СВОЙСТВА ФОРМУЛЬНО-ОПРЕДЕЛИМЫХ КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ

Бекенов М., Касатова А., Нуракунов А.

[1]*Евразийский Национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан*

[2]*НАО Медицинский университет Караганды*

[3]*Институт математики НАН КР, Бишкек, Кыргызстан*

E-mail: [1]bekenov50@mail.ru

Рассматриваются формульно-определимые классы моделей (т.е. алгебраических структур) и их элементарные теории счетного языка первого порядка относительно произведений этих теорий, а также формульно-определимые квазимногообразия. Доказываются некоторые свойства которым они удовлетворяют.

Пусть A модель сигнатуры Ω, Th(A)- полная (элементарная) теория модели A.

На множестве $T(\Omega)$-множество всех полных теорий счетной сигнатуры Ω рассмотрим бинарную операцию $\bullet$ по правилу $T\bullet S= Th(\{A\times B \mid A|= T$ и $B|=S\})$, для любых двух полных теорий $T,S \in T(\Omega)$. Понятно, что $< T(\Omega); \bullet>$ есть коммутативная полугруппа с единицей, которую называем полугруппой полных теорий. В дальнейшем теория означает полная теория.

<u>Определение</u>. Класс моделей *K* называется *формульно-определимым классом* моделей, если существует модель A такая, что $K=\{ B \mid Th(B) \bullet Th(A) = Th(A)$. Теория Th(A) называется теорией, *определяющей* класс моделей *K*. Если квазимногообразие является формульно-определимым классом моделей, то квазимногообразие называем *формульно-определимым квазимногообразием.*

Доказано, что формульно-определимый класс моделей будет аксиоматизируемым классом моделей и замкнут относительно бесконечных произведений моделей. Приведены примеры аксиоматизируемого класса, который является формульно-определимым классом моделей и аксиоматизируемый класс моделей, не являющимся формульно-определимым классом моделей.

Для квазимногообразий найдены примеры формульно-определимых квазимногообразий и не формульно-определимых квазимногообразий.

Доказано, что любое многообразие - формульно-определимый класс моделей. Также показано, что класс коммутативных полугрупп вложимых в группы является формульно-определимым квазимногообразием, который не является многообразием.

Теория T- идемпотентная теория, если $T \bullet T = T$.

Доказано, что для любого формульно-определимого класса моделей существует идемпотентная теория определяющая этот класс моделей.

Также доказано, что формульно-определимый класс моделей будет квазимногообразием если идемпотентная теория, определяющая этот класс моделей такая, что каждая подмодель ультрастепени модели этой теории лежит в этом классе. Из этого результата следует, что формульно-определимый класс моделей будет квазимногообразием, если он определяется универсальной теорией. И даны примеры, показывающие, что эти два приведенных условия не эквивалентны.

Также доказано, что множество всех идемпотентных полных теорий образует полную решетку относительно частичного порядка $\leq$, определенного как $T\leq S$ тогда и только тогда, когда $T\bullet S = S$, для любых $T,S \in T(\Omega)$.

Также рассмотрены некоторые свойства теорий моделей формульно-определимых классов, когда определяющая его теория удовлетворяет определенным свойствам (категоричности, существования счетно-насыщенной модели или стабильности)

Список использованной литературы

1. М.И. Бекенов, А.М. Нуракунов. Полугруппы теорий и ее решетка идемпотентных элементов. Алгебра и логика 60, 1-14, 2021
2. G. Birkhoff_, Lattice theory, Third Edition, Amer. Math. S.,. Providence, R.I. (1967).

3.S. Feferman and R. Vaught, The _rst order properties of algebraic systems. Fundamenta Mathematicae 47, p. 57-103, 1959.
4.T. E. Frayne, A. C. Morel and D. S. Scott, Reduced direct products, Fundamenta Mathematicae, 51 (1962), 195-228.
5.F. Galvin, Horn sentences. Ann. Math. Logic, 1(1970), 389-422.
6.V. A. Gorbunov, Algebraic Theory of Quasivarieties, Plenum Publ. Co., New York (1998).
7.W. Hodges, Model Theory (Encyclopedia of Mathematics and its Applications). Cambridge: Cambridge University Press. (1993).
8.H. J. Keisler, Ultraproducts and elementary classes, Indagationes Mathematicae 23 (1961) 477-495.
9.M. Machover, A note on sentences preserved under direct products and powers, Bull. Acad. Polon. Sci. Math., 8(1960), 519-523.
10.A. Macintyre, Direct powers with distinguished diagonal, Conference in Mathematical Logic London 1970
11.А. И. Мальцев, Алгебраические системы, М. Наука (1970),с.392
12.D. Rees, On semigroups, Proc. Camb. Phil. Soc. 36(1940), 387-400.
13.S. Shelah, Every two elementarily equivalent models have isomorphic ultrapowers, Israel Journal of Mathematics, 10 (1971), 224-233.
14.R. Vaught, On sentences holding in direct products of relational system, Proc. Intern. Congr. of Mathematicians, Amsterdam, (1954), Noordho_, Groningen, 409.
15.J. M. Weinstein, First order properties preserved by direct product, Ph.D. thesis. Univ. Wisconsin (1965), Madison,
16.J. Wierzejewski, On stability and products, Fundamenta Mathematicae, 93(1976), 81-95.
17.М. И. Бекенов, Решетка формульно-определимых подквазимногообразий полных теорий квазимногообразия полных теорий. Мальцевские чтения.Новосибирск.2018.

КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБРЫ ЛИ ТИПА A_2 И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Ибраев Ш.Ш., Сейтмуратов А.Ж.
Кызылординский университет имени КоркытАта, Кызылордаа, Казахстан
E-mail: ibrayevsh@mail.ru, angisin_@mail.ru

В докладе рассматриваются результаты, полученные при исследований когомологии алгебры Ли типа A_2 над полем характеристики $p > 3$с коэффициентами в простых модулях, и их некоторые приложения. Для малых характеристик поля ($p = 2,3$) аналогичные результаты докладывались в [1].

Пусть $\mathfrak{g}$ – классическая алгебра Ли типа A_2 над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 3, M$ – простой -модуль. Когомологии с коэффициентами в простых $\mathfrak{g}$-модулей ранее были вычислены только в случаях $H^1(\mathfrak{g}, M)$ [2]и$H^2(\mathfrak{g}, M)$ [3]. В общем случае справедлива следующая

Теорема 1. $\mathfrak{g}$ – *классическая алгебра Ли типа A_2 над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 3, M$ – простой -модуль. Тогда имеют место следующие изоморфизмы SL_3-модулей:*

(a) $H^n(\mathfrak{g}, k) \cong k$, если $n = 0,3,5,8$;

(b) $H^n\big(\mathfrak{g}, L(p-2,1)\big) \cong \begin{cases} L(1,0)^{(1)}, \text{если } n = 1,7, \\ 2L(1,0)^{(1)}, \text{если } n = 4; \end{cases}$

(c) $H^n\big(\mathfrak{g}, L(1,p-2)\big) \cong \begin{cases} L(0,1)^{(1)}, \text{если } n = 1,7, \\ 2L(0,1)^{(1)}, \text{если } n = 4; \end{cases}$

(d) $H^n(\mathfrak{g}, L(p-3,0)) \cong L(1,0)^{(1)}$, если $n = 2,3,5,6$;

(e) $H^n(\mathfrak{g}, L(0,p-3)) \cong L(0,1)^{(1)}$, если $n = 2,3,5,6$;

(f) $H^n\big(\mathfrak{g}, L(p-2,p-2)\big) \cong \begin{cases} k, \text{если } n = 1,7, \\ L(1,1)^{(1)}, \text{если } n = 3,5 \\ 2L(1,1)^{(1)} \oplus 2k, \text{если } n = 4. \end{cases}$

Во всех остальных случаях$H^n(\mathfrak{g}, M) = 0$.

Рассмотрим некоторые приложения Теоремы 1. Она позволяет описать когомологию алгебры Ли $\mathfrak{gl}_3$ над алгебраически замкнутым полем kхарактеристики $p > 3$с коэффициентами в простых модулях. Простого $\mathfrak{g}$-модуля Mможно наделит структурой $\mathfrak{gl}_3$-