Құрал К.А., Академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университеті, математика және ақпараттық технологиялар факультеті, МиИ 20-1 группасы, студент.
(*Ғылыми жетекші - PhD, аға оқытушы Токтамагамбетов Н.С*)

КАПУТО БӨЛШЕК ТУЫНДЫСЫ БАР q-АЙЫРЫМДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН КОШИ ТИПТЕС ЕСЕПТІҢ ШЕШІМІН АЛУ

Бөлшек туындылары бар теңдеулер өздерінің көп салаларда қолданылуына байланысты маңызды рөл атқарады, сонымен қатар олар тек математикада ғана емес, сонымен қатар басқа ғылымдарда да маңызды рөл атқарады. Бұл зерттеу жұмысында біз $\alpha > 0$ нақты ретті Капутоның q-бөлшек туындысы бар бөлшек-сызықтық q- дифференциалдық теңдеулердің нақты шешімдерін құрамыз. Нақтырақ айтсақ, біз осы Коши типтес q-бөлшек есептің сәйкес Вольтердің q-интегралдық теңдеуіне эквивалентті болатындығын қолдана отырып, негізгі нәтижелерге қол жеткіземіз. Осыдан кейін Вольтердің q-интегралдық теңдеуінің шешіміне тізбектеп жуықтау әдісін қолдана отырып, бөлшек-сызықтық q-дифференциалдық теңдеулердің нақты шешімдерін құрамыз. Сол сияқты бізде $\alpha > 0$ нақты ретті Капутоның бөлшек q-туындысы бар жалпы біртекті бөлшек q-дифференциалдық теңдеу бар және біз басқа q-функциясын береміз (Миттаг-Леффлер).

Бізге белгілі болғандай, Капутоның негізгі бөлшек туындысына негізделген сызықтық, біртекті және біртекті емес айырымдық теңдеулерге арналған Коши есебінің теориясы әлі де даму үстінде.

Осыған сүйене отыра келесі түрдегі $\alpha > 0$ ретті Капутоның ${}^cD^{\alpha}_{q,0+}$ q-бөлшек туындысы бар сызықтық q-бөлшек дифференциалдық теңдеуінің айқын шешімін құру мүмкіндігін қарастырамыз:

$$\left({}^cD^{\alpha}_{q,0+}y\right)(x)-\lambda y(x)=f(x), \qquad 0\le a<x\le b,\ \alpha>0;\ \lambda\in R, \tag{1}$$

бастапқы шарттары

$$y^{(k)}(0+)=b_k,\ b_k\in R,\ k=0,1,2,\ldots,n=-[-\alpha], \tag{2}$$

Мұндағы $f\in C_{q,\lambda}[a,b],\ 0\le\gamma\le 1,\ \gamma\le\alpha$ және $[\alpha]$ α-ға тең немесе үлкен ең кіші бүтін санды білдіреді.

Осы бөлімдегі негізгі күтілетін нәтиже, ол – Теорема 2.1, алайда бұл нәтижені дәлелдеу үшін алдымен екі нәтижені (Теорема 3.) дәлелдеу керек.

Алдымен q-есептеудің кейбір элементтерін еске түсірейік, қосымша ақпарат алу үшін [1], [2] және [3] кітаптарын қараңыз. Осы мақалада $0<q<1$ және $0\le a<b<\infty$ деп болжаймыз.

$\alpha\in R$.болсын. Онда q-нақты $[\alpha]_q$ саны келесідей анықталады

$$[\alpha]_q=\frac{1-q^{\alpha}}{1-q}$$

мұндағы $\lim\limits_{q\to 1}\dfrac{1-q^{\alpha}}{1-q}=\alpha$.

$k\in N$ үшін

$$(a;q)_0=1,\ (a;q)_n=\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-q^k a\right),\ (a;q)_\infty=\lim_{n\to\infty}(a;q)_n,\ (a;q)_\alpha=\frac{(a;q)_\infty}{\left(q^\alpha a;q\right)_\infty}.$$

$[n]_q!$ биномдық коэффициенттері үшін q-аналог келесідей анықталады:

$$[n]_q! = \begin{cases} 1, & if\ n = 0, \\ [1]_q \times [2]_q \times \cdots \times [n]_q, & if\ n \in N, \end{cases}$$

Кез келген $x > 0$ үшін $\Gamma_q(x)$ гамма функциясы келесідей анықталады:

$$\Gamma_q(x) = \frac{(q;q)_\infty}{(q^x;q)_\infty}(1-q)^{1-x}.$$

$$\Gamma_q(x)[x]_q = \Gamma_q(x+1).$$

$D_q f(x)$ дифференциалдық операторы үшін q-аналог келесідей болады:

$$D_q f(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{x(1-q)},$$

Кез келген $t, s > 0$ үшін q-Бетта функциясының анықтамасы келесідей болады:

$$B_q(t,s) = \frac{\Gamma_q(t)\Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t+s)} = \int_0^1 x^{t-1}(qx;q)_{s-1} d_q x$$

$E_{q,\alpha,\beta}(z)$ (Миттаг-Леффлер) q-функциясы келесідей анықталады:

$$E_{\alpha,\beta,a}\left[zx^\alpha (a/x;q)_\alpha ; q\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k x^{k\alpha} (a/x;q)_{k\alpha}}{\Gamma_q(\alpha k + \beta)}$$

Анықтама 1. $\alpha > 0$ ретті $I^n_{q,a+} f$ Риман-Луивиль q-бөлшек интегралы келесідей анықталады:

$$\left(I^\alpha_{q,0+} f\right)(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma_q(\alpha)} \int_0^x (qt/x;q)_{\alpha-1} f(t) d_q t.$$

Анықтама 2. Капутоның $\alpha > 0$ ретті ${}^c D^\alpha_{q,a+} f$ q-бөлшек туындысы келесідей анықталады

$$\left({}^c D^\alpha_{q,a+} f\right)(x) = \left(I^{[\alpha]-\alpha}_{q,a+} D^{[\alpha]}_{q,a+} f\right)(x).$$

$\lambda \in (-1, \infty)$ үшін

$$\left(I^\alpha_{q,a+} x^\lambda (a/x;q)_\lambda\right)(x) = \frac{\Gamma_q(\lambda+1)}{\Gamma_q(\alpha+\lambda+1)} x^{a+\lambda} (a/x;q)_{\alpha+\lambda},$$

екенін ескерген жөн.

Теорема 1. $n - 1 < \alpha \le n; n \in N$, G – R кеңістігіндегі ашық жиын болсын және $f(.,.) : (0,a] \times G \to R$ – кез келген $y \in G$ үшін $F(x, y(x)) = f(x) + \lambda y(x) \in L^1_q[0,a]$ теңдігі орындалатындай функция болсын. Егер $y(x) \in L^1_q[0,a]$, онда $y(x)$

$$y(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{[k]_q!} x^k + \left(I^\alpha_{q,0} f(t, y(t))\right)(x), \ \forall x \in (0,a].$$

интегралдық теңдеуіне сәйкес болса, сонда және тек қана сонда $y(t)$ (1)-(2) қатынастарына сәйкес болады

Теорема 2. $\gamma \geqq \alpha$ теңсіздігі орындалатындай $n-1<\alpha \le n\ (n \in N)$ және $0 \le \gamma < 1$ болсын. Сонымен қатар $\lambda \in R$ болсын. Егер $f(x) \in C_{q,\gamma}[0,a]$ болса, онда (1)-(2) Коши есебінің $y(x) \in C_{q,\gamma}^{\alpha,n-\alpha}[0,a]$ жалғыз шешімі бар және ол шешім келесідей беріледі

$$
\begin{aligned}
y(x) &:= \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k E_{\alpha,k+1,0}\left(\lambda x^{\alpha};q\right) \\
&+ \int_0^x x^{\alpha-1}\left(qt/x;q\right)_{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha,t}\left(\lambda x^{\alpha}\left(q^{\alpha}t/x;q\right)_{\alpha};q\right) f(t)\, d_q t
\end{aligned}.
$$

Теорема 1 негізінде Вольтерраның q-интегралдық теңдеуінің, демек (1)-(2) Коши типтес есебінің де айқын шешімі алынды.

Қолданылған әдебиеттер

1. Cheung P., Kac V. "Quantum calculus Edwards Brothers, Inc., Ann Arbor, MI, USA., (2000).
2. Ernst T., "A new method of q-calculus Doctoral thesis, Uppsala university.(2002).
3. Annaby M.H., Mansour Z.S., "q-fractional calculus and equations Springer, Heidelberg. (2012).

Мұхамедрахим А.Р., Академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университеті, физика-техникалық факультеті, ТЭК-210к-21 тобы, студент
(Ғылыми жетекшісі –PhD докторы, постдокторант Дюсембаева А.Н.)

КӨЛДЕНЕҢ ОСЬТІ АЙНАЛМАЛЫ ЦИЛИНДРЛІ ҚҰРАМАЛЫ ЖЕЛ ҚОНДЫРҒЫСЫНЫҢ АЭРОДИНАМИКАЛЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫН ЗЕРТТЕУ

Отын энергетикалық ресурстарды үнемдеу, қоршаған ортаны зиянды әсерден сақтау және аймақтарды электр энергиясымен қамту үшін жаңартылатын энергия көздері қажет. Әлемде жаңартылатын энергия көзінің дамып келе жатқан түріне жел энергетикасы жатады. Соңғы уақытта әлемде жаңғыртылатын энергия көздеріне деген қызығушылық артуда.

Қазақстан Республикасының 2007-2024 жылғы тұжырымдамасына сәйкес 2024 жылға дейін жаңғыртылатын энергия көздері жалпы энергия көздерінің 5%-ын құрауы керек. Осылайша, жел энергетикасы экологиялық «таза» энергия көзі ретінде, сонымен қатар еліміздің энергетикалық қауіпсіздігін және электрэнергиясының отын бағасына деген тәуелділігін төмендетеді сонымен қатар әлеуметтік-экономикалық дамуын қолдайды. Жел қондырғыларын тиімді пайдалану маңызды болып табылады, себебі планетада энергияның табиғи балансы бұзылмайды және біруақытта қалдықсыз, экологиялық таза энергия өндіру технологиясы қолданылады. Аз жел жылдамдықтарында тиімді жұмыс істейтін, айналмалы цилиндрлі құрамалы жел қондырғылары ерекше қызығушылық танытуда [1, 2]. Мұндай жел қондырғысының жұмыс істеу тиімділігін арттыру үшін оның элементтерінің аэродинамикалық сипаттамаларын, яғни көлденең қималы айналмалы цилиндрлі жүйесін, оңтайландыру жолдарын зерттеу керек. Сәйкесінше, бұл жұмыс ғылыми тұрғыдан алсақта, практикада қолдансақта өзекті болып табылады.

Бұл жұмыстың мақсаты көлденең осьті айналмалы цилиндрлі құрамалы жел қондырғысының айнымалы ағындағы қозғалысының аэродинамикалық сипаттамаларын тәжірибелік зерттеулерін талдау болып табылады.

Зерттеу жұмысы физика-техникалық факультетіндегі «Баламалы энергетика» ғылыми-зерттеу орталығындағы «Аэродинамикалық өлшеулер» зертханасында айналмалы цилиндрлі құрамалы жел қондырғысының моделі жасалды, кейіннен ол көлденең ауа ағынында әр түрлі жел жылдамдықтарында зерттелді.