3 Birgebaev A., Otelbaev M. *Separability of a third-order nonlinear differential operator*. Proceedings of the Academy of Sciences of the Kazakh SSR. Seriya of physical and mathematical, № 3, 1984, p. 11–13.

4 Aytkozha Zh.Zh., Muratbekov M.B. *On smoothness and approximation properties of solutions of nonlinear differential equations of third order with complex potential*. Abstracts of Republican Scientific Conference «Theory of approximation and embedding of functional spaces», Karaganda, 1991, p. 52.

5 Aytkozha Zh.Zh. *On smoothness and approximation properties of solutions of differential equations of odd order:* Thesis for the degree of candidate of physical and mathematical sciences. Department of Mathematics, Kazakh National University, Almaty, 2003.

6 Aytkozha Zh.Zh., Muratbekov M.B., Ospanov K.N. *On the solvability of a class of nonlinear singular third-order equations* // Eurasian National University Bulletin. № 6 (46), 2005, p. 10–15.

7 Edwards R.E. *Functional Analysis*. Theory and Applications, Moscow: Mir, 1969, p. 902.

УДК 517.51

А.О.Байарыстанов, А.М.Темирханова, С.Шаймардан

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана (E-mail: oskar_62@mail.ru)

Весовое неравенство Харди в квантовом анализе

В статье установлены необходимые и достаточные условия выполнения *q*-аналога весового (r, p)-неравенства Харди для любых положительных значений параметров r, p. Аналогом классического непрерывного математического анализа, ориентированным на информационные технологии, служит квантовое исчисление, или *h*-анализ и *q*-анализ. Квантовый анализ образно характеризуется как дифференциальное исчисление, без взятия пределов, и имеет важные приложения в аналитической теории чисел, в комбинаторике, в квантовой группе и алгебре, в квантовой физике и в других областях математики и естествознания.

Ключевые слова: весовое неравенство Харди, дискретное неравенство Харди, *q*-анализ, *h*-анализ, *q*-аналог, *h*-аналог.

1 Введение

Основу квантового анализа составляют (см. [1]) так называемые h-анализ и q-анализ. h-анализ как конечноразностное исчисление развито достаточно хорошо (см., например, [2]). В последние годы многие исследователи стали обращать большое внимание на q-анализ в связи его важным приложением в аналитической теории чисел, в комбинаторике, в квантовой группе и алгебре, в квантовой физике и в других областях математики и естествознания (см., например, [1]–[6]).

В настоящее время получены q-аналоги различных неравенств, имеющие важные значения в обычном или классическом анализе (см., например, [7]–[11]).

В классическом анализе очень важное место занимает интегральное и дискретное неравенства Харди. В последние полвека интенсивно исследовались весовое обобщеное неравенство Харди и так называемые неравенства типа Харди и их приложения в различных областях анализа. По результатам этих исследований написаны многочисленные статьи и изданы монографии (см., например, [12] и ссылки из этой монографии).

Наряду с интегральными весовыми неравенствами типа Харди интенсивно изучались дискретные весовые неравенства типа Харди, которые относятся к h-анализу, когда $h=1$.

Целью настоящей работы является установление q-аналога весового неравенства Харди вида

$$\left(\int_0^\infty\left(u(x)\int_0^x \upsilon(t)f(t)dt\right)^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \le C\left(\int_0^\infty f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}},\ \ f\ge 0, \qquad (1)$$

где $0<r,q\le\infty$; u и υ — весовые, т.е. неотрицательные, измеримые на $(0,\infty)$ функции.

Репозиторий КарГУ

Дискретный аналог неравенства (1)

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(u_n\sum_{k=0}^{n}\upsilon_k f_k\right)^r\right)^{\frac{1}{r}} \le C\left(\sum_{n=0}^{\infty}f_n^p\right)^{\frac{1}{p}},\ f_n\ge 0, \tag{2}$$

где $\{u_n\}$ и $\{\upsilon_n\}$ — весовые последовательности, т.е. неотрицательные числовые последовательности, которые с точки зрения квантового анализа являются h-аналогом $(h=1)$ неравенства (1).

В настоящее время, благодаря работам G.Bennett [13] и S.Sh. Braverman, V.D.Stepanov [14], получены критерии выполнения неравенства (2) при всех значениях параметров $0<r,p\le\infty$ и сводки этих результатов приведены в книге ([12], теорема 7). Ниже мы приводим сводку результатов для неравенства вида

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(u_n\sum_{k=-\infty}^{n}\upsilon_k f_k\right)^r\right)^{\frac{1}{r}} \le C\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n^p\right)^{\frac{1}{p}},\ f_n\ge 0. \tag{3}$$

Теорема А.

(i). Если $1<p\le q<\infty$, *тогда неравенство (3) выполнено тогда и только тогда, когда*

$$A_1=\sup_{n\in Z}\left(\sum_{k=n}^{\infty}u_k^r\right)^{\frac{1}{r}}\left(\sum_{i=-\infty}^{n}\upsilon_i^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty \tag{4}$$

или

$$A_2=\sup_{n\in Z}\left(\sum_{i=-\infty}^{n}\upsilon_i^{p'}\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=-\infty}^{n}u_k^r\left(\sum_{i=-\infty}^{k}\upsilon_i^{p'}\right)^r\right)^{\frac{1}{r}}<\infty \tag{5}$$

или

$$A_3=\sup_{n\in Z}\left(\sum_{k=n}^{\infty}u_k^r\right)^{-\frac{1}{r'}}\left(\sum_{i=n}^{\infty}\upsilon_i^{p'}\left(\sum_{k=i}^{\infty}u_k^r\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty, \tag{6}$$

где $\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1$ и $\frac{1}{r'}+\frac{1}{r}=1$.

(ii). Если $0<p\le 1$, $p\le q<\infty$, *тогда неравенство (3) выполнено тогда и только тогда, когда*

$$A_4=\sup_{n\in Z}\left(\sum_{k=n}^{\infty}u_k^r\right)^{\frac{1}{r}}\upsilon_n<\infty. \tag{7}$$

(iii). Если $1<p<\infty$, $0<r<p$, *тогда неравенство (3) выполнено тогда и только тогда, когда*

$$A_5=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\left(\sum_{i=-\infty}^{n}\upsilon_i^{p'}\right)^{\frac{r(p-1)}{p-r}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}u_k^r\right)^{\frac{r}{p-r}}u_n^r\right)<\infty. \tag{8}$$

(iv). Если $0<r<p=1$, *тогда неравенство (3) выполнено тогда и только тогда, когда*

$$A_6=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\max_{i\le n}\upsilon_i^{\frac{r}{r-1}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}u_k^r\right)^{\frac{r}{1-r}}u_n^r\right)<\infty. \tag{9}$$

(v). Если $0<r<1<p<\infty$, *тогда неравенство (3) выполнено тогда и только тогда, когда*

$$A_7=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}u_k^r\right)^{\frac{p}{p-r}}\left(\sum_{i=-\infty}^{n}\upsilon_i^{p'}\right)^{\frac{p(r-1)}{p-r}}\upsilon_i^{p'}\right)^{\frac{p-r}{pr}}<\infty, \tag{10}$$

где Z — множество целых чисел.

Репозиторий КарГУ

Как показано в [6], для наилучшей постоянной $C>0$ в (3) имеют место оценка

$$\max\left(r^{-\frac{1}{r}}A_2,(p')^{-\frac{1}{p'}}A_3\right)\le A_1\le C\le\min\left(p'A_2,qA_3\right)\le\min\left(p'r^{\frac{1}{r}},r(p')^{\frac{1}{p'}}\right)A_1 \tag{11}$$

и оценка Бравермен-Степанова

$$\left(\frac{r}{p'}\right)^{\frac{1}{r}}A_7\le C\le A_7. \tag{12}$$

Замечание 1. Отметим, что множество значений параметров p,r в (v) является подмножеством множества значений этих параметров в (iii), однако в (iii) нет оценки наилучшей постоянной $C>0$ в (3) через A_5, как в случае A_7. Утверждение (v) доказано Бравермен-Степановым, а остальные утверждения теоремы А принадлежат Г.Беннетту.

2 Необходимые определения, понятия, обозначения и формулы из теории q-анализа

В этом разделе приведены определения, понятия из [1].

Пусть функция f определена на $(0,b)$, $0<b\le\infty$ и $0<q<1$. Следующее выражение:

$$D_q f(x)=\frac{f(x)-f(qx)}{(1-q)x},\ x\in(0,b) \tag{13}$$

называется q-производной функций f. Это определение в 1908 году ввел Джексон [15].

Соотношение

$$\int_0^x f(t)d_qt=(1-q)x\sum_{k=0}^{\infty}q^k f(xq^k),\ x\in(0,b) \tag{14}$$

называется q-интегралом, или интегралом Джексона.

В случае $b=\infty$ несобственный q-интеграл определяется выражением

$$\int_0^\infty f(t)d_qt=(1-q)\sum_{k=-\infty}^{\infty}q^k f(q^k). \tag{15}$$

Интегралы (14) и (15) имеют смысл, если ряды, стоящие в правых частях, сходятся.

При $0<a<b\le\infty$ имеем

$$\int_a^b f(t)d_qt=\int_0^b f(t)d_qt-\int_0^a f(t)d_qt.$$

В частности, для $x\in(0,\infty)$

$$\int_{xq}^\infty f(t)d_qt=\int_0^\infty f(t)d_qt-\int_0^{xq} f(t)d_qt. \tag{16}$$

Если $x=q^k$, $k\in Z$, то из (16) имеем

$$\int_{q^{k+1}}^\infty f(t)d_qt=\int_0^\infty f(t)d_qt-\int_0^{q^{k+1}} f(t)d_qt=(1-q)\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^j f(q^j)-$$

$$-(1-q)\sum_{i=0}^{\infty}q^{i+k+1}f(q^{i+k+1})=(1-q)\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^j f(q^j)-(1-q)\sum_{i=k+1}^{\infty}q^i f(q^i)==(1-q)\sum_{j=-\infty}^{k}q^j f(q^j). \tag{17}$$

Пусть $\Omega\subset(0,\infty)$ и $X_\Omega(t)$ — характеристическая функция множества Ω. Пусть $z>0$. Из определения (15) несобственного q-интеграла получим

$$\int_0^\infty X_{(0,z]}(t)f(t)d_qt=(1-q)\sum_{i=-\infty}^{\infty}q^iX_{(0,z]}(q^i)f(q^i)=(1-q)\sum_{q^i\le z}q^i f(q^i); \tag{18}$$

$$\int_0^\infty X_{[z,\infty)}(t)f(t)d_qt=(1-q)\sum_{q^i\ge z}q^i f(q^i); \tag{19}$$

Репозиторий КарГУ

$$\int_0^\infty X_{(qz,z]}(t)f(t)d_qt=(1-q)q^kf(q^k), \tag{20}$$

где $k\in Z$ такой, что $q^k\le z<q^{k-1}$.

$$\int_0^\infty X_{[z,q^{-1}z)}(t)f(t)d_qt=(1-q)q^mf(q^m), \tag{21}$$

где $m\in Z$ такой, что $q^{m+1}<z\le q^m$.

3 q-аналог весового неравенства Харди

Пусть $0<r,p\le\infty$, q-аналог неравенства Харди (1) имеет вид:

$$\left(\int_0^\infty\left(u(x)\int_0^x v(t)f(t)d_qt\right)^r d_qx\right)^{\frac{1}{r}}\le C\left(\int_0^\infty f^p(x)d_qx\right)^{\frac{1}{p}},\quad f\ge0. \tag{22}$$

Откуда в предположении $v(t)>0,\ \forall t>0,$ полагая $F(x)=\int_0^x v(t)f(t)d_qt,$ получим q-дифференциальный аналог неравенства (22):

$$\left(\int_0^\infty\left(u(x)F(x)\right)^r d_qx\right)^{\frac{1}{r}}\le C\left(\int_0^\infty\left(v^{-1}(x)D_qF(x)\right)^p d_qx\right)^{\frac{1}{p}},\quad F(0)=0.$$

Вычисления показывают, что дуальный аналог неравенства (22) можно записать в виде:

$$\left(\int_0^\infty\left(v(x)\int_{qx}^\infty u(t)g(t)d_qt\right)^{p'} d_qx\right)^{\frac{1}{p'}}\le C\left(\int_0^\infty g^{r'}(x)d_qx\right)^{\frac{1}{r'}}. \tag{23}$$

Откуда видно, что (23) нарушает некоторую симметрию, присущую классическому анализу.

Рассмотрим оператор $\int_0^\infty X_{(0,x]}(t)v(t)f(t)d_qt.$ Хотя он не совпадает с оператором $\int_0^x v(t)f(t)d_qt$ (они совпадают в точках $x=q^k,\ k\in Z),$ имеет место равенство

$$\int_0^\infty\left(u(x)\int_0^x v(t)f(t)d_qt\right)^r d_qx=\int_0^\infty\left(u(x)\int_0^\infty X_{(0,x]}(t)v(t)f(t)d_qt\right)^r d_qx.$$

Поэтому вместо (22) рассмотрим неравенство

$$\left(\int_0^\infty\left(u(x)\int_0^\infty X_{(0,x]}(t)v(t)f(t)d_qt\right)^r d_qx\right)^{\frac{1}{r}}\le C\left(\int_0^\infty f^p(x)d_qx\right)^{\frac{1}{p}},\quad f\ge0, \tag{24}$$

которое будем называть q-интегральным аналогом весового неравенства Харди. Дуальным неравенством неравенству (24) будет неравенство

$$\left(\int_0^\infty\left(v(t)\int_0^\infty X_{[x,\infty)}(x)u(x)g(x)d_qx\right)^{p'} d_qt\right)^{\frac{1}{p'}}\le C\left(\int_0^\infty g^{r'}(t)d_qt\right)^{\frac{1}{r'}},\quad g\ge0,$$

которое эквивалентно неравенству (23).

Далее рассмотрим неравенство (24) и неравенство

$$\left(\int_0^\infty\left(u(x)\int_0^\infty X_{[x,\infty)}(t)v(t)f(t)d_qt\right)^r d_qx\right)^{\frac{1}{r}}\le C\left(\int_0^\infty f^p(x)d_qx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{25}$$

на классе функций $f,$ определенных и неотрицательных на $(0,\infty),$ для которых конечна правая часть (24) и (25), где u и v — определенные на I неотрицательные функции.

Репозиторий КарГУ

Основные результаты

Теорема 3.1 *(i). Если* $1 < p \le r < \infty,$ *тогда неравенство (24) выполнено тогда и только тогда, когда*

$$B_1 = \sup_{z>0} \left(\int_0^\infty X_{[z,\infty)}(x) u^r(x) d_q x \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^\infty X_{(0,z]}(t) v^{-p'}(t) d_q t \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

или

$$B_2 = \sup_{z>0} \left(\int_0^\infty X_{(0,z]}(t) v^{p'}(t) d_q t \right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty X_{(0,z]}(x) u^r(x) \left(\int_0^\infty X_{(0,z]}(t) v^{p'}(t) d_q t \right)^r d_q x \right)^{\frac{1}{r}} < \infty$$

или

$$B_3 = \sup_{z>0} \left(\int_0^\infty X_{[z,\infty)}(x) u^r(x) d_q x \right)^{-\frac{1}{r'}} \left(\int_0^\infty X_{[z,\infty)}(t) v^{p'}(t) \left(\int_0^\infty X_{[z,\infty)}(x) u^r(x) d_q x \right)^{p'} d_q t \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

(ii). Если $0 < p \le 1,$ $p \le r < \infty,$ *тогда неравенство (24) выполнено тогда и только тогда, когда*

$$B_4 = \sup_{z>0} \left(\int_0^\infty X_{[z,\infty)}(x) u^r(x) d_q x \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^\infty X_{(qz,z]}(t) v^{p'}(t) d_q t \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

(iii). Если $1 < p < \infty,$ $0 < r < p,$ *тогда неравенство (24) выполнено тогда и только тогда, когда*

$$B_5 = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty X_{(0,z]}(t) v^{p'}(t) d_q t \right)^{\frac{r(p-1)}{p-r}} \left(\int_0^\infty X_{[z,\infty)}(x) u^r(x) d_q x \right)^{\frac{r}{p-r}} u^r(z) d_q z < \infty.$$

(iv). Если $0 < r < p = 1,$ *тогда неравенство (24) выполнено тогда и только тогда, когда*

$$B_6 = \int_0^\infty \sup_{y<z} \left(\int_0^\infty X_{(qy,y]}(t) \frac{v(t)}{(1-q)t} d_q t \right)^{\frac{r}{1-r}} \left(\int_0^\infty X_{[z,\infty)}(x) u^r(x) d_q x \right)^{\frac{r}{1-r}} u^r(z) d_q z < \infty.$$

(v). Если $0 < r < 1 < p < \infty,$ *тогда неравенство (24) выполнено тогда и только тогда, когда*

$$B_7 = \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty X_{[z,\infty)}(x) u^r(x) d_q x \right)^{\frac{p}{p-r}} \left(\int_0^\infty X_{(0,z]}(t) v^{p'}(t) d_q t \right)^{\frac{p(r-1)}{p-r}} v^{p'}(z) d_q z \right)^{\frac{p-r}{pr}} < \infty.$$

Теорема 3.2 *(i). Если* $1 < p \le r < \infty,$ *тогда неравенство (25) выполнено тогда и только тогда, когда*

$$B_1^* = \sup_{z>0} \left(\int_0^\infty X_{(0,z]}(x) u^r(x) d_q x \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^\infty X_{[z,\infty)}(t) v^{p'}(t) d_q t \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

или

$$B_2^* = \sup_{z>0} \left(\int_0^\infty X_{[z,\infty)}(t) v^{p'}(t) d_q t \right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty X_{[z,\infty)}(x) u^r(x) \left(\int_0^\infty X_{[z,\infty)}(t) v^{p'}(t) d_q t \right)^r d_q x \right)^{\frac{1}{r}} < \infty$$

или

$$B_3^* = \sup_{z>0} \left(\int_0^\infty X_{(0,z]}(x) u^r(x) d_q x \right)^{-\frac{1}{r'}} \left(\int_0^\infty X_{(0,z]}(t) v^{p'}(t) \left(\int_0^\infty X_{(0,z]}(x) u^r(x) d_q x \right)^{p'} d_q t \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

(ii). Если $0 < p \le 1,$ $p \le r < \infty,$ *тогда неравенство (25) выполнено тогда и только тогда, когда*

$$B_4^* = \sup_{z>0} \left(\int_0^\infty X_{(0,z]}(x) u^r(x) d_q x \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^\infty X_{[z,q^{-1}z)}(t) v^{p'}(t) d_q t \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Репозиторий КарГУ

(iii). Если $1<p<\infty,\ 0<r<p,$ *тогда неравенство (25) выполнено тогда и только тогда, когда*

$$B_5^*=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty X_{(0,z]}(x)u^r(x)d_qx\right)^{\frac{r}{p-r}}\left(\int_0^\infty X_{[z,\infty)}(t)v^{p'}(t)d_qt\right)^{\frac{r(p-1)}{p-r}}u^r(z)d_qz<\infty.$$

(iv). Если $0<r<p=1,$ *тогда неравенство (25) выполнено тогда и только тогда, когда*

$$B_6^*=\int_0^\infty\sup_{y\ge z}\left(\int_0^\infty X_{[y,q^{-1}y)}(t)\frac{v(t)}{(1-q)t}d_qt\right)^{\frac{r}{1-r}}\left(\int_0^\infty X_{(0,z]}(x)u^r(x)d_qx\right)^{\frac{r}{1-r}}u^r(z)d_qz<\infty.$$

(v). Если $0<r<1<p<\infty,$ *тогда неравенство (25) выполнено тогда и только тогда, когда*

$$B_7^*=\left(\int_0^\infty\left(\int_0^\infty X_{(0,z]}(x)u^r(x)d_qx\right)^{\frac{p}{p-r}}\left(\int_0^\infty X_{[z,\infty)}(t)v^{p'}(t)d_qt\right)^{\frac{p(r-1)}{p-r}}v^{p'}(z)d_qz\right)^{\frac{p-r}{pr}}<\infty.$$

Сначала мы докажем теорему 3.2. Но прежде чем перейти к доказательству теоремы 3.2 нужно установить несколько утверждений, необходимых для доказательства теоремы 3.2.

Лемма 3.3. *Пусть* $\alpha,\beta\in R,$ *причем по крайней мере одно из чисел* α,β *— положительное. Пусть* f *и* g *— неотрицательные функции и*

$$I(z)=\left(\int_0^\infty X_{(0,z]}(t)f(t)d_qt\right)^\alpha\left(\int_0^\infty X_{[z,\infty)}(x)g(x)d_qx\right)^\beta.$$

Тогда

$$\sup_{z>0}I(z)=(1-q)^{\alpha+\beta}\sup_{k\in\mathrm{Z}}\left(\sum_{j=k}^\infty q^jf(q^j)\right)^\alpha\left(\sum_{i=-\infty}^k q^ig(q^i)\right)^\beta. \qquad (26)$$

Доказательство леммы 3.3. В силу (18) и (20) имеем

$$I(z)=(1-q)^{\alpha+\beta}\left(\sum_{q^j\le z}q^jf(q^j)\right)^\alpha\left(\sum_{q^i\ge z}q^ig(q^i)\right)^\beta.$$

Откуда, если $z=q^k,\ k\in Z,$ то

$$I(z)=(1-q)^{\alpha+\beta}\left(\sum_{j=k}^\infty q^jf(q^j)\right)^\alpha\left(\sum_{i=-\infty}^k q^ig(q^i)\right)^\beta. \qquad (27)$$

При $q^k<z<q^{k-1},\ k\in Z,$ имеем

$$I(z)=(1-q)^{\alpha+\beta}\left(\sum_{j=k}^\infty q^jf(q^j)\right)^\alpha\left(\sum_{i=-\infty}^{k-1} q^ig(q^i)\right)^\beta.$$

Поэтому в случае $\beta>0$ для любого $k\in Z$ получим

$$\sup_{q^k\le z<q^{k-1}}I(z)=(1-q)^{\alpha+\beta}\left(\sum_{j=k}^\infty q^jf(q^j)\right)^\alpha\left(\sum_{i=-\infty}^k q^ig(q^i)\right)^\beta.$$

Тогда

$$\sup_{z>0}I(z)=\sup_{k\in\mathrm{Z}}\sup_{q^k\le z<q^{k-1}}I(z)=(1-q)^{\alpha+\beta}\sup_{k\in\mathrm{Z}}\left(\sum_{j=k}^\infty q^jf(q^j)\right)^\alpha\left(\sum_{i=-\infty}^k q^ig(q^i)\right)^\beta,$$

т.е. в случае $\beta>0$ соотношение (26) справедливо.

Пусть теперь $\alpha>0.$ При $q^{k+1}<z<q^k,\ k\in Z,$ имеем

$$I(z)=(1-q)^{\alpha+\beta}\sup_{k\in\mathrm{Z}}\left(\sum_{j=k+1}^\infty q^jf(q^j)\right)^\alpha\left(\sum_{i=-\infty}^k q^ig(q^i)\right)^\beta,$$

Откуда и из (27) следует

$$\sup_{q^{k+1}<z\le q^k}I(z)=(1-q)^{\alpha+\beta}\left(\sum_{j=k}^\infty q^jf(q^j)\right)^\alpha\left(\sum_{i=-\infty}^k q^ig(q^i)\right)^\beta,$$

Репозиторий КарГУ

следовательно,

$$\sup_{z>0} I(z) = \sup_{k\in Z} \sup_{q^{k+1}<z\le q^k} I(z) = (1-q)^{\alpha+\beta} \sup_{k\in Z} \left(\sum_{j=k}^{\infty} q^j f(q^j) \right)^{\alpha} \left(\sum_{i=-\infty}^{k} q^i g(q^i) \right)^{\beta},$$

т.е. (26) выполняется и в случае $\alpha > 0$.

Лемма 3.3 доказана.

Лемма 3.4. Пусть $\alpha, \beta \in R$, $\alpha > 0$, и

$$I^+(z) = \left(\int_0^{\infty} X_{(0,z]}(x) f(x) d_q x \right)^{\alpha} \left(\int_0^{\infty} X_{[z,q^{-1}z)}(t) g(t) d_q t \right)^{\beta}.$$

$$I^-(z) = \left(\int_0^{\infty} X_{[z,\infty)}(x) f(x) d_q x \right)^{\alpha} \left(\int_0^{\infty} X_{(qz,z]}(t) g(t) d_q t \right)^{\beta}.$$

Тогда

$$\sup_{z>0} I^+(z) = (1-q)^{\alpha+\beta} \sup_{k\in Z} \left(\sum_{i=k}^{\infty} q^i f(q^i) \right)^{\alpha} \left(q^k g(q^k) \right)^{\beta}. \tag{28}$$

$$\sup_{z>0} I^-(z) = (1-q)^{\alpha+\beta} \sup_{k\in Z} \left(\sum_{i=-\infty}^{k} q^i f(q^i) \right)^{\alpha} \left(q^k g(q^k) \right)^{\beta}. \tag{29}$$

Доказательство леммы 3.4. Пусть $z = q^k$, $k \in Z$. Тогда из (18), (21) и из (19), (20), соответственно, имеем

$$I^+(q^k) = (1-q)^{\alpha+\beta} \left(\sum_{i=k}^{\infty} q^i f(q^i) \right)^{\alpha} \left(q^k g(q^k) \right)^{\beta}. \tag{30}$$

$$I^-(q^k) = (1-q)^{\alpha+\beta} \left(\sum_{i=-\infty}^{k} q^i f(q^i) \right)^{\alpha} \left(q^k g(q^k) \right)^{\beta}. \tag{31}$$

Если $q^{k+1} < z < q^k$, $k \in Z$, то из (18) и (21) следует, что

$$I^+(z) = (1-q)^{\alpha+\beta} \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} q^i f(q^i) \right)^{\alpha} \left(q^k g(q^k) \right)^{\beta}.$$

Откуда и из (30) имеем

$$\sup_{q^{k+1}<z\le q^k} I^+(z) = (1-q)^{\alpha+\beta} \left(\sum_{i=k}^{\infty} q^i f(q^i) \right)^{\alpha} \left(q^k g(q^k) \right)^{\beta}.$$

Тогда из равенства $\sup_{z>0} I^+(z) = \sup_{k\in Z} \sup_{q^{k+1}<z\le q^k} I^+(z)$ следует (28).

Если $q^k < z < q^{k-1}$, $k \in Z$, то из (19) и (20) получим

$$I^-(z) = (1-q)^{\alpha+\beta} \left(\sum_{i=-\infty}^{k-1} q^i f(q^i) \right)^{\alpha} \left(q^k g(q^k) \right)^{\beta},$$

которое вместе с (31) дает

$$\sup_{q^k \le z < q^{k-1}} I^-(z) = (1-q)^{\alpha+\beta} \left(\sum_{i=-\infty}^{k} q^i f(q^i) \right)^{\alpha} \left(q^k g(q^k) \right)^{\beta}.$$

Теперь справедливость (29) вытекает из равенства

$$\sup_{z>0} I^-(z) = \sup_{k\in Z} \sup_{q^k \le z < q^{k-1}} I^-(z).$$

Лемма 3.4 доказана.

Лемма 3.5. *Имеет место равенство*

$$D \equiv \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} X_{[z,\infty)}(t) f(t) d_q t \right)^{\alpha} \left(\int_0^{\infty} X_{(0,z]}(x) g(x) d_q x \right)^{\beta} \varphi(z) d_q z =$$

Репозиторий КарГУ

$$= (1-q)^{\alpha+\beta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\left(\sum_{i=-\infty}^{k} q^i f(q^i) \right)^{\alpha} \left(\sum_{j=k}^{\infty} q^j g(q^j) \right)^{\beta} q^k \varphi(q^k) \right].$$

Действительно, на основании (15), (18) и (19) имеем

$$D = (1-q) \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^k \left(\int_0^{\infty} X_{[q^k,\infty)}(t) f(t) d_q t \right)^{\alpha} \left(\int_0^{\infty} X_{(0,q^k]}(x) g(x) d_q x \right)^{\beta} \varphi(q^k) =$$

$$= (1-q)^{\alpha+\beta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^k \left(\sum_{i=-\infty}^{k} q^i f(q^i) \right)^{\alpha} \left(\sum_{j=k}^{\infty} q^j g(q^j) \right)^{\beta} \varphi(q^k).$$

Лемма 3.6. *Пусть* $k \in Z$, $\alpha \in R$ и

$$F(y) = \left(\int_0^{\infty} X_{[y,q^{-1}y)}(t) f(t) d_q t \right)^{\alpha}.$$

Тогда

$$\sup_{y \ge q^k} F(y) = (1-q)^{\alpha} \sup_{i \le k} \left(q^i f(q^i) \right)^{\alpha}. \tag{32}$$

Доказательство леммы 3.6. Если $y = q^k$, тогда в силу (21)

$$F(q^k) = \left(\int_0^{\infty} X_{[q^k,q^{k-1})}(t) f(t) d_q t \right)^{\alpha} = (1-q)^{\alpha} \left(q^k f(q^k) \right)^{\alpha}. \tag{33}$$

Пусть $i \le k$ и $q^i < y \le q^{i-1}$, тогда на основании (21)

$$F(y) = (1-q)^{\alpha} \left(q^{i-1} f(q^{i-1}) \right)^{\alpha}, \ i \le k. \tag{34}$$

Из (33) и (34) следует (32).

Лемма 3.6 доказана.

Доказательство теоремы 3.2. Используя определение несобственных q-интегралов (15) и соотношение (19), имеем

$$\left(\int_0^{\infty} f^p(x) d_q x \right)^{\frac{1}{p}} = (1-q)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j f^p(q^j) \right)^{\frac{1}{p}}; \tag{35}$$

$$\left(\int_0^{\infty} \left(u(x) \int_0^{\infty} X_{[x,\infty)}(t) v(t) f(t) d_q t \right)^r d_q x \right)^{\frac{1}{r}} =$$

$$= (1-q)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j u^r(q^j) \left(\int_0^{\infty} X_{[q^j,\infty)}(t) v(t) f(t) d_q t \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} =$$

$$= (1-q)^{1+\frac{1}{r}} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j u^r(q^j) \left(\sum_{q^i \ge q^j} q^i v(q^i) f(q^i) \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} =$$

$$= (1-q)^{1+\frac{1}{r}} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j u^r(q^j) \left(\sum_{i=-\infty}^{j} q^i v(q^i) f(q^i) \right)^r \right)^{\frac{1}{r}}. \tag{36}$$

Из (25), (35) и (36) вытекает

$$(1-q)^{\frac{1}{p'}+\frac{1}{r}} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j \left(u(q^j) \sum_{i=-\infty}^{j} q^i v(q^i) f(q^i) \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} \le C \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j f^p(q^j) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Откуда, полагая $q^j f^p(q^j) = a_j^p$, $v_j = q^{\frac{j}{p'}} v(q^j)(1-q)^{\frac{1}{p'}}$, $u_j = (1-q)^{\frac{1}{r}} q^{\frac{j}{r}} u(q^j)$, $j \in Z$, получим, что неравенство (25) эквивалентно неравенству

Репозиторий КарГУ

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(u_j\sum_{i=-\infty}^{j}v_i a_i\right)^r\right)^{\frac{1}{r}} \le C\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (37)$$

причем наилучшие постоянные в них совпадают.

Следовательно, на основании теоремы А неравенство (37), а следовательно, неравенство (25) выполнены тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий (4), (5), (6) при $1 < p \le r < \infty$ и одно из условий (7), (8), (9) и (10), соответственно, при $0 < p < 1$, $p \le q$; $1 < p < \infty$; $0 < r < p$; $0 < r < p = 1$ и $0 < r < 1 < p < \infty$.

Из условия (4) на основании леммы 3.3 имеем

$$\infty > A_1 = \sup_{n\in Z}\left(\sum_{k=n}^{\infty}u_k^r\right)^{\frac{1}{r}}\left(\sum_{i=-\infty}^{n}v_i^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= (1-q)^{\frac{1}{r}+\frac{1}{p'}}\sup_{n\in Z}\left(\sum_{k=n}^{\infty}q^k u^r(q^k)\right)^{\frac{1}{r}}\left(\sum_{i=-\infty}^{n}q^i v^p(q^i)\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \sup_{z>0}\left(\int_0^{\infty}X_{(0,z]}(x)u^r(x)d_q x\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_0^{\infty}X_{[z,\infty]}(t)v^{p'}(t)d_q t\right)^{\frac{1}{p'}} = B_1^*.$$

Аналогичным образом на основании леммы 3.3 устанавливается, что выполнение условий (5) и (6) равносильно выполнению $B_2^* < \infty$ и $B_3^* < \infty$. Таким образом, утверждение (i) теоремы 3.2 доказано.

Теперь покажем, что условия (7), (8), (9) и (10) эквивалентны выполнению $B_4^* < \infty$, $B_5^* < \infty$, $B_6^* < \infty$ и $B_7^* < \infty$.

Используя утверждение леммы 3.4 из (7), имеем

$$\infty > A_4 = \sup_{n\in Z}\left(\sum_{k=n}^{\infty}u_k^r\right)^{\frac{1}{r}} v_n = (1-q)^{\frac{1}{r}+\frac{1}{p'}}\sup_{n\in Z}\left(\sum_{k=n}^{\infty}q^k u^r(q^k)\right)^{\frac{1}{r}}\left(q^n v^{p'}(q^n)\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \sup_{z>0}\left(\int_0^{\infty}X_{(0,z]}(x)u^r(x)d_q x\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_0^{\infty}X_{[z,q^{-1}z)}(t)v^{p'}(t)d_q t\right)^{\frac{1}{p'}} = B_4^*.$$

Установим эквивалентность условий (8) и $B_5^* < \infty$.

В силу леммы 3.5 получим

$$\infty > A_5 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i=-\infty}^{n}v_i^{p'}\right)^{\frac{r(p-1)}{p-r}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}u_k^r\right)^{\frac{r}{p-r}}u_n^r =$$

$$= (1-q)^{\frac{rp}{p-r}+1}\int_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i=-\infty}^{n}q^i v^{p'}(q^i)\right)^{\frac{r(p-1)}{p-r}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}q^k u^r(q^k)\right)^{\frac{r}{p-r}}q^n u^r(q^n) =$$

$$= \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}X_{[z,\infty)}(t)v^{p'}(t)d_q t\right)^{\frac{r(p-1)}{p-r}}\left(\int_0^{\infty}X_{(0,z]}(x)u^r(x)d_q x\right)^{\frac{r}{p-r}}u^r(z)d_q z = B_5^*.$$

Аналогичным образом на основании леммы 3.5 устанавливается эквивалентность условий (10) и $B_7^* < \infty$.

Наконец, установим эквивалентность условий (9) и $B_6^* < \infty$. Используя лемму 3.6 и с учетом $p' = \infty$ при $p = 1$, имеем

$$\max_{i\le n} v_i^{\frac{r}{r-1}} = (\max_{i\le n} v(q^i))^{\frac{r}{r-1}} =$$

Репозиторий КарГУ

$$=\left((1-q)\max_{i\le n}\frac{q^i v(q^i)}{(1-q)q^i}\right)^{\frac{r}{r-1}}=\left(\sup_{y\ge q^n}\int_0^\infty X_{[y,q^{-1}y)}(t)\frac{v(t)}{(1-q)t}d_qt\right)^{\frac{r}{r-1}}=$$

$$=\sup_{y\ge q^n}\left(\int_0^\infty X_{[y,q^{-1}y)}(t)\frac{v(t)}{(1-q)t}d_qt\right)^{\frac{r}{r-1}}.$$

Тогда

$$\infty>A_6=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\max_{i\le n}v_i^{\frac{r}{r-1}}\left(\sum_{k=n}^{\infty}u_k^r\right)^{\frac{r}{1-r}}u_n^r=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^n\max_{i\le n}v_i^{\frac{r}{r-1}}\left((1-q)\sum_{k=n}^{\infty}q^k u_k^r(q^k)\right)^{\frac{r}{1-r}}u^r(q^n)=$$

$$=(1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^n\sup_{y\ge q^n}\left(\int_0^\infty X_{[y,q^{-1}y)}(t)\frac{v(t)}{(1-q)t}d_qt\right)^{\frac{r}{r-1}}\left(\int_0^\infty X_{(0,q^n]}(x)u^r(x)d_qx\right)^{\frac{r}{1-r}}u^r(q^n)=$$

$$=\int_0^\infty\sup_{y\ge z}\left(\int_0^\infty X_{[y,q^{-1}y)}(t)\frac{v(t)}{(1-q)t}d_qt\right)^{\frac{r}{r-1}}\left(\int_0^\infty X_{(0,z]}(x)u^r(x)d_qx\right)^{\frac{r}{1-r}}u^r(z)d_qz=B_6^*.$$

Таким образом, доказана справедливость утверждений (ii)–(v). Теорема 3.2 доказана.

Из доказательства теоремы 3.2 вытекает, что для наилучшей постоянной $C>0$ в (25) соответственно (11) и (12) имеют место оценки

$$\max\left(r^{-\frac{1}{r}}B_2^*,(p')^{-\frac{1}{p'}}B_3^*\right)\le B_1^*\le C\le\min\left(p'B_2^*,qB_3^*\right)\le\min\left(p'r^{\frac{1}{r}},r(p')^{\frac{1}{p'}}B_1^*\right);$$

$$\left(\frac{r}{p'}\right)^{\frac{1}{r}}B_7^*\le C\le B_7^*.$$

Доказательство теоремы 3.1. Как и в доказательстве теоремы 3.2, здесь мы получим, что неравенство (24) эквивалентно неравенству

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(u_j\sum_{i=j}^{\infty}v_ia_i\right)^r\right)^{\frac{1}{r}}\le C\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j^p\right)^{\frac{1}{p}}.\tag{38}$$

Как показано в [12], для неравенства (38) имеются утверждения, аналогичные утверждениям теоремы А. Но мы поступим следующим образом. Полагая $\tilde u_i=u_{-i}$, $\tilde v_i=v_{-i}$, $\tilde a_i=a_{-i}$, $i\in Z$, из (38) имеем

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\tilde u_j\sum_{i=-\infty}^{j}\tilde v_i\tilde a_i\right)^r\right)^{\frac{1}{r}}\le C\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\tilde a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.\tag{39}$$

Теперь, применяя теорему А к неравенству (39), вместо выражения $A_i, 1\le i\le 7$, получим соответствующие выражения $\tilde A_i, 1\le i\le 7$, зависящие от $\tilde u_j,\tilde v_j$, $j\in Z$. Теперь в выражениях $\tilde A_i$, $1\le i\le 7$, переходя от $\tilde u_j,\tilde v_j$ к u_j, v_j, $j\in Z$, получим критерий выполнения неравенства (38) при значениях параметров r и p, указанных в теореме А. Далее, на основании эквивалентности неравенств (24) и (38) и, используя леммы 1–4, как в теореме 3.2, убеждаемся в справедливости утверждения теоремы 3.1.

Замечание 2. *Если в теоремах 1 и 2 полагаем* $v(t)=0$, $u(t)=0$ *при* $t<0$ *и в выражениях* B_i, B_i^*, $1\le i\le 7$ *интегралы заменить на интегралы от нуля до единицы, а множества* $[z,\infty), [z,q^{-1}z)$ *соответственно — на множества* $[z,1], [z,\min\{q^{-1}z,1\}]$, *то получим критерий выполнения соответственно неравенств*

Репозиторий КарГУ

$$\left(\int_0^1\left(u(x)\int_0^1 X_{(0,x]}(t)v(t)f(t)d_qt\right)^r d_qx\right)^{\frac{1}{r}} \le C\left(\int_0^1 f^p(t)d_qt\right)^{\frac{1}{p}};$$

$$\left(\int_0^1\left(u(x)\int_0^1 X_{[x,1]}(t)v(t)f(t)d_qt\right)^r d_qx\right)^{\frac{1}{r}} \le C\left(\int_0^1 f^p(t)d_qt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК. (Грант № 1529/ГФ по приоритетному направлению «Интеллектуальный потенциал страны»).

References

1 Kac V., Cheng P. *Quantum Calculus* // Springer-Verlag, New York, 2002, 128 p.

2 Gel'fond A.O. *Calculus of Finite Differences*, Moscow: Nauka, 1967, 342 p.

3 Ernst T.A. *A method for q-calculus* // J.Nonline. Math. Phys., 2010, vol. 10, № 4, P. 449–510.

4 Ernst T.A. *The history of q-calculus and a new method — Uppsala*, 2000, 231 p. at {citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.63.274.pdf}

5 Ernst T.A. *A Comprehensive Treatment of q-Calculus* // Birkhauser, Basel, 2012.

6 Exton H. *q-Hypergeometric Functions and Applications*, New York: Halstead Press, 1983.

7 Sulaiman W.T. *New Types of Q–Integral Inequalities* // Advances in Pure Math., 2011, № 1, p. 77–80.

8 Al-Salam W.A. *Some fractional q-integrals and q-derivatives* // Proc. Edinburgh Math. Soc., 1966, vol. 15, № 2, p. 135–140.

9 Krasniqi V. *Erratum, Several q-integral inequalities* / J.Math. Inequal, 2011, vol. 5, № 3, p. 432–451.

10 Gauchman H. *Integral inequalities in q-calculus* // Comput. Math. Appl., 2004, vol. 47, № 2, 3, p. 281–300.

11 Yu.Miao and Feng Qi. *Several q-integral inequalities* // Journal of Mathematical Inequalities, 2009, vol. 3, № 1, p. 115–121.

12 Kufner A., Maligranda L. and Persson L.-E. *The Hardy Inequality*. About its History and Some Related Results. — Pilzen: Vydavatelsky Servis Publishing House, 2007, 162 p.

13 Bennett G. *Inequalities complimentary to Hardy* // Quart. J.Math. Oxf. Ser., 1998, vol. 49, № 2, p. 395–432.

14 Braverman M.Sh. and Stepanov V.D. *On discrete Hardy inequality* // Bull. London Math. Soc., 1994, vol. 2, № 6, p. 283–287.

15 Jackson F.H. *On q-definite integrals* // Quart. J. Pure and Appl. Math., 1910, vol. 41, p. 193–203.

А.О.Байарыстанов, А.М.Темірханова, С.Шаймардан

Кванттық талдаудағы Харди салмақтық теңсіздігі

Мақалада r, p параметрлерінің барлық оң мәндері үшін салмақты (r, p) – Харди теңсіздігінің q-аналогінің орындалуының қажетті және жеткілікті шарттары анықталған. Ақпараттық технологияларға бағытталған дәстүрлі үздіксіз математикалық талдаудың аналогы болып кванттық есептеу немесе h-талдау мен q-талдау есептелді. Кванттық талдау көрнекі түрде шектерді алмай-ақ дифференциалдық есептеу ретінде сипатталды, сонымен қатар оның аналитикалық сандар теориясында, комбинаторикада, кванттық группа мен алгебрада, кванттық физикада және математиканың, жаратылыстанудың басқа да облыстарында маңызды қосымшалары бар.

A.O.Bajarystanov, A.M.Temirkhanova, S.Shaymardan

Weighted Hardy inequality in the quantum calculus

In article necessary and sufficient conditions for validity of q-analogue of (r, p) — weighted Hardy inequality are obtained under all positive values of parameters r and p. Analogue of the classical continuous mathematical analysis oriented on information technology is a quantum calculus or h-calculus and q-calculus. Quantum analysis figuratively is characterized as differential calculus without taking limits and has important applications in analytic number theory, in combinatorics, in the quantum group and the algebra, in quantum physics and other fields of mathematics and natural science.

Репозиторий КарГУ