_n						

Нейтралды элемент бар болған жағдайда, егер әрбір жолдағы және әрбір бағанадағы әрбір элементтер болса (M жиынының барлық элементтері барлық жолдарда және бағаналарда бар болса), онда M жиынының әрбір элементі $*$ амалына қатысты бірімәнді симметрияланатын болады. Сонымен қатар M жиынының әрбір нақты ішкі жиыны M_1 бойынша $(\forall x, y \in M_1)(x * y \in M_1)$ шартын тексеру арқылы $*$ амалына қатысты осы ішкі жиынның тұйықталған болатындығын; M жиынының әрбір элементі бойынша ($*$ амалы ассоциативті болғанда) оның ретін анықтауға болады.

n элементі жиында берілген әр түрлі табиғатты $*$ және \bullet екіорынды алгебралық амалдардың Кэли кестесін салыстыру осы амалдардың белгілі бір деңгейдегі қасиеттерінің «ұқсастығын», ал кейбір жағдайларда бұл қасиеттердің бірдей екендігін көреміз.

Изоморфизмді анықтаушы концепциялардың негізгі қарарларын аргументті түрде айқындау үшін математиканың әр түрлі салаларынан алынған алгебралық жүйелердің (алгебралардың) қарапайым мысалын, яғни негізгі жиынды жүйе мен онда анықталған әр түрлі табиғатты амалды, қарастырайық.

Мысалы: Айталық, $\varphi_0 = x$; $\varphi_1 = \frac{1}{x}$; $\varphi_2 = 1 - x$; $\varphi_3 = \frac{x}{x-1}$; $\varphi_4 = \frac{x-1}{x}$; $\varphi_5 = \frac{1}{1-x}$ — $R - \{0, 1\}$ жиынындағы бір ғана x айнымалысының функциялары болсын. Осы $\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$ функциялар жиынтығында $*$ амалын келесі ережемен анықтайық:

$$(\forall \varphi_i, \varphi_j \in \Phi)(\varphi_i * \varphi_j = \varphi_i(\varphi_j)); \quad (i, j = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}).$$

Яғни φ_i және φ_j функцияларына $*$ амалын қолданудың нәтижесі φ_i функциясындағы x айнымалысының орнына φ_j функциясын қойғанда шыққан күрделі функция $\varphi_i(\varphi_j)$, φ_i және φ_j функцияларына $*$ амалын қолданудың нәтижесі — $\varphi_i * \varphi_j$.

Жеке жағдайда

$$\varphi_4 * \varphi_3 = \frac{\left(\frac{x}{x-1} - 1\right)}{\left(\frac{x}{x-1}\right)} = \frac{x - x + 1}{x} = \frac{1}{x} = \varphi_1;$$

$$\varphi_3 * \varphi_4 = \frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)}{\left(\frac{x-1}{x} - 1\right)} = \frac{x-1}{-1} = 1 - x = \varphi_2.$$

Тікелей есептеудің көмегімен $*$ амалына Φ жиында анықталған екіорынды амал болатындығын көреміз, яғни Φ жиыны $*$ амалына қатысты тұйықталған. 3-кестеден алатынымыз:

- φ_0 элементі $*$ амалына қатысты нейтралды элемент;
- Φ жиынының әрбір элементі симметрияланады;
- $*$ амалы коммутативті;
- $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — 2-ші ретті, φ_4, φ_5 — 3-ші ретті элементтер;

– * амалына қатысты $\{\varphi_0\}$; $\{\varphi_0; \varphi_1\}$; $\{\varphi_0; \varphi_2\}$; $\{\varphi_0; \varphi_3\}$; $\{\varphi_0; \varphi_4; \varphi_5\}$ ішкі жиындары тұйықталған. Тұйықталған ішкі жиындардың элементтерінің саны Φ жиынының элементтерінің санының белгіші болады.

3 - кесте

* –амалының Кэли кестесі

φ_j φ_i	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
φ_0	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5
φ_1	φ_1	φ_0	φ_5	φ_4	φ_3	φ_2
φ_2	φ_2	φ_4	φ_0	φ_5	φ_1	φ_3
φ_3	φ_3	φ_5	φ_4	φ_0	φ_2	φ_1
φ_4	φ_4	φ_2	φ_3	φ_1	φ_5	φ_0
φ_5	φ_5	φ_3	φ_1	φ_2	φ_0	φ_4

Қорытынды

«Алгебралық амал» ұғымын енгізу мен оқып-зерттеу мысалы арқылы оның интуитивті мағыналық көрінісінен бастап қазіргі заманғы абстрактілі берілу әдісіне дейінгі қалыптасу жолдары сараланып, ұғымдардың спиралды тармақталу принципі жүйелі орындалды.

Сандық жиындардағы нақты екіорынды амалдардың қасиеттерін анықтаудан аксиомалық берілген амалдар үшін осы қасиеттердің формал баламасын дәлелдеуде, нақтыдан абстрактілікке диалектикалық өрлеудің қорытындысы болатын, танымның фундаменталды принципін көруге болады. Екіорынды алгебралық амалды беру үшін құрылған Кэли кестесін пайдалану негізінде «алгебралық жүйе» ұғымын түсінудің пропедевтивтік әдістемесін, алгебралық жүйелерді изоморфизмге дейінгі дәлдікпен оқып-зерттеу концепциясының негіздік қарарларын пропедевтивтік тұрғыдан іске асыруды қалыптастыруға болады.

Әдебиеттер тізімі

1. Жетпісов Қ. Алгебралық жүйелердегі конгруэнция қатынасы және оны оқып-зерттеудің әдістемелік тұрғылары // Қарағанды университетінің хабаршысы. — 2009. — № 3(55). — 12–18-б.
2. Мальцев А.И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. — 392 с.
3. Гончаров С.С., Еришов Ю.Л., Самохвалов К.Ф. Введение в логику и методологию науки. — М.: Интерпракс, 1994. — 255 с.
4. Курош А.Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967. — 648 с.