УДК 510.67:512.57

Е.А.Палютин

*Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия (E-mail: palyutin@math. nsc.ru)*

# $P$ -Суперстабильные абелевы группы

В статье описаны все $P$-суперстабильные абелевы группы, где $P$ — произвольная подгруппа. Доказано, что любая абелева группа является $P$-суперстабильной для сервантных подгрупп $p$, что, в частности, обобщает результаты Т.А.Нурмагамбетова.

*Ключевые слова:* абелевы группы, подгруппа, $P$-стабильность, теория, формула, логика предикатов, модель, предложение.

*Посвящается памяти моего друга*
*Туленды Мустафина, талантливого*
*математика с чуткой душой.*

## *1. Введение*

Понятие $P$-стабильности является частным случаем понятий $T^*$-стабильности из [1] и $E^*$-стабильности из [2], которые, в свою очередь, являются обобщениями классического понятия стабильности, восходящего к работе М.Морли [3] и С.Шелаха [4]. Исследования по $P$-стабильности касаются также теории моделей элементарных пар, которой с 80-х годов занимались такие математики, как Б.Пуаза, Э.Бускарен, Т.Г.Мустафин, Т.А.Нурмагамбетов, А.Т.Нуртазин и другие. В данной работе изучается теория пар моделей без требования элементарности $P$-подмодели. М.А.Русалеев в работе [5] доказал, что если не налагать никаких условий на предикат $P$, то условие $P$-стабильности полной теории $T$ равносильно определимой эквивалентности теории $T$ некоторой теории, язык которой состоит только из одноместных предикатных символов, поэтому такого вида стабильности среди полных теорий абелевых групп нет. В тезисах Т.А.Нурмагамбетова [6] содержится теорема о том, что при предположении обобщенной континуум-гипотезы теория любой абелевой группы будет $P$-суперстабильной, если $P$ определяет элементарную подсистему. В разделе 3 данной работы будет доказано, что без предположения обобщенной континуум-гипотезы теория любой абелевой группы является $P$-суперстабильной, если $P$ определяет сервантную подгруппу. Это обобщает указанный выше результат Т.А.Нурмагамбетова. В разделе 4 будет дано полное описание абелевых групп, теория которых является $P$-суперстабильной, когда $P$ определяет произвольную подгруппу.

## *2. Терминология, обозначения и предварительные результаты*

В дальнейшем под группой всегда подразумевается абелева группа.

Напомним некоторые хорошо известные понятия из теории абелевых групп. Для группы $A$ и натурального числа $n$ через $A[n]$ будем обозначать подгруппу $\{a \mid a \in A, na = 0\}$. Через $nA$ обозначается подгруппа $\{n\mathrm{a} \mid a \in A\}$. Группа $A$ называется ограниченной, если для некоторого натурального числа $n$ выполнено $nA = 0$. Буквой $P$ всегда будет обозначаться некоторое простое число. $P$-группой называется группа, все элементы которой имеют порядок $p^k$ для некоторого натурального $k$. $P$-высотой группы $A$ называется верхняя граница чисел $k$ для порядков элементов группы $A$ вида $p^k$. $p$-компонентой группы $A$ называется подгруппа $A_p$, состоящая из всех элементов порядка $p^k$ для некоторого натурального числа $k$. Если $p$-высота $p$-компоненты $A_p$ группы $A$ ограничена, то она является прямым слагаемым группы $A$ и $A_p$ разлагается в прямую сумму циклических групп [7]. Таким образом, ограниченная группа является прямой суммой циклических групп порядка $p^k$ для натуральных $k$ и конечного множества простых чисел $p$. Элементарной $p$-группой называется прямая сумма циклических групп порядка $p$. Элементарной группой называется элементарная $p$-группа для некоторого $p$. Через $C_n$ обозначается циклическая группа порядка $n$.

Для группы $A$ и кардинала $\lambda$ через $A^{<\lambda}$ обозначаем прямую сумму $\lambda$ экземпляров группы $A$.

Зафиксируем в этом параграфе некоторую полную теорию $T$ языка $L$. Для удобства работы с моделями теории $T$ мы зафиксируем некоторую достаточно насыщенную модель $C$ теории $T$ и будем считать, что все рассматриваемые $T$-модели являются элементарными подмоделями модели $C$. Такая $T$-модель $C$ называется монстр-моделью теории $T$.

Конечные последовательности называются кортежами, и множество всех кортежей из элементов множества $U$ обозначается через $U^{<\omega}$. Длину кортежа $u$ обозначаем через $l(u)$. Для простоты вместо обозначений $u \in U^{<\omega}$ будем использовать обозначение $u \in U$. Кортежи элементов модели будут обозначаться жирными буквами начала латинского алфавита: ***a, b,...*** , а кортежи переменных — жирными буквами конца этого алфавита: ***...,x, y, z.***

Если $\Phi(x)$ — формула языка $L$; $A$ — структура языка $L$, то через $\Phi(A)$ обозначаем множество $\{a \mid A \models \Phi(a), a \in A\}$. Если $X$ — подмножество монстр-модели $C$, то $X$ будем называть множеством в теории $T$. Через $L(X)$ будем обозначать язык, который получается из языка $L$ добавлением элементов множества $X$ в качестве новых констант. Через $T(X)$ будем обозначать следующее множество формул языка $L(X)$:

$$\{\varphi(a) \mid a \in X, C \models \varphi(a), \varphi(x) - \text{формула языка } L\}.$$

Ясно, что $T(X)$ будет полной теорией языка $L(X)$.

В работе [2] было введено понятие $E^*$ -стабильности. Частным случаем этого понятия является понятие $P$ -стабильности. Так как в данной работе будет рассматриваться именно это понятие, то мы дадим для него отдельное определение.

**Определение**. Пусть язык $L_p$ получается из языка $L$ добавлением нового одноместного предикатного символа $P$. Пусть $\Delta$ — некоторое множество предложений языка $L_p$. Теория $T$ называется $P_\Delta$ -стабильной в мощности $\lambda$, если для любого множества $X$ в теории $T$ мощности $\leq \lambda$ множество

$$T_\Delta(X) = \left(T(X) \cup \{P(a) \mid a \in X\} \cup \Delta\right)$$

имеет не более $\lambda$ пополнений в языке $\left(L(X)\right)_P$.

**Определение**. 1. Полная теория $T$ называется $P_\Delta$ -стабильной, если она является $P_\Delta$ -стабильной в некоторой бесконечной мощности $\lambda$.

2) Полная теория $T$ называется $P_\Delta$ -суперстабильной, если для некоторого кардинала $k$ она является $P_\Delta$ -стабильной во всех мощностях $\lambda \geq k$.

Под $P$ -стабильностью ( $P$ -суперстабильностью) мы будем понимать $P_\Delta$ -стабильность ( $P$ -суперстабильность) для некоторого $\Delta$.

Рассмотрим следующие важные случаи $P$-стабильности.

**Определение**. 1) $P_\Delta$ -стабильность для $\Delta = \varnothing$ называется $(P, 1)$ -стабильностью.

2. $P_\Delta$ -стабильность для $\Delta$, состоящего из предложений, выражающих тот факт, что предикат $P$ является подгруппой, называется ( $P$  $s$ )-стабильностью.

3. $P_\Delta$ -стабильность для $\Delta$, состоящего из предложений, выражающих тот факт, что предикат $P$ является элементарной подсистемой, называется ( $P$, $e$ )-стабильностью. Заметим, что в данном случае в качестве $\Delta$ можно взять формулу $\exists x P(x)$ вместе с множеством $\left\{\forall x\left(P(x) \to \left(\exists y \Phi(y;x) \to \exists y\left(P(y) \wedge \Phi(y;x)\right)\right)\right) \mid \Phi(y;x) - x\right\}$ — формула языка $L$, где $x = \langle x_1, ..., x_n \rangle$, $P(\mathrm{x}) = \left(P(x_1) \wedge ... \wedge P(x_n)\right)$.

4. Теорию $T_\Delta(X)$ для $\Delta$ из пункта 2) будем обозначать через $T_s(X)$, а для $\Delta$ из пункта 3) — через $T_e(X)$.

Ясно, что выполнены следующие импликации:

$(P, 1)$-стабильность $\Rightarrow$ $(P\ \ s)$-стабильность) $\Rightarrow$ $(P, e)$-стабильность.

В работе М.А.Русалеева [5] доказано, что полная теория $T$ тогда и только тогда является $(P, 1)$-стабильной, когда она определимо эквивалентна некоторой теории, язык которой состоит только из одноместных предикатных символов. Ясно, что теорию любой бесконечной абелевой группы нельзя проинтерпретировать в теории одноместных предикатов. В дальнейшем будет показано, что любая полная теория абелевых групп является $(P, e)$-суперстабильной. Таким образом, из перечисленных выше трех типов $P$-стабильности для абелевых групп нетривиальной может быть только $(P\ \ s)$-стабильность. В параграфе 4 мы полностью опишем $(P\ \ s)$-суперстабильные абелевы группы.

Примитивной формулой языка $L$ называется формула вида

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \Phi,$$

где $\Phi$ — конъюнкция атомарных формул языка $L$.

Подмножество $X$ структуры $A$ называется примитивным, если $X = \Phi(A)$ для некоторой примитивной формулы $\Phi(x)$.

В дальнейшем через $L$ будем обозначать язык теории абелевых групп, состоящий из двухместного функционального символа $+$, одноместного функционального символа $-$ и символа константы $0$. Через $AG$ будем обозначать теорию всех абелевых групп, заданную обычными аксиомами абелевых групп языка $L$.

Следующая лемма доказывается точно так же, как соответствующая лемма для модулей (см., например, [8 или 9]).

**Лемма 1.** *Пусть $A$ — абелева группа, $P$ — ее подгруппа. В теории $Th(\langle A; P\rangle)$ любая формула языка $L_p$ эквивалентна булевой комбинации примитивных формул языка $L_p$.*

Следующая лемма восходит к работе В.Шмелева [10] и в данном виде содержится в [9] (лемма 8.4. 7).

**Лемма 2.** *Любая примитивная формула $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$ языка абелевых групп эквивалентна в теории $AG$ конъюнкции $\Psi(x_1,\ldots,x_n)$ формул вида $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ и $\exists y \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = p^k y$ для целых чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, простых чисел $p$ и натуральных чисел $k > 0$, которые будут называться соответственно стандартными формулами первого и второго рода. При этом простое число $p$ в стандартной формуле второго рода будем называть модулем этой формулы.*

### 3 (*P, p*)-суперстабильность

Как известно, подгруппа $P$ группы $A$ называется сервантной, или чистой (pure), если $nP = (P \cap nA)$ для любого натурального числа $n$. Это свойство равносильно тому, что $p^k P = (P \cap p^k A)$ для любого простого числа $p$ и любого натурального числа $k$.

Из леммы 2 вытекает следующее утверждение.

**Следствие 1.** Пусть $A$ — абелева группа, $P$ — ее сервантная подгруппа, $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$ — примитивная формула языка абелевых групп. Тогда для любых $a_1,\ldots,a_n \in P$ выполнено условие

$$\mathrm{A} | = \Phi(a_1,\ldots,a_n) \Leftrightarrow P | = \Phi(a_1,\ldots,a_n).$$

**Замечание 1.** Можно считать, что примитивная формула $\Phi(x)$ языка $L_p$ имеет вид

$$\exists y_1 \ldots \exists y_k \left(P(y_1) \wedge \ldots \wedge P(y_k) \wedge \Psi\right),$$

где $\Psi$ — примитивная формула языка $L$. В самом деле, если формула $\Phi$ содержит подформулу вида $P(t)$ для некоторого терма $t$, то $\Phi$ эквивалентна формуле $\exists y\left(P(y) \wedge \Phi^*\right)$, где переменная $y$ не входит в формулу $\Phi$, а формула $\Phi^*$ получается из формулы $\Phi$ заменой подформулы $P(t)$ на формулу $y = t$.

**Определение**. Теория $T$ называется $(P, p)$-суперстабильной, если она является $P_\Delta$-суперстабильной для множества $\Delta$, состоящего из предложений, выражающих сервантность подгруппы $P$. Для такого вида множества $\Delta$ теорию $T_\Delta(X)$ будем обозначать через $T_p(X)$.

**Теорема 1.** Любая полная теория $T$ абелевых групп является $(P, p)$-суперстабильной.

**Доказательство**. Пусть $\Phi(x_1,...,x_n)$ — примитивная формула языка $L_p$. По замечанию 1 можно считать, что она имеет вид

$$\exists y_1...\exists y_k \left(P(y_1)\wedge...\wedge P(y_k)\wedge\Psi\right),$$

где $\Psi(x_1,...,x_n;y_1,...,y_k)$ — примитивная формула языка $L$.

Пусть $A$ — модель теории $T,P$ — некоторая ее сервантная подгруппа. По следствию 1 для любых элементов $a_1,...,a_n,b_1,...,b_k\in P$ мы имеем свойство

$$A|=\Psi(a_1,...,a_n;b_1,...,b_k)\Leftrightarrow P|=\Psi(a_1,...,a_n;b_1,...,b_k).$$

Из этой эквивалентности получаем эквивалентность

$$\langle A,P\rangle|=\Phi(a_1,...,a_n)\Leftrightarrow P|=\exists y_1...y_k\Psi(a_1,...,a_n;y_1,...,y_k)$$

для любых элементов $a_1,...,a_n\in P.$ По следствию 1 для любых элементов $a_1,...,a_n\in P$ мы имеем свойство

$$P|=\exists y_1...\exists y_k\Psi(a_1,...,a_n;y_1,...,y_k)\Leftrightarrow A|=\exists y_1...\exists y_k\Psi(a_1,...,a_n;y_1,...,y_k).$$

Таким образом, формула $\exists y_1...\exists y_k\Psi(x_1,...,x_n;y_1,...,y_k)$ языка $L$ будет в группе $A$ определять на $P(A)$ тот же предикат, что и формула $\Phi(x_1,...,x_n)$ в структуре $\langle A;P\rangle$. В силу леммы 1 это означает, что для любого множества $X$ в теории *T*-теория $T_p(X)$ имеет единственное пополнение в языке $L_p$. Отсюда вытекает, что теория любой абелевой группы является ( $P,p$ )-стабильной.

Отметим, что в тезисах Т.А.Нурмагамбетова [6] содержатся две теоремы. Первая говорит о том, что при предположении обобщенной континуум-гипотезы теория любой абелевой группы является ( $P,e$ )-суперстабильной. Теорема 1 снимает предположение обобщенной континуум-гипотезы. Вторая теорема тезисов [6] утверждает, что при предположении суперстабильности теории $T$ число пополнений теории $T_e(X)$ может принимать одно из трех значений: 1, ω или $2^{\omega}$. Теорема 1 снимает предположение суперстабильности, а замечание в конце доказательства этой теоремы сводит возможность числа пополнений теории $T_e(X)$ до одного.

### *4 (P s)-суперстабильные абелевы группы*

**Лемма 3.** *Если группа $A$ неограничена, то теория $T=Th(A)$ не является $(P,s)$-стабильной.*

**Доказательство**. Предположим, что группа $A$ неограничена. Возьмем произвольный бесконечный кардинал $k$. Рассмотрим группу $M=Q^{<k}$, где $Q$ — аддитивная группа рациональных чисел. У групп $A$ и $A\oplus M$ совпадают шмелевские инварианты, следовательно, они элементарно эквивалентны (см. [10]) или [9], § 8.4). Поэтому можно считать, что группа $A$ имеет вид $B\oplus M$. В подгруппе $M$ возьмем множество $X$, состоящее из единиц из каждого ее прямого слагаемого $Q$ в данном разложении группы $M$. Рассмотрим произвольное разбиение множества $X$ на два множества $Y$ и $Z$. Для элемента $a\in Y$ возьмем прямое слагаемое $S_a$, изоморфное группе $Q$, из которого выбран элемент $a$. Рассмотрим множество

$$W=\bigcup\{S_a\mid a\in Y\}.$$

Возьмем подгруппу $P$ группы $A$, порожденную множеством $(W\subseteq Z)$. Ясно, что для подгруппы $P$ выполнены условия $(Z\cap 2P)=\varnothing$ и $Y\subseteq 2P$. Следовательно, формула $\Phi(x)=\exists y\left(P(y)\wedge 2y=x\right)$ истинна в структуре $\langle A,P\rangle$ на множестве $Y$ и ложна на множестве $Z$. Так как пара $\langle Y,Z\rangle$ — произвольное разбиение множества $X$, то число пополнений теории $T_s(X)$ будет не меньше $2^{|X|}$, т.е. теория $T$ не ( $P$ $s$ )-стабильна ни в какой бесконечной мощности $\kappa$.

**Лемма 4.** *Если для некоторого простого числа $p$ у группы $A$ подгруппа $(A[p]\cap pA)$ бесконечна, то теория $Th(A)$ не является ( $P$ $s$ )-стабильной.*

**Доказательство**. Предположим, что для некоторого простого числа $p$ подгруппа $(A[p]\cap pA)$ бесконечна и теория $Th(A)$ является ( $P$ $s$ )-стабильной. По лемме 3 $p$ — высота $p$ — компоненты

$A_p$ ограничена. Пусть $k^*$ — максимальное натуральное число, для которого существует подгруппа $B$ группы $A$, являющаяся прямым слагаемым группы $A$ и изоморфная группе $C^{<\omega}_{p^{k^*}}$. Так как подгруппа $\left(A\left[p\right] \cap pA\right)$ бесконечна, то $k^* > 1$. Ясно, что для любого кардинала $\kappa$ существует абелева группа, элементарно эквивалентная группе $A$ и имеющая подгруппу $C^{<\kappa}_{p^{k^*}}$ в качестве прямого слагаемого. Будем считать, что таковой является сама группа $A$ и группа $B$ является прямым слагаемым группы $A$ вида $C^{<k}_{p^{k^*}}$.

Выберем из каждого прямого слагаемого в разложении группы $B$ по одному образующему. Из этих выбранных элементов образуем множество $X$. Разобьем множество $X$ на два бесконечных множества $W$ и $V$. Пусть $Y = \left\{p^{\left(k^*-1\right)}d \mid d \in V\right\}$ и $Y^* = \left\{p^{\left(k^*-2\right)}d \mid d \in W\right\}$. Возьмем подгруппу $P$ группы $A$, порожденную множеством $\left(Y \cup Y^*\right)$. Ясно, что для подгруппы $P$ выполнено условие $\left(Y \cap pP\right) = \emptyset$. Следовательно, формула $\Phi(x) = \exists y\left(P\left(y\right) \wedge py = x\right)$ истинна в структуре $\left\langle A, P\right\rangle$ на множестве $pY^*$ и ложна на множестве $Y$. Тогда формула $\Phi\left(p^{\left(k^*-1\right)}x\right)$ будет истинна на множестве $V$ и ложна на множестве $W$. Так как пара $\left\langle V,W\right\rangle$ — произвольное разбиение множества $X$, то число пополнений теории $T_s\left(X\right)$ будет не меньше $2^{|X|}$, т.е. теория $T$ не ($P$ $s$)-стабильна ни в какой бесконечной мощности.

Напомним, что прямая сумма циклических групп порядка $p$ для некоторого фиксированного простого числа $p$ называется элементарной абелевой группой.

**Теорема 2.** *Группа $A$ является ($P$ $s$)-суперстабильной тогда и только тогда, когда она является прямой суммой конечного числа элементарных групп и конечной группы.*

**Доказательство**. По лемме 3 ($P$ $s$)-стабильная группа является ограниченной. То есть представляет собой конечную прямую сумму ограниченных $p$-групп для некоторых простых чисел $p$. Если бы какое-то из этих прямых слагаемых не было бы прямой суммой элементарной группы и конечной группы, то для некоторого простого числа $p$-подгруппа $\left(A\left[p\right] \cap pA\right)$ была бы бесконечной. По лемме 4 группа $A$ не являлась бы ($P$ $s$)-стабильной, тем более она не была бы ($P$ $s$)-суперстабильной.

Покажем, что теория $Th(A)$, где $A$ — прямая сумма конечного числа элементарных групп и конечной группы является ($P$ $s$)-суперстабильной.

В любой $p$-компоненте $A_p$ группы $A$ для любого натурального числа $k \geq 1$ подгруппа $p^k A_p$ конечна. Так как группа $A$ является прямой суммой своих $p$-компонент для различных простых $p$, то для любого простого $p$ подгруппа $p^k A$ состоит из элементов вида $(a+b)$, где $a \in p^k A_p$ и $b$ имеет порядок, взаимно простой с $p$.

Пусть $P$ — произвольная подгруппа группы $A$ и $\Phi\left(x_1,...,x_n\right)$ — произвольная примитивная формула языка $L$. Покажем, что найдутся такие формулы $\Phi^*\left(x_1,...,x_n\right)$ и $\Phi^+\left(x_1,...,x_n\right)$ с параметрами из конечных множеств $pA_p$, что для любых $a_1,...,a_n \in P$ выполнены следующие свойства:

(a) $A \models \Phi(a_1,...,a_n) \Leftrightarrow P \models \Phi^*(a_1,...,a_n)$;

(b) $P \models \Phi(a_1,...,a_n) \Leftrightarrow A \models \Phi^+(a_1,...,a_n)$.

В силу леммы 2 можно считать, что формула $\Phi$ является булевой комбинацией стандартных формул. Поэтому можно считать, что $\Phi$ — стандартная формула. Если $\Phi$ — стандартная формула первого рода, то в качестве $\Phi^*$ и $\Phi^+$ можно взять формулу $\Phi$. Пусть $\Phi$ — стандартная формула второго рода, т.е. $\Phi$ имеет вид $\exists yt = p^k y$, где $t$ — линейная комбинация переменных $x_1,...,x_n$, $k > 0$.

Пусть $X = \left(P \bigcap p^k A_p\right) = \{a_1 ... a_n\}$. Через $z \in X$ обозначим формулу $(z = a_1 \vee ... \vee z = a_n)$. Пусть $n^*$ — наименьшее общее кратное порядков элементов группы $A$, $p^{k^*}$ — наибольший порядок элементов $p$-компоненты $A_p$ группы $A$ и $m^* = n^* / p^{k^*}$. Ясно, что $m^*$ взаимно просто с $p$. Обозначим через $\Theta(x)$ бескванторную формулу, выражающую, что порядок элемента $x$ является делителем числа $m^*$. Ясно, что каждый элемент множества $\Theta(A)$ делится на $p^k$ для любого натурального числа $\kappa$.

Покажем, что в качестве формулы $\Phi^*$ можно взять формулу

$$\exists z \exists w\big(t(x) = (z + w) \wedge z \in X \wedge \Theta(w)\big).$$

В самом деле, если $P \models \Phi^*(\mathbf{a})$ для кортежа $a \in P$, то, как замечено выше, элемент $t(a)$ делится на $p^k$ в $A$, т.е. $A \big| \Phi(a)$.

Пусть элемент $t(a)$ делится на $p^k$ в $A$, т.е. $t(a) = e + b$, где $e \in$ $p^k A_p$ и $b$ имеет порядок, взаимно простой с $p$. Так как порядок элемента $b$ является делителем числа $m^*$, то $m^* t(\mathbf{a}) = m^* e.$ Так как порядок элемента $e$ взаимно прост с числом $m^*$, то найдется такое целое число $l$, что $lm^* e = e.$ Таким образом, мы имеем $lm^* t(\mathbf{a}) = e,$ откуда, в силу условия $t(a) \in P$, получаем $e \in X$. Тогда мы имеем $b \in P$, следовательно, $P \big| = \Phi^*(a)$.

Пусть $Y = p^k P_p$. Так как множество $X$ конечно, то множество $Y$ тем более конечно, поэтому существует формула с параметрами из конечного множества $p^k A_p$, выражающая условие $z \in Y$. В качестве формулы $\Phi^+(x)$ берем формулу

$$\exists z \exists w\big(t(x) = (z + w) \wedge z \in Y \wedge \Theta(w)\big).$$

Пусть выполнено $P \big| = \Phi(a)$, т.е. $t(a) = p^k d$ для некоторого $d \in P$. Так как подгруппа $P$ тоже является прямой суммой своих $q$-компонент для различных простых $q$, то подгруппа $p^k P$ состоит из элементов вида $(a + b)$, где $a \in p^k P_p$ и $b$ имеет порядок, взаимно простой с $p$. Следовательно, мы имеем $A \big| = \Phi^+(a)$.

Пусть выполнено $A \big| = \Phi^+(a)$, т.е. для кортежа $a \in P$, элементов $e \in p^k P_p$ $pkPp$ и $b \in \Theta(A)$ выполнено $t(a) = e + b$. Так как $e$, $t(a) \in P$, то $b \in P$. Возьмем элемент $d \in P$, для которого выполнено $p^k d = e$. Так как порядок элемента $b$ взаимно прост с $p$, то элемент $b$ делится на $p^k$ в подгруппе, порожденной элементом $b$, в частности, найдется элемент $g \in P$ с условием $p^k g = b$. Таким образом, для элемента $h = (d + g)$ выполнено $t(a) = p^k h$, т.е. $P \big| = \Phi(a)$.

Пусть $\Phi(x_1, ..., x_n)$ — примитивная формула языка $L_p$. В силу замечания 1 можно считать, что $\Phi$ имеет вид

$$\exists y_1 ... \exists y_s \left(P(y_1) \wedge ... \wedge P(y_s) \wedge \Psi(y_1, ..., y_s; x_1, ..., x_n)\right),$$

где $\Psi$ — примитивная формула языка $L$. Для формулы $\Psi^*(y_1, ..., y_s; x_1, ..., x_n)$ и для любых элементов $b_1, ..., b_s, a_1, ..., a_n \in P$ выполнено

$$A \big| = \Psi(b_1, ..., b_s; a_1, ..., a_n) \Leftrightarrow P \big| = \Psi^*(b_1, ..., b_s; a_1, ..., a_n).$$

Тогда для формулы

$$\Theta(x_1, ..., x_n) = \exists y_1 ... \exists y_s \Psi^*(y_1, ..., y_s; x_1, ..., x_n)$$

для любых $a_1, ..., a_n \in P$ будет выполнено условие

$$\langle A, P \rangle | = \Phi(a_1, ..., a_n) \Leftrightarrow P | = \Theta(a_1, ..., a_n).$$

Для формулы $\Theta^+(x_1, ..., x_n)$ и любых $a_1, ..., a_n \in P$ будет выполнено

$$P \big| = \Theta(a_1, ..., a_n) \Leftrightarrow A \big| = \Theta^+(a_1, ..., a_n).$$

Таким образом, формула $\Theta^{+}(x_1,...,x_n)$ языка $L$ будет в группе $A$ определять на $P(A)$ тот же предикат, что и формула $\Phi(x_1,...,x_n)$ в структуре $\langle A;P\rangle$.

Из определения формул $\Phi^{*}$ и $\Phi^{+}$ видно, что для фиксированной примитивной формулы $\Phi(x)$ языка $L_p$ формула $\Theta^{+}(x_1,...,x_n)$ может иметь только конечное число возможных видов, так как они отличаются только подформулами, выражающими свойства $x \in X$ и $x \in Y$, которые, в свою очередь, могут иметь только конечное число видов. По лемме 1 истинность произвольной формулы в структуре $\langle A,P\rangle$ определяется истинностью примитивных формул в этой структуре. Следовательно, из показанной выше конечности видов формул $\Theta^{+}(x_1,...,x_n)$ вытекает, что для любого множества $X$ в теории $T$ число пополнений множества $T_s(X)$ в языке $L_p$ не превосходит $2^{\omega}$ (континуума). Это означает, что теория $T(P,s)$-суперстабильна.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ. (Проект № 12–01–00460).*

## References

1 *Mustafin T.G.* New concepts of stability theory // Proceedings of the Soviet-French symposium on model theory. — Karaganda, 1990. — P. 112–125.

2 *Palutin E.A.* $E^{*}$-stable theories // Algebra and Logic. — 2003. — Vol. 42. — № 2. — P. 194–210.

3 *Morley M.* Categoricity in power // Trans. AMS. — 1965. — Vol. 114. — P. 514–538.

4 *Shelah S.* Stable theories. — Israel J.Math 7, 1969. — P. 187–202.

5 *Rusaleyev M.A.* Characterization $(P,1)$-stability theory // Algebra and Logic. — 2007. — Vol. 46. — № 3 — P. 346–359.

6 *Nurmaganbetov T.A.* $P$-stability of complete theories of Abelian groups: XI Inter-republican conf. on the mat. logic. Abstracts of Reports. — Kazan: Publ. house KGU, 1992. — P. 106.

7 *Fuks L.* Infinite Abelian groups. — Transl. from English. — Vol. 1. — Moscow: Mir, 1974. — P. 335.

8 *Ziegler M.* Model theory of modules // Ann. Pure and Appl. Logic. — 1984. — Vol. 26. — P. 149–213.

9 *Ershov Yu.L., Palutin E.A.* Mathematical logic. — Moscow: Fizmatlit; Publishing 6, 2011. — P. 357.

10 *Szmielew W.* Elementary properties of Abelian groups // Fund. Math. — 1955. — Vol. 41. — P. 203–271.

Е.А.Палютин

## $P$-Суперстабильді абельдік группалар

Мақалада барлық *P*-суперстабильді абельдік группалар сипатталған, мұндағы *P* — кез келген ішкі группа. Кез келген абельдік группа *p* серванттық ішкі группалар үшін *P*-суперстабильді болып табылатыны дәлелденді, дербес жағдайда бұл Т.А.Нұрмағамбетовтың нәтижесін жалпылайды.

E.A.Palutin

## $P$-Superstable Abelian groups

In work all the *P*-superstable abelian groups, where *P* — any subgroup, are described. It is proved that every abelian group is superstable *p* for pure subgroups of *P*, which, in particular, summarizes the results of T.A.Nurmagambetov.